ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 9 (532)

УДК 519.62

А.Д. ЛЯШКО, Е.М. ФЕДОТОВ

КОРРЕКТНОСТЬ ДВУХСЛОЙНЫХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Многокомпонентные разностные схемы относятся к классу экономичных разностных схем с полной аппроксимацией. Впервые такие схемы были предложены в работах В.Н. Абрашина [1], [2] как схемы переменных направлений для решения многомерных задач. Исследованию многокомпонентных разностных схем для линейных эволюционных уравнений и систем, а также многокомпонентным итерационным методам решения эллиптических уравнений посвящены работы [3]–[7] (см. также обзор в [8]). В [9] исследована корректность многокомпонентного метода для нелинейного параболического уравнения.

В данной работе исследуется корректность системы нелинейных многокомпонентных двухслойных операторно-разностных уравнений в предположении, что пространственный оператор представим в виде суммы операторов, имеющих полуограниченную вариацию в окрестности заданного элемента конечномерного евклидова пространства. Доказанная теорема о корректности операторно-разностных схем (ОРС) применяется для исследования разрешимости и сходимости многокомпонентной разностной схемы для начально-краевой задачи для квазилинейного гиперболического уравнения.

1. Корректность многокомпонентных ОРС

Пусть $H = H_h$ — семейство конечномерных евклидовых пространств, зависящих от параметра h, элемента конечномерного пространства с нормой $|h| > 0$, $\overline{\omega}_\tau = \{0, \tau, 2\tau, \dots, T\}$ — сетка на отрезке $[0, T]$, $X^p = X^p_{\tau h} = \{\mathbf{v}(t) = (v_1(t), \dots, v_p(t)) \in H^p,\ t \in \omega_\tau\}$ — пространство функций, определенных на сетке $\overline{\omega}_\tau$, с значениями в пространстве H^p, $p \geq 1$.

Рассмотрим двухслойную многокомпонентную ОРС

$$\begin{gathered} w_t + \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha y_\alpha = \widehat{\varphi}(t), \\ y_{\alpha t} + \nu\tau (A_{0,\alpha} y_\alpha)_t - w^{(\sigma)} = 0, \quad t \in \omega_\tau = \overline{\omega}_\tau \setminus \{T\}, \quad \nu > 0, \end{gathered} \tag{1}$$

$$y_\alpha(0) = u_0, \quad \alpha = \overline{1,p}, \quad w(0) = u_1, \tag{2}$$

где A_α — нелинейные операторы, действующие в пространстве H, $A_\alpha = A_{0,\alpha} + A_{1,\alpha}$, $A = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} A_\alpha$, $\sigma \geq 0{,}5$ — числовой параметр.

Пусть v, u — заданные элементы пространства X и $\mathbf{u} = (v, u, \dots, u) \in X^{(p+1)}$, $\delta = \delta(\tau, |h|) > 0$ — заданная функция. Назовем погрешностью аппроксимации ОРС (1), (2) элемент $\Psi(\mathbf{u})$ пространства $X^{(p+1)}$ такой, что $\Psi_0(\mathbf{u})(\widehat{t}\,) = \widehat{\varphi}(t) - v_t - Au$, $\Psi_\alpha(\mathbf{u})(\widehat{t}\,) = \Psi^*_\alpha(\mathbf{u})(\widehat{t}\,) + \Psi^0_\alpha(\mathbf{u})(\widehat{t}\,)$, $\Psi^0_\alpha(\mathbf{u})(\widehat{t}\,) = v^{(\sigma)} - u_t$, $\Psi^*_\alpha(\mathbf{u})(\widehat{t}\,) = -\sigma(A_{0,\alpha}\widehat{u} - A_{0,\alpha} u)$, $t \in \omega_\tau$, $\Psi_0(\mathbf{u})(0) = u_1 - w(0)$, $\Psi_\alpha(\mathbf{u})(0) = y_0 - u(0)$, $\alpha = \overline{1,p}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 04-01-00821, 06-01-00633.

Всюду в дальнейшем будем пользоваться принятыми обозначениями из [10], [11]. Постоянные, не зависящие от параметров τ, h, если не оговорено особо, будем обозначать буквами c, d, возможно с индексами; через h_0 и τ_0 будем обозначать достаточно малые величины.

Исследование ОРС (1) проведем, используя определение корректности из [12].

Определение. ОРС (1) назовем $(\mathbf{u},\delta)$-корректной, если существуют $\delta=\delta(\tau,h)>0$, непрерывная функция $J(\xi):J(0)=0$ и норма $\|\cdot\|_{(1)}$ такие, что как только $J(\Psi(\mathbf{u}))\le\delta$, то ОРС (1) имеет решение $y:\|y(t)-\mathbf{u}(t)\|_{(1)}\le\delta$ и верна оценка (неравенство корректности)

$$\|y(t)-\mathbf{u}(t)\|_{(1)}\le J(\Psi(\mathbf{u})).$$

Лемма 1 ([13], с. 20). *Пусть V — конечномерное евклидово пространство, $\|\cdot\|$ — некоторая норма в нем, B — отображение V в V такое, что при некоторых $\rho>0$, $\eta\in V$ и любых $v:\|v\|=\rho$*

$$(B(v+\eta)-B(\eta),v)>0 \tag{3}$$

Пусть $P(v)$ — такое непрерывное отображение V в себя, что выполнено неравенство

$$(B(v+\eta)-B(\eta),P(v))\ge 0. \tag{4}$$

Тогда найдется элемент $y\in V:\|y\|\le\rho$ такой, что $P(y)=0$.

Заметим, что в лемме 1 строгим должно быть лишь одно из неравенств (3) или (4).

Пусть $\|\cdot\|_\alpha$, $\alpha=\overline{1,p}$, — некоторые нормы в H и $\|\cdot\|_{H^{(p+1)}}=\Big(\sum\limits_{\alpha=0}^{p}\|\cdot\|_\alpha^2\Big)^{1/2}$, $\|\cdot\|_0=\|\cdot\|$.

Будем полагать, что оператор $A_{0,\alpha}$ дважды и оператор $A_{1,a}$ один раз дифференцируемы по Фреше в окрестности $O_{\alpha,\delta}(u^{(\xi)}(t))$ при каждом $t\in\overline{\omega}_\tau$ и при любых $\xi\in[0,1]$, где $O_{\alpha,\delta}(v)=\{\eta\in H:\|\eta-v\|_\alpha\le\delta\}$.

Будем также предполагать, что первые производные операторов $A_{0,\alpha}(v)$ являются самосопряженными операторами и при любых $v\in O_{\alpha,\delta}(u^{(\xi)}(t))$, $v_i\in H$, $i=\overline{1,3}$, выполнены неравенства

$$(A'_{0,\alpha}(v)v_1,v_1)\ge d_0\|v_1\|_\alpha^2,\qquad d_0>0, \tag{5}$$

$$|(A'_{0,\alpha}(v)v_1,v_2)|\le d_1\|v_1\|\alpha\|v_2\|_\alpha,\qquad d_1\ge 0, \tag{6}$$

$$|(A^{(2)}_{0,\alpha}(v)u_tv_1,v_2)|\le d_2\|v_1\|\alpha\|v_2\|_\alpha,\qquad d_2\ge 0, \tag{7}$$

$$|(A'_{1,\alpha}(v)v_1,v_2)|\le d_3\|v_1\|\alpha\|v_2\|,\qquad d_3\ge 0, \tag{8}$$

$$|(A^{(2)}_{0,\alpha}(v)v_1v_2,v_3)|\le d_4\|v_1\|\alpha\|v_2\|_\alpha\|v_3\|_\alpha,\quad d_d=d_4(h,\tau)\ge 0, \tag{9}$$

Лемма 2. *Пусть операторы A_α удовлетворяют условиям* (5)–(9), *а также выполнены неравенства*

$$\begin{gathered}\nu>0,\\ d_0>3d_4(h,\tau)\delta/2\end{gathered} \tag{10}$$

и ОРС (1) *имеет решение $\mathbf{y}\in U_\delta(\mathbf{u})$, $y_0=w$, $U_\delta(\mathbf{u})=\{\mathbf{w}:\|\mathbf{w}(t)-\mathbf{u}(t)\|_{H^{(p+1)}}\le\delta,\ t\in\overline{\omega}_\tau\}$. Тогда при любом $t\in\overline{\omega}_\tau$ справедлива оценка*

$$c_0\Big[\|z_0(t)\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\|y_\alpha(t)-u(t)\|_\alpha^2\Big]\le Q(\mathbf{z}(t))\le r^2(t-\tau), \tag{11}$$

где $\mathbf{z}=\mathbf{y}-\mathbf{u}$,

$$r^2(t)=\frac{\exp[(c_1+c_2)t/(1-c_2\tau)]}{(1-c_1\tau)}\left\{(1+c_2\tau)Q(\mathbf{z}(0))+\sum_{t'=0}^{t}\left[d_1^2\sum_{\alpha=1}^{p}\|\widehat{\psi}_\alpha(t')\|_\alpha^2+\|\widehat{\psi}_0(t')\|^2\right]\right\},$$

$$c_0=\min\{1,d_0\},\quad c_1=3+p\nu^{-1},\quad \overline{c}_2=1+pd_3^2,\quad \widehat{\psi}_\alpha\equiv\Psi_\alpha(\mathbf{u})(\widehat{t}),$$

$$Q(\mathbf{v}(t))=\|v_0(t)\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}[2\Phi_\alpha(v_\alpha)+\sigma\tau\|A_{0,\alpha}(u+v_\alpha)-A_{0,\alpha}u\|^2],$$

$$\Phi_\alpha(v)=\iint_0^1(A'_{0,\alpha}(u+\xi\theta v)\theta v,v)d\xi\,d\theta.$$

Доказательство. Для $z_\alpha=y_\alpha-u$ имеем (для сокращения записи будем считать $\sigma=1$)

$$z_{0,t}+\sum_{\alpha=1}^{p}(A_\alpha y_\alpha-A_\alpha u)_t=\widehat{\psi}_0,$$
$$z_{\alpha,t}+\nu\tau(A_{0,\alpha}y_\alpha-A_{0,\alpha}u)_t-z_0^{(\sigma)}=\widehat{\psi}_\alpha,$$
$$z(0)=\psi_0\equiv\Psi(\mathbf{u})(0).$$

Умножим скалярно первое из уравнений на $2\tau z^{(\sigma)}$, сложим со вторым уравнением, умноженным прежде на $2\tau(A_{0,\alpha}\widehat{y}_\alpha-A_{0,\alpha}\widehat{u})$ и просуммированным по всем $\alpha=1,\ldots,p$. Получим

$$\begin{aligned}2\tau(z_{0,t},\widehat{z}_0)+2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}[&(A_{0,\alpha}y_\alpha-A_{0,\alpha}u,\widehat{z}_0)+(A_{1,\alpha}y_\alpha-A_{1,\alpha}u,\widehat{z}_0)+\\&+(z_{\alpha,t},A_{0,\alpha}\widehat{y}_\alpha-A_{0,\alpha}\widehat{u})+\nu\tau((A_{0,\alpha}y_\alpha-A_{0,\alpha}u)_t,A_{0,\alpha}\widehat{y}_\alpha-A_{0,\alpha}\widehat{u})-\\&-(\widehat{z}_0,A_{0,\alpha}\widehat{y}_\alpha-A_{0,\alpha}\widehat{u})]=2\tau(\widehat{\psi}_0,\widehat{z}_0)+2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}(\widehat{z}_0,A_{0,\alpha}\widehat{y}_\alpha-A_{0,\alpha}\widehat{u}).\end{aligned}\tag{12}$$

Преобразуем слагаемые в (12) и получим для них оценки. Заметим прежде, что

$$\mathrm{I}=2\tau(z_{0,t}\widehat{z}_0)=\|\widehat{z}_0\|^2-\|z_0\|^2+\tau^2\|z_{0,t}\|^2,\tag{13}$$
$$\mathrm{II}_{1,5}=(A_{0,\alpha}y_\alpha-A_{0,\alpha}u,\widehat{z}_0)-(\widehat{z}_0,A_{0,\alpha}\widehat{y}_\alpha-A_{0,\alpha}\widehat{u})=-\tau(\widehat{z}_0,(A_{0,\alpha}y_\alpha-A_{0,\alpha}u)_t),\tag{14}$$
$$\begin{aligned}\mathrm{II}_4=2\tau((A_{0,\alpha}y_\alpha-A_{0,\alpha}u)_t,A_{0,\alpha}\widehat{y}_\alpha-A_{0,\alpha}\widehat{u})=\|A_{0,\alpha}\widehat{y}_\alpha-A_{0,\alpha}\widehat{u}\|^2-\\-\|A_{0,\alpha}y_\alpha-A_{0,\alpha}u\|^2+\tau^2\|(A_{0,\alpha}y_\alpha-A_{0,\alpha}u)_t\|^2.\end{aligned}\tag{15}$$

Третье слагаемое в квадратных скобках (12) с точностью до обозначений совпадает со слагаемым (17) в [12] с $m=1$, $l_1=1$, $\sigma_1=1$. Воспользуемся приведенной там для него оценкой (22), которая получена при аналогичных предположениях относительно оператора A_0. В принятых в данной работе обозначениях оценка слагаемого примет вид

$$\mathrm{II}_3\geq 2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}(\Phi_\alpha(z_\alpha))_t-3d_2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}(\|\widehat{z}_\alpha\|_\alpha^2+\|z_\alpha\|_\alpha^2).\tag{16}$$

Получим оценки для слагаемого $\mathrm{II}_{1,5}$ (11), а также остальных слагаемых в (12), пользуясь (5), (6), (8):

$$|\mathrm{II}_{1,5}|=2\tau^2|(\widehat{z}_0,(A_{0,\alpha}y_\alpha-A_{0,\alpha}u)_t)|\leq p\nu^{-1}\tau\|\widehat{z}_0\|^2+\nu\tau^3\sum_{\alpha=1}^{p}\|(A_{0,\alpha}y_\alpha-A_{0,\alpha}u)_t\|^2,\tag{17}$$

$$|\mathrm{II}_2| = 2\tau\left|\left(\sum_{\alpha=1}^{p}(A_{1,\alpha}y_\alpha - A_{1,\alpha}u), \widehat{z}_0\right)\right| \le \tau\|\widehat{z}_0\|^2 + \tau p d_3^2 \sum_{\alpha=1}^{p}\|z_\alpha\|_\alpha^2, \tag{18}$$

$$|\mathrm{III}_1| = 2\tau|(\widehat{\psi}_0, \widehat{z}_0)| \le \tau\|\widehat{z}_0\|^2 + \tau\|\widehat{\psi}_0\|^2, \tag{19}$$

$$|\mathrm{III}_2| = 2\tau\left|\sum_{\alpha=1}^{p}(A_{0,\alpha}\widehat{y}_\alpha - A_{0,\alpha}\widehat{u}), \widehat{\psi}_\alpha\right| \le \tau d_1^2 \sum_{\alpha=1}^{p}\|\widehat{\eta}_\alpha\|_\alpha^2 + \tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|\widehat{z}_\alpha\|_\alpha^2. \tag{20}$$

Подставляя (13), (15)–(20) в (12) и учитывая следствие (5) $\|z_\alpha\|_\alpha^2 \le 2d_0^{-1}\Phi_\alpha(z_\alpha)$ будем иметь

$$\widehat{Q}(\mathbf{z}) - Q(\mathbf{z}) \le \tau c_1\widehat{Q}(\mathbf{z}) + \tau c_2 Q(\mathbf{z}) + \tau\left[\|\widehat{\psi}_0\|^2 + d_1^2\sum_{\alpha=1}^{p}\|\widehat{\psi}_\alpha\|_\alpha^2\right].$$

Разрешая полученное неравенство, придем к (11). □

Теорема. *Пусть при* $\tau \le \tau_0$, $|h| \le h_0$ *операторы* A_α *удовлетворяют условиям* (5)–(9), *а также выполнены неравенства* (10). *Тогда ОРС* (1) $(\mathbf{u}, \delta)$*-корректна, при этом неравенство корректности имеет вид*

$$\|w(t) - v(t)\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\|y_\alpha(t) - u(t)\|_\alpha^2 \le J^2(\Psi(\mathbf{u})), \tag{21}$$

где

$$J^2(\Psi(\mathbf{u})) = \frac{\exp[(c_1+c_2)T/(1-c_1\tau_0)]}{c_0(1-c_1\tau_0)}\left\{(1+c_2\tau_0)Q(\mathbf{z}(0)) + \sum_{t'=0}^{T-\tau}\left[d_1^2\sum_{\alpha=1}^{p}\|\widehat{\psi}_\alpha(t')\|_\alpha^2 + \|\widehat{\psi}_0(t')\|^2\right]\right\}.$$

Доказательство теоремы проведем индукцией по $t \in \overline{\omega}_\tau$. Пусть $J(\Psi(u)) \le \delta$. Ясно, что в этом случае $y_\alpha(0) \in O_{\alpha,\delta}(u(0))$, $\alpha = \overline{1,p}$.

Предположим, что для всех $t \le t^*$ в $O_{\alpha,\delta}(u(t))$ существует решение $\widehat{y}_\alpha(t)$. Пусть $\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{u}(t)$ при $t \le t^*$ и $\widehat{\mathbf{z}}(t^*) = \widehat{\mathbf{v}} - \widehat{\mathbf{u}}(t^*)$, $\widehat{v}_\alpha \in O_{\alpha,\delta}(\widehat{u}(t^*))$.

Заметим, что в силу леммы 2 при $t \le t^*$ верна оценка $\|z_\alpha(t)\|^2 \le r^2(t-\tau)/c_0 < J^2(\Psi(\mathbf{u})) \le \delta^2$.

Рассмотрим при $t = t*$ выражение $G = (P(\widehat{\mathbf{z}}), B(\widehat{\mathbf{v}}) - B(\widehat{\mathbf{u}})) = \sum_{\alpha=0}^{p}(P_\alpha(\widehat{\mathbf{z}}), B_\alpha(\widehat{\mathbf{v}}) - B_\alpha(\widehat{\mathbf{u}}))$, где (для удобства примем обозначение $\widehat{y}_\alpha = \widehat{v}_\alpha(t)$)

$$P_0(\widehat{\mathbf{z}}) = z_{0,t} + \sum_{\alpha=1}^{p}(A_\alpha y_\alpha - A_\alpha u) - \psi_0(t),$$
$$P_\alpha(\widehat{\mathbf{z}}) = z_{\alpha,t} + \nu\tau(A_{0,\alpha}y_\alpha - A_{0,\alpha}u)_t - \widehat{z}_0 - \psi_\alpha(t), \quad \alpha = \overline{1,p},$$
$$B_0(\widehat{\mathbf{v}}) = 2\tau\widehat{y}_0, \quad B_\alpha(\widehat{\mathbf{v}}) = 2\tau A_{0,\alpha}\widehat{y}_\alpha, \quad \alpha = \overline{1,p}.$$

Имеем

$$G \ge 2\tau(z_{0,t}, \widehat{z}_0) + 2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}[(A_{0,\alpha}y_\alpha - A_{0,\alpha}u, \widehat{z}_0) + (A_{1,\alpha}y_\alpha - A_{1,\alpha}u, \widehat{z}_0) +$$
$$+ (z_{\alpha,t}, A_{0,\alpha}\widehat{y}_\alpha - A_{0,\alpha}\widehat{u}) + \nu\tau((A_{0,\alpha}y_\alpha - A_{0,\alpha}u)_t, A_{0,\alpha}\widehat{y}_\alpha - A_{0,\alpha}\widehat{u}) -$$
$$- (\widehat{z}_0, A_{0,\alpha}\widehat{y}_\alpha - A_{0,\alpha}\widehat{u})] = 2\tau(\widehat{\psi}_0, \widehat{z}_0) + 2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}(\widehat{z}_0, A_{0,\alpha}\widehat{y}_\alpha - A_{0,\alpha}\widehat{u}).$$

Слагаемые в G с точностью до обозначений совпадают со слагаемыми в (12). Проводя для них оценки, как в лемме 2, получим

$$G \ge (1-\tau c_1)\widehat{Q}(\mathbf{z}) - (1+\tau c_2)Q(\mathbf{z}) - \tau\left[\|\widehat{\psi}_0\|^2 + d_1^2\sum_{\alpha=1}^{p}\|\widehat{\psi}_\alpha\|_\alpha^2\right]. \tag{22}$$

Первое слагаемое в (22) оценим снизу, используя (5), второе же слагаемое оценим сверху, воспользовавшись (11). Будем иметь $G \geq c_0(1-\tau c_1)(\|\widehat{\mathbf{z}}\|^2_{H^{p+1}} - \rho^2)$, $\rho^2 = r^2(t)/c_0$.

Ясно, что $\rho \leq J(\Psi(u)) \leq \delta$, а потому на границе шара $\|\widehat{\mathbf{z}}\|_{H^{p+1}} = \|\widehat{v} - \widehat{u}(t)\|_{H^{p+1}} = \delta$ выполнено неравенство $G > 0$. Тогда в силу леммы 1 в указанном шаре существует элемент $\widehat{\mathbf{z}}$, на котором имеет место равенство $P(\widehat{\mathbf{z}}) = 0$. При этом элемент $\widehat{\mathbf{y}} = \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{z}}$, как нетрудно видеть, удовлетворяет равенствам (1).

Используя сильную монотонность операторов $\tau^{-1}E + A_\alpha$ в δ-окрестности элемента u, следующую из (5), (6) и малости τ, нетрудно установить единственность решения $\widehat{\mathbf{y}}(t^*)$ ОРС (1), для которого при всех $\alpha = 1, \dots, p$ верно включение $y_\alpha(t^*) \in O_{\alpha,\delta}(u(t^*))$. $\square$

Замечание. Нетрудно установить аналогичный результат об $(\mathbf{u}, \delta)$-корректности для ОРС вида

$$
\begin{gathered}
w_t + \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha y_\alpha = \widehat{\varphi}(t), \\
y_{\alpha t} + \nu\tau(R_\alpha y_\alpha)_t - w^{(\sigma)} = 0, \quad t \in \omega_\tau = \overline{\omega}_\tau \setminus T, \quad \nu > 0, \\
y_\alpha(0) = u_0, \quad w(0) = u_1,
\end{gathered} \tag{23}
$$

где $R_\alpha = A_{0,\alpha} + \overline{A}_{1,\alpha}$ и операторы $\overline{A}_{1,\alpha}$ удовлетворяют условию (8).

2. Исследование разностной схемы для квазилинейного гиперболического уравнения

В области $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega = \{0 < x_i < 1, i = 1, \dots, p\}$ с границей Γ рассмотрим уравнение

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{p} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i\left(x, u\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right) - q_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right] = f(x,t) \tag{24}
$$

с граничными и начальными условиями

$$
u|_\Gamma = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{25}
$$

Будем предполагать достаточную гладкость исходных данных задачи (24)–(25), а также то, что она имеет единственное достаточно гладкое решение. Будем также предполагать, что коэффициенты q_i уравнения (24) допускают представление $q_i(\eta_0, \eta_i) = k_{0,i}(\eta_0, \eta_i) + q_{1,i}(\eta_0, \eta_i)$ с коэффициентами $k_{0,i}$, удовлетворяющими условиям симметрии

$$
\frac{\partial k_i(\eta_0, \eta_i)}{\partial \eta_0} = \frac{\partial k_{0,i}(\eta_0, \eta_i)}{\partial \eta_i},
$$

а также предполагать, что на решении u выполнено соотношение (условие гиперболичности)

$$
\frac{\partial}{\partial \eta_i} k_i\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) < \nu_0 > 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{26}
$$

В области Ω построим равномерную по каждому направлению сетку $\overline{\omega}_h = \{(x_{1,i_1}, \dots, x_{p,i_p}),$ $i_k = \overline{1, N_k},\ k = \overline{1,p}\}$. Пусть $\gamma = \overline{\omega}_h \cap \Gamma$ — множество граничных точек сетки, $\omega_h = \overline{\omega}_h \setminus \gamma$ и $|h| = \left(\sum h_i^2\right)^{1/2}$. Через H обозначим пространство функций, определенных на сетке $\overline{\omega}_h$, через $\overset{\circ}{H}$ — пространство функций из H, равных нулю на границе γ.

Для аппроксимации уравнения (24) по пространственным переменным воспользуемся методом сумматорных тождеств [11] (для разностных отношений и квадратурных сумм воспользуемся принятыми там обозначениями).

Определим сеточные операторы R_i, A_i, $A_{l,i}$ формами ($\eta, v \in \overset{\circ}{H}$)

$$[R_i\eta, v] = \frac{1}{2^p}\sum_{\alpha}(k_i(\eta, \partial_{\alpha_i}\eta), \partial_{\alpha_i}v)_\alpha, \quad \alpha = (\pm 1, \ldots, \pm 1) \in R^p,$$

$$[A_i\eta, v] = [R_i\eta, v] + \frac{1}{2^p}\sum \alpha(q_i(\eta, \partial_{\alpha_i}\eta), v)_\alpha,$$

$$[A_{0,i}\eta, v] = [R_i\eta, v] + \frac{1}{2^p}\sum_{\alpha}(k_{0,i}(\eta, \partial_{\alpha_i}\eta), v)_\alpha + \beta[\eta, v], \quad \beta > 0,$$

$$[A_{1,i}\eta, v] = \frac{1}{2^-}\sum_{\alpha}(q_{1,i}(\eta, \partial_{\alpha_i}\eta), v)_\alpha - \beta[\eta, v], \quad \beta > 0.$$

Решение разностной схемы определим равенством (23). Правые части φ, u_0 при этом будем вычислять как значения соответственно функций $f(x,t)$ и $u_0(x)$ в точках сетки $\omega_h \times \omega_\tau$.

Исследуем разрешимость и сходимость построенной таким образом разностной схемы. Для этого воспользуемся теоремой и замечанием к ней. Для $v \in \overset{\circ}{H}$ определим нормы $\|v\|_i^2 = \frac{1}{2^p}\sum\limits_{\alpha}(\partial_{\alpha_i}v, \partial_{\alpha_i}v)_\alpha$, и положим $\delta = \overline{c}h^{\varkappa_p}$, $\varkappa_p = p/2 + \varkappa$, $\varkappa \in (0, 2 - p/2)$. Воспользовавшись теоремами вложения сеточных пространств $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\overline{\omega}_h)$ в $L_2(\overline{\omega}_h)$ и $L_2(\overline{\omega}_h)$ в $C(\overline{\omega}_h)$ (напр. [14], с. 289), нетрудно показать, что если $\|v - u(t)\|_i \leq \delta$, то в каждой точке $x \in \omega_h$ верны неравенства

$$|v(x) - u(x,t)| \leq ch^{\varkappa}, \quad |\partial_{\alpha_i}v(x) - \partial u(x,t)/\partial x_i| \leq ch^{\varkappa}, \quad c = 2^{p/2}\overline{c}. \tag{27}$$

Покажем, что условия (5)–(9) выполнены. Для этого вычислим производные операторов $A_{0,i}$, $A_{1,i}$, $B_i = A_{0,i} - R_i$. Имеем

$$[R_i'(v)v_1, v_2] = \frac{1}{2^p}\sum_{\alpha}\left\{\left(\frac{\partial k_i(v, \partial_{\alpha_i}v)}{\partial\eta_0}v_1, \partial_{\alpha_i}v_2\right)_\alpha + \left(\frac{\partial k_i(v, \partial_{\alpha_i}v)}{\partial\eta_1}\partial_{\alpha_i}v_1, \partial_{\alpha_i}v_2\right)_\alpha\right\},$$

$$\begin{aligned}[R_i^{(2)}(v)v_1v_2, v_3] = \frac{1}{2^p}\sum_{\alpha}\Bigg\{&\left(\frac{\partial^2 k_i(v, \partial_{\alpha_i}v)}{\partial\eta_0^2}v_1v_2, \partial_{\alpha_i}v_3\right)_\alpha + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 k_i(v, \partial_{\alpha_i}v)}{\partial\eta_0\partial\eta_1}(v_1, \partial_{\alpha_i}v_2 + \partial\eta_0\partial\eta_1 v_2\partial v_1), \partial_{\alpha_i}v_3\right)_\alpha + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 k_i(v, \partial_{\alpha_i}v)}{\partial\eta_1^2}\partial_{\alpha_i}v_1\partial_{\alpha_i}v_2, \partial_{\alpha_i}v_3\right)_\alpha\Bigg\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[A_{0,i}'(v)v_1, v_2] = [R_i'(v)v_1, v_2] + \frac{1}{2^p}\sum_{\alpha}\Bigg\{&\left(\frac{\partial k_{0,i}(v, \partial_{\alpha_i}v)}{\partial\eta_0}v_1, v_2\right)_\alpha + \\ &+ \left(\frac{\partial k_{0,i}(v, \partial_{\alpha_i}v)}{\partial\eta_1}\partial_{\alpha_i}v_1, v_2\right)_\alpha\Bigg\} + \beta[v_1 + v_2],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[A_{0,i}^{(2)}(v)v_1v_2, v_3] = [R_i^{(2)}(v)v_1v_2, v_3] + \frac{1}{2^p}\sum_{\alpha}\Bigg\{&\Bigg(\frac{\partial k_{0,i}(v, \partial_{\alpha_i}v)}{\partial\eta_0}\partial_{\alpha_i}v_2, v_3 + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 k_{0,i}(v, \partial_{\alpha_i}v)}{\partial\eta_0\partial\eta_1}(v_1\partial_{\alpha_i}v_2 + v_2\partial_{\alpha_i}v_1)v_3\right)_\alpha + \left(\frac{\partial^2 k_{0,i}(v, \partial_{\alpha_i}v)}{\partial\eta_1^2}\partial_{\alpha_i}v_1\partial_{\alpha_i}v_2, v_3\right)_\alpha\Bigg\},\end{aligned}$$

$$[A_{1,i}'(v)v_1, v_2] = \frac{1}{2^p}\sum_{\alpha}\left\{\left(\frac{\partial k_{1,i}(v, \partial_{\alpha_i}v)}{\partial\eta_0}v_1, v_2\right)_\alpha + \left(\frac{\partial k_{1,i}(v, \partial_{\alpha_i}v)}{\partial\eta_1}\partial_{\alpha_i}v_1, v_2\right)_\alpha\right\} - \beta[v_1, v_2],$$

$$[B_i'(v)v_1, v_2] = [A_{0,i}'(v)v_1, v_2] - [R_i'(v)v_1, v_2].$$

Симметрия производной оператора $A_{0,i}$ очевидна. Ясно, что в силу гладкости коэффициентов k_i, условий (26), (27) при малых шагах пространственной сетки h_i имеет место

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1} k_i(v, \partial_{\alpha_i} v) \geq \nu_0 > 0.$$

Вновь, принимая во внимание (27) и используя предположение о гладкости исходных данных и решения u, имеем равномерную ограниченность относительно h_i, τ во всех точках сетки величин $|v|$, $|\partial_{\alpha_i} v|$, а также производных от коэффициентов k_i, $k_{0,i}$ с аргументами $(v, \partial_{\alpha_i} v)$. Учитывая это, нетрудно указать значение параметра β, обеспечивающего положительную определенность оператора $A_0'(v)$ и выполнение неравенства (5) с $d_0 = \nu_0/2$. Аналогичные соображения, использующие также гладкость коэффициентов $k_{1,i}$ позволяют определить постоянные d_1, d_2, d_3, при которых выполнены неравенства (6)–(8).

Проверку условия (9) проведем с использованием неравенства Коши–Буняковского и теорем вложения сеточных пространств $L_2(\omega_h)$ в $C(\omega_h)$. В результате получим значение $d_4(h, \tau) = h^{-p/2} \overline{d}_4$ с постоянной $\overline{d}_4 > 0$, определяемой максимальными значениями вторых производных коэффициентов k_i, $k_{0,i}$ уравнения (24) в $ch^{\varkappa}$-окрестности аргументов вида $(u, \partial u/\partial x_i)$.

Учитывая полученную выше зависимость $d_4(h, \tau)$ от h, а также выбор функции $\delta(h, \tau)$, имеем $\delta d_4(h, \tau) \sim h^{\varkappa}$. Отсюда заключаем, что при достаточно малых шагах сетки второе из условий (10) выполнено. Таким образом, при $\nu > 0$ условия теоремы выполнены, и следовательно, разностная схема (23) $(\mathbf{u}, \delta)$-корректна.

При сделанных предположениях о гладкости решения и исходных данных задачи (24), (25) компоненты погрешности аппроксимации ψ_α уравнений в соответствующих сеточных нормах $\|\cdot\|_\alpha$ имеют порядок малости $O(\tau + |h|^2)$. Таким образом, функционал $J(\Psi(\mathbf{u}))$ также имеет порядок малости $O(\tau + |h|^2)$.

Полагая $\tau \leq c_1 |h^\theta|$ с $c_1 = \mathrm{const} > 0$ и $\theta > \varkappa_p$, при достаточно малом h_0 и $|h| \leq h_0$ имеем $J(\Psi(\mathbf{u})) \leq \delta$. Отсюда в силу $(\mathbf{u}, \delta)$-корректности разностной схемы (23) следует существование и единственность ее решения в δ-окрестности $\mathbf{u}$, решения исходной дифференциальной задачи, а в силу (21) и справедливость оценки погрешности

$$\max_{t \in \overline{\omega}_\tau} \|w(t) - v(t)\| + \max_{t \in \overline{\omega}_\tau} \max_{\alpha = \overline{1,p}} \|y_\alpha(t) - u(t)\|_\alpha = O(\tau + |h|^2).$$

Литература

1. Абрашин В.Н. *Об одном варианте метода переменных направлений решения многомерных задач математической физики.* 1 // Дифференц. уравнения. – 1990. – № 7. – С. 314– 323.
2. Абрашин В.Н., Муха В.А. *Об одном классе экономичных разностных схем решения многомерных задач математической физики.* 1 // Дифференц. уравнения. – 1992. – № 10. – С. 1786–1799.
3. Асмолик В.А. *Об одном классе локально-одномерных схем решения многомерных гиперболических уравнений второго порядка произвольной размерности* // Дифференц. уравнения. – 1996. – № 12. – С. 1678–1682.
4. Вабищевич П.Н. *Векторные аддитивные разностные схемы для эволюционных уравнений первого порядка* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1996. – № 3. – С. 44– 51.
5. Абрашин В.Н. *Об устойчивости разностных схем многокомпонентного метода переменных направлений для параболических уравнений и систем* // Дифференц. уравнения. – 1999. – № 2. – С. 212– 224.
6. Зайцева С.Б., Злотник А.А. *Анализ погрешности векторных методов расщепления для уравнения теплопроводности на классах негладких данных* // Докл. РАН. – 1999. – Т. 366. – № 5. – С. 590–594.
7. Зайцева С.Б., Злотник А.А. *Точные оценки погрешности векторных методов расщепления для уравнения теплопроводности* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39. – № 3. – С. 472–491.

8. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Гулин А.В. *Устойчивость операторно-разностных схем* // Дифференц. уравнения. – 1999. – № 2. – С. 152–187.
9. Федотов Е.М. *Корректность многокомпонентных двухслойных нелинейных операторно-разностных схем* // Исслед. по прикл. матем. и информатике. – Казань: Изд-во Казанск. матем. о-ва, 2001. – С. 122–134.
10. Самарский А.А. *Введение в теорию разностных схем.* – М.: Наука, 1971. – 552 с.
11. Ляшко А.Д., Карчевский М.М. *Разностные схемы для нелинейных задач математической физики.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1976. – 157 с.
12. Федотов Е.М. *Об одном классе двухслойных нелинейных операторно-разностных схем с весами* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 4. – С. 96–103.
13. Федотов Е.М. *Разностные схемы для нелинейных нестационарных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1990. – 88 с.
14. Самарский А.А., Андреев В.Б. *Разностные методы для эллиптических уравнений.* – М.: Наука, 1976. – 352 с.

Казанский государственный университет

Поступила
01.10.2005