ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 3 (466)

УДК 514.763

А. МАГДЕН, А.А. САЛИМОВ

ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ ЛИФТЫ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ НА СЕЧЕНИЯ ТЕНЗОРНОГО РАССЛОЕНИЯ

1. Введение

Пусть M_n есть n-мерное дифференцируемое многообразие класса C^∞, и пусть $T_q^p(M_n)$, $p+q>0$, есть расслоение тензоров типа (p,q) на M_n. Цель данной статьи — изучение горизонтальных лифтов тензорных полей с многообразия M_n на его тензорное расслоение $T_q^p(M_n)$, рассматриваемых вдоль сечений этого расслоения. Применяемый нами метод с использованием оператора Вишневского является новым.

Введем обозначения.

1. $\pi : T_q^p(M_n) \to M_n$ — проекция пространства $T_q^p(M_n)$ на M_n.

2. Область изменения индексов $i,\ j,\ k$ — $1,\dots,n$, индексов $\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}$ — $n+1,\dots,n+n^{p+q}$, индексов $I=(i,\overline{i})$, $J=(j,\overline{j})$, $K=(k,\overline{k})$ — $1,\dots,n+n^{p+q}$.

3. $\mathcal{F}(M_n)$ — кольцо вещественнозначных функций класса C^∞ на M_n. $\mathcal{T}_q^p(M_n)$ — бесконечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ тензорных полей типа (p,q), имеющих класс гладкости C^∞. Мы также будем рассматривать $\mathcal{T}_q^p(M_n)$ как модуль над кольцом $\mathcal{F}(M_n)$.

4. Векторные поля на M_n будем обозначать через $V,W,\dots$ Тензорное поле типа $(1,1)$ будем обозначать через φ.

2. Горизонтальные лифты векторных полей на сечения

Обозначим через x^j локальные координаты, заданные в окрестности $U\subset M_n$, и пусть $x^{\overline{j}} \stackrel{\text{def}}{=} t_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}$ — индуцированные координаты на $\pi^{-1}(U)\subset T_q^p(M_n)$.

Тензорное поле $\alpha\in\mathcal{T}_p^q(M_n)$ с помощью свертки определяет функцию на $T_q^p(M_n)$, которую будем обозначать через $i\alpha$. В локальных координатах, если $\alpha=\alpha_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}\partial_{j_1}\otimes\dots\otimes\partial_{j_q}\otimes dx^{i_1}\otimes\dots\otimes dx^{i_p}$, то $i\alpha(t)=\alpha_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}t_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}$ для любого $t\in\mathcal{T}_q^p(M_n)$.

Пусть $A\in\mathcal{T}_q^p(M_n)$. Зададим вертикальный лифт ${}^VA\in\mathcal{T}_0^1(T_q^p(M_n))$ поля A на $T_q^p(M_n)$ (см. [1]) условием ${}^VA(i\alpha)=\alpha(A)\circ\pi={}^V(\alpha(A))$, где ${}^V(\alpha(A))$ — вертикальный лифт функции $\alpha(A)\in\mathcal{F}(M_n)$. В карте $(x^j,x^{\overline{j}})$ вертикальный лифт ${}^VA$ поля A на $T_q^p(M_n)$ имеет координаты

$$ {}^VA=\begin{pmatrix} {}^VA^j \\ {}^VA^{\overline{j}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ A_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p} \end{pmatrix}. $$

Пусть на M_n задана аффинная связность ∇ без кручения. Пусть ∇_V — ковариантное дифференцирование в направлении $V\in\mathcal{T}_0^1(M_n)$. Зададим горизонтальный лифт ${}^HV=\overline{\nabla}_X$ векторного поля V на $T_q^p(M_n)$ [1] условием ${}^HV(i\alpha)=i(\nabla_V\alpha)$, $\alpha\in\mathcal{T}_p^q(M_n)$. В карте $(x^k,x^{\overline{k}})$ компоненты ${}^HV$ имеют вид

$$ {}^HV^k=V^k,\quad {}^HV^{\overline{k}}=V^m\Big(\sum_{\mu=1}^{q}\Gamma_{mk_\mu}^{s}t_{k_1\dots s\dots k_q}^{l_1\dots l_p}-\sum_{\lambda=1}^{p}\Gamma_{ms}^{l_\lambda}t_{k_1\dots k_q}^{l_1\dots s\dots l_p}\Big), $$

где Γ_{ij}^k — компоненты связности ∇ относительно локальных координат на $U\subset M_n$.

Пусть задано тензорное поле $\xi \in \mathcal{T}^p_q(M_n)$. Тогда соответствие $X \to \xi_X$, где ξ_X есть значение ξ в $X \in M_n$, определяет отображение $\sigma_\xi : M_n \to T^p_q(M_n)$ такое, что $\pi \circ \sigma_\xi = \mathrm{id}_{M_n}$, и n-мерное подмногообразие $\sigma_\xi(M_n)$ называется сечением, заданным с помощью ξ. Если тензорное поле ξ имеет локальные компоненты $\xi^{l_1\ldots l_p}_{k_1\ldots k_q}(x^k)$, то сечение $\sigma_\xi(M_n)$ локально задается уравнениями $x^k = x^k$, $x^{\overline{k}} = \xi^{l_1\ldots l_p}_{k_1\ldots k_q}(x^k)$ в системе координат $(x^k, x^{\overline{k}})$ в $T^p_q(M_n)$. Ясно, что n векторов B_j, касательных к $\sigma_\xi(M_n)$, имеют координаты

$$(B^K_j) = \left(\frac{\partial x^K}{\partial x^j}\right) = \begin{pmatrix} \delta^k_j \\ \partial_j \xi^{l_1\ldots l_p}_{k_1\ldots k_q} \end{pmatrix}$$

относительно натурального репера $(\partial_k, \partial_{\overline{k}})$ в $T^p_q(M_n)$.

С другой стороны, слой локально задается уравнениями $x^k = \mathrm{const}$, $t^{l_1\ldots l_p}_{k_1\ldots k_q} = u^{l_1\ldots l_p}_{k_1\ldots k_q}$, где $u^{l_1\ldots l_p}_{k_1\ldots k_q}$ — параметры. Поэтому, дифференцируя по $x^{\overline{j}} = t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$, получаем координаты

$$(C^K_{\overline{j}}) = \left(\frac{\partial x^K}{\partial x^{\overline{j}}}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta^{l_1}_{i_1} \ldots \delta^{l_p}_{i_p} \delta^{j_1}_{k_1} \ldots \delta^{j_q}_{k_q} \end{pmatrix}$$

n^{p+q} векторов $C_{\overline{j}}$, касательных к слою, относительно натурального репера $\{\partial_k, \partial_{\overline{k}}\}$ в $T^p_q(M_n)$.

Теперь можно взять $n + n^{p+q}$ векторных полей B_j, $C_{\overline{j}}$ вдоль сечения $\sigma_\xi(M_n)$. Они образуют локальное поле репера, который называется (B, C)-репером на $\sigma_\xi(M_n)$ в $\pi^{-1}(U)$. В этом репере векторное поле ${}^HV$, ограниченное на $\sigma_\xi(M_n)$, имеет координаты

$${}^HV = \begin{pmatrix} {}^H\widetilde{V}^j \\ {}^H\widetilde{V}^{\overline{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^j \\ -\nabla_V \xi^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \end{pmatrix}.$$

3. Горизонтальные лифты аффинорных полей на сечения

Для $\varphi \in \mathcal{T}^1_1(M_n)$ определим тензорное поле ${}^H\varphi \in \mathcal{T}^1_1(T^p_q(M_n))$, $p+q \geq 1$, вдоль сечения $\sigma_\xi(M_n)$ условиями

$$\begin{cases} {}^H\varphi({}^HV) = {}^H(\varphi(V)) & \forall V \in \mathcal{T}^1_0(M_n); \\ {}^H\varphi({}^VA) = {}^V(\varphi(A)) & \forall A \in \mathcal{T}^p_q(M_n), \end{cases}$$

где $\varphi(A) = C(\varphi \otimes A) \in \mathcal{T}^p_q(M_n)$, и назовем ${}^H\varphi$ горизонтальным лифтом поля $\varphi \in \mathcal{T}^1_0(M_n)$ на $T^p_q(M_n)$ вдоль сечения $\sigma_\xi(M_n)$.

Пусть $\xi \in \mathcal{T}^p_q(M_n)$. Рассмотрим оператор Вишневского

$$(\Phi_\varphi \xi)^{l_1\ldots l_p}_{lk_1\ldots k_q} = \varphi^m_l \nabla_m \xi^{l_1\ldots l_p}_{k_1\ldots k_q} - \begin{cases} \varphi^{l_1}_m \nabla_l \xi^{ml_2\ldots l_p}_{k_1\ldots k_q}, & p \geq 1; \\ \varphi^m_{k_1} \nabla_l \xi^{l_1\ldots l_p}_{mk_2\ldots k_q}, & q \geq 1. \end{cases}$$

Замечание. Пусть φ — интегрируемая φ-структура на M_n, и $\nabla\varphi = 0$. Если $\xi \in \mathcal{T}^p_q(M_n)$ — чистое тензорное поле относительно φ-структуры, то уравнение $\Phi_\varphi \xi = 0$ задает условие голоморфности ξ ([2], с. 184).

Поле ${}^H\varphi$ имеет вдоль сечения $\sigma_\xi(M_n)$ компоненты

$$\begin{cases} {}^H\widetilde{\varphi}^k_l = \varphi^k_l, \quad {}^H\widetilde{\varphi}^k_{\overline{l}} = 0, \quad {}^H\widetilde{\varphi}^{\overline{k}}_l = -(\Phi_\varphi \xi)^{l_1\ldots l_p}_{lk_1\ldots k_q}, \\ {}^H\widetilde{\varphi}^{\overline{k}}_{\overline{l}} = \begin{cases} \varphi^{l_1}_{s_1} \delta^{l_2}_{s_2} \ldots \delta^{l_p}_{s_p} \delta^{r_1}_{k_1} \ldots \delta^{r_q}_{k_q}, & p \geq 1; \\ \delta^{l_1}_{s_1} \ldots \delta^{l_p}_{s_p} \varphi^{r_1}_{k_1} \delta^{r_2}_{k_2} \ldots \delta^{r_q}_{k_q}, & q \geq 1, \end{cases} \end{cases}$$

относительно (B, C)-репера вдоль $\sigma_\xi(M_n)$, где $\Phi_\varphi \xi$ — оператор Вишневского,

$$x^{\overline{l}} = t^{s_1\ldots s_p}_{r_1\ldots r_q}, \quad x^{\overline{k}} = t^{l_1\ldots l_p}_{k_1\ldots k_q}.$$

В натуральном репере $\{\partial_k, \partial_{\overline{k}}\}$, заданном на $\pi^{-1}(U) \subset T^p_q(M_n)$, поле ${}^H\varphi$ имеет вдоль сечения $\sigma_\xi(M_n)$ компоненты

$$\left\{\begin{aligned} &{}^H\varphi^k_l = \varphi^k_l, \quad {}^H\varphi^k_{\overline{l}} = 0, \quad {}^H\varphi^{\overline{k}}_{\overline{l}} = \begin{cases} \varphi^{l_1}_{s_1}\delta^{l_2}_{s_2}\dots\delta^{l_p}_{s_p}\delta^{r_1}_{k_1}\dots\delta^{r_q}_{k_q}, & p \ge 1; \\ \delta^{l_1}_{s_1}\dots\delta^{l_p}_{s_p}\varphi^{r_1}_{k_1}\delta^{r_2}_{k_2}\dots\delta^{r_q}_{k_q}, & q \ge 1, \end{cases} \\ &{}^H\varphi^{\overline{k}}_l = \varphi^m_l\Big(-\sum_{\lambda=1}^{p}\Gamma^{l_\lambda}_{ms}\xi^{l_1\dots s\dots l_p}_{(k)} + \sum_{\mu=1}^{q}\Gamma^s_{mk_\mu}\xi^{(l)}_{k_1\dots s\dots k_q}\Big) + \varphi^{l_1}_m\Big(-\sum_{\mu=1}^{q}\Gamma^s_{lk_\mu}\xi^{ml_2\dots l_p}_{k_1\dots s\dots k_q} + \\ &\qquad + \sum_{\lambda=2}^{p}\Gamma^{l_\lambda}_{ls}\xi^{ml_2\dots s\dots l_p}_{(k)} + \Gamma^m_{ls}\xi^{s\dots l_p}_{(k)}\Big), \quad p \ge 1, \\ &{}^H\varphi^{\overline{k}}_l = \varphi^m_l\Big(-\sum_{\lambda=1}^{p}\Gamma^{l_\lambda}_{ms}\xi^{l_1\dots s\dots l_p}_{(k)} + \sum_{\mu=1}^{q}\Gamma^s_{mk_\mu}\xi^{(l)}_{k_1\dots s\dots k_q}\Big) + \varphi^m_{k_1}\Big(\sum_{\lambda=1}^{p}\Gamma^{l_\lambda}_{ls}\xi^{l_1\dots s\dots l_p}_{mk_2\dots s\dots k_q} - \\ &\qquad - \sum_{\mu=2}^{q}\Gamma^s_{lk_\mu}\xi^{(l)}_{mk_2\dots s\dots k_q} - \Gamma^s_{lm}\xi^{(l)}_{m\dots k_q}\Big), \quad q \ge 1. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Теорема 1. *Горизонтальный лифт* ${}^H : \operatorname{End} M_n \to \operatorname{End} T^p_q(M_n)$ *вдоль сечения* $\sigma_\xi(M_n)$ *есть мономорфизм.*

Пусть $\mathfrak{U}_m$ — ассоциативная коммутативная унитальная алгебра конечной размерности m над $\mathbb{R}$. Алгебраическая П-структура на M_n — это набор $\Pi = \{\underset{\alpha}{\varphi}\}$, $\alpha = 1, \dots, m$, тензорных полей типа $(1,1)$ такой, что $\underset{\alpha}{\varphi} \circ \underset{\beta}{\varphi} = C^\gamma_{\alpha\beta}\underset{\gamma}{\varphi}$, где $C^\gamma_{\alpha\beta}$ — структурные константы алгебры $\mathfrak{U}_m$.

Теорема 2. *Если* $\Pi = \{\underset{\alpha}{\varphi}\}$, $\alpha = 1, \dots, m$, *определяет алгебраическую* П*-структуру на* M_n, *то набор* ${}^H\Pi = \{{}^H\underset{\alpha}{\varphi}\}$ *также определяет алгебраическую* П*-структуру вдоль сечения* $\sigma_\xi(M_n)$.

4. Новый класс квази-$\mathfrak{U}_m$-голоморфных тензорных полей

Пусть M_n и N_m — многообразия, наделенные алгебраическими структурами $\Pi = \{\underset{\alpha}{\varphi}\}$ и $\widetilde{\Pi} = \{\underset{\alpha}{\psi}\}$, $\alpha = 1, \dots, m$, соответственно. Дифференцируемое отображение $f : M_n \to N_m$ называется квази-$\mathfrak{U}$-голоморфным относительно $(\Pi, \widetilde{\Pi})$ [3], если в каждой точке $P \in M_n$

$$df_P \circ \underset{\alpha}{\varphi}_P = \underset{\alpha}{\psi}_{f(P)} \circ df_P, \quad \alpha = 1, \dots, m.$$

Теперь пусть $N_k = T^p_q(M_n)$, и рассмотрим отображение $\sigma^\Pi_\xi : M_n \to T^p_q(M_n)$, определяемое чистым относительно П-структуры тензорным полем $\xi \in \mathcal{T}^p_q(M_n)$. Если $\widetilde{\Pi} = \{\underset{\alpha}{\psi}\}$ — алгебраическая ${}^H\Pi$-структура, определенная в п. 3, то чистое сечение $\sigma^\Pi_\xi : M_n \to T^p_q(M_n)$ является квази-$\mathfrak{U}$-голоморфным относительно $(\Pi, {}^H\Pi)$ тогда и только тогда, когда в локальных координатах

$$\underset{\alpha}{\varphi}{}^m_l\,\partial_m x^K = {}^H\underset{\alpha}{\varphi}{}^K_M\,\partial_l x^M, \quad \alpha = 1, \dots, m, \tag{2}$$

где ${}^H\underset{\alpha}{\varphi}{}^K_M$ — компоненты поля ${}^H\underset{\alpha}{\varphi}$, заданного вдоль $\sigma^\Pi_\xi(M_n)$, в натуральном репере $\{\partial_k, \partial_{\overline{k}}\}$ (см. (1)). Условие (2) приводится к виду

$$\underset{\alpha}{\varphi}{}^m_l\nabla_m\xi^{l_1\dots l_p}_{k_1\dots k_q} - \begin{cases} \underset{\alpha}{\varphi}{}^{l_1}_m\nabla_l\xi^{ml_2\dots l_p}_{k_1\dots k_q}, & p \ge 1; \\ \underset{\alpha}{\varphi}{}^m_{k_1}\nabla_l\xi^{l_1\dots l_p}_{mk_2\dots k_q}, & q \ge 1, \end{cases} = 0. \tag{3}$$

Таким образом, квази-$\mathfrak{U}$-голоморфное тензорное поле относительно $(\Pi, {}^H\Pi)$ задается (3).

Пусть П-структура является почти интегрируемой относительно связности ∇ без кручения, т. е. $\nabla\varphi = 0$ для любого $\varphi \in \Pi$. Тогда получаем [4] $\Phi_\varphi\xi = \widetilde{\Phi}_\varphi\xi$, где $\widetilde{\Phi}_\varphi\xi$ — оператор Татибаны [5]. Уравнение $\widetilde{\Phi}_\varphi\xi = 0$ характеризует обычные почти голоморфные тензорные поля [5], [6].

Таким образом, если П-структура почти интегрируема, то наше квази-$\mathfrak{U}$-голоморфное тензорное поле относительно $(\Pi, {}^H\Pi)$ есть обычное почти голоморфное тензорное поле. Вообще говоря, квази-$\mathfrak{U}$-голоморфное тензорное поле относительно $(\Pi, {}^H\Pi)$, удовлетворяющее (3), не обязано удовлетворять уравнению $\widetilde{\Phi}_{\varphi}\xi = 0$.

Литература

1. Ledger A., Yano K. *Almost complex structures on tensor bundles* // J. Diff. Geom. – 1967. – № 1. – P. 355–368.
2. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. *Пространства над алгебрами.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. – 262 с.
3. Салимов А.А. *Почти ψ-голоморфные тензоры и их свойства* // Докл. РАН. – 1992. – Т. 324. – № 3. – С. 533–536.
4. Salimov A.A. *The generalized Yano–Ako operator and complete lift of the tensor fields* // Tensor, N. S. – 1994. – V. 55. – № 2. – P. 142–146.
5. Tachibana S. *Analytic tensor and its generalization* // Tohoku Math. J. – 1960. – V. 12. – № 2. – P. 208–221.
6. Кручкович Г.И. *Гиперкомплексные структуры на многообразиях.* I // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу и их прилож. – 1972. – Вып. 16. – С. 174–201.

Университет "Ататюрк"
(*г. Арзурум, Турция*)

Поступили
полный текст 05.12.1997
краткое сообщение 23.11.1999