ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 9 (532)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.44

Т.В. ЕЛИСЕЕВА

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СТРУКТУРЕ ВОЛНОВОГО И ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЕЙ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В работе применяется метод операторов преобразований для решения некоторых краевых задач кусочно-однородных структур. Показана возможность применения данного метода для решения обобщенных задач Дирихле с неоднородными граничными условиями для уравнения Лапласа, уравнений теплопроводности и колебаний для кусочно-однородной полуплоскости.

Актуальность метода операторов преобразования в том, что он позволяет получить решение в удобном виде, допускающем простую физическую интерпретацию: последовательные приближения с помощью отражения от двух экранов. Вид, в котором получено решение, позволяет написать удобные вычислительные алгоритмы.

1. Операторы преобразований

Пусть функция $\widehat{u}=\widehat{u}(x,y)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^k(D)$ (в задачах I, II, IV $k=1$, в задаче III $k=2$), а функция $u=u(x,y)$ — пространству $W_2^2(D_1)$, где $D=\{(x,y)\mid x\in(0;+\infty);\ y\in(-\infty;+\infty)\}$, $D_1=\{(x,y)\mid x\in(0;l)\cup(l;+\infty);\ y\in(-\infty;+\infty)\}$.

I. Пусть функция $u=u(x,y)$ удовлетворяет граничному условию

$$u(0,y)=\widehat{u}(0,y)$$

и условиям сопряжения

$$u_-(l,y)=u_+(l,y),\quad k\frac{\partial u_-}{\partial x}(l,y)=\frac{\partial u_+}{\partial x}(l,y),\quad k>0,$$

где $u_-(l,y)$, $u_+(l,y)$, $\frac{\partial u_-}{\partial x}(l,y)$, $\frac{\partial u_+}{\partial x}(l,y)$ — предельные значения функции $u=u(x,y)$ и ее производных при $x=l$ слева и справа соответственно [1].

Представление для функции $u=u(x,y)$ ищется в виде

$$u(x,y)=\begin{cases} a\widehat{u}(x,y)+bS[\widehat{u}(x,y)], & 0<x<l;\\ c\widehat{u}(x,y), & x>l,\end{cases}$$

где $S[\widehat{u}(x,y)]=\widehat{u}(2l-x,y)$ — оператор отражения относительно точки сопряжения, a, b, c — операторы, которые определяются из граничных условий и условий сопряжения.

Получен оператор пребразования $\Pi:\widehat{u}(x,y)\to u(x,y)$

$$u(x,y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\frac{1-k}{1+k}\Big)^i\Big(\widehat{u}(x+2li,y)-\frac{1-k}{1+k}\widehat{u}(2l-x+2li,y)\Big), & 0<x<l;\\ \displaystyle\frac{2k}{1+k}\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\frac{1-k}{1+k}\Big)^i\widehat{u}(x+2li,y), \quad x>l. \end{cases}$$

Так как $\widehat{u} = \widehat{u}(x,y)$ — ограниченная функция, и $\left|\frac{1-k}{1+k}\right| < 1$, то полученные ряды сходятся абсолютно, равномерно.

II. Пусть функция $u = u(x,y)$ удовлетворяет граничному условию

$$u(0,y) = 0$$

и условиям сопряжения

$$u_-(l,y) - u_+(l,y) = \widehat{u}(0,y), \quad k\frac{\partial u_-}{\partial x}(l,y) = \frac{\partial u_+}{\partial x}(l,y),$$

где $k \in (0;1) \cup (1;+\infty)$.

Построен оператор преобразования $\Pi : \widehat{u}(x,y) \to u(x,y)$

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+k}\widehat{u}(l-x,y) - \dfrac{1}{1-k}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^i \times \\ \quad \times\left[\widehat{u}(x-l+2li,y) - \dfrac{1-k}{1+k}\widehat{u}(l-x+2li,y)\right], \quad 0<x<l; \\ -\dfrac{k}{1+k}\widehat{u}(x-l,y) - \dfrac{2k}{1-k^2}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^i\widehat{u}(x-l+2li,y), \quad x>l. \end{cases}$$

Так как $\widehat{u} = \widehat{u}(x,y)$ — ограниченная функция, и $\left|\frac{1-k}{1+k}\right| < 1$, то полученные ряды сходятся абсолютно, равномерно.

III. Пусть функция $u = u(x,y)$ удовлетворяет граничному условию

$$u(0,y) = 0, \tag{1}$$

и условиям сопряжения

$$u_-(l,y) = u_+(l,y), \quad k\frac{\partial u_-}{\partial x}(l,y) - \frac{\partial u_+}{\partial x}(l,y) = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x}(l,y), \quad k>0. \tag{2}$$

Оператор преобразования $\Pi : \widehat{u}(x,y) \to u(x,y)$ имеет вид

$$u(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{1+k}\widehat{u}(2l-x,y) + \dfrac{1}{1-k}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^i \times \\ \quad \times\left[\widehat{u}(x+2li,y) - \dfrac{1-k}{1+k}\widehat{u}(2l-x+2li,y)\right], \quad 0<x<l; \\ -\dfrac{1}{1+k}\widehat{u}(x,y) + \dfrac{2k}{1-k^2}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^i\widehat{u}(x+2li,y), \quad x>l. \end{cases} \tag{3}$$

Так как $\widehat{u} = \widehat{u}(x,y)$ — ограниченная функция, и $\left|\frac{1-k}{1+k}\right| < 1$, то полученные ряды сходятся абсолютно, равномерно.

Вычисления показывают, что оператор преобразования Π^{-1}, обратный оператору (3), имеет вид

$$\widehat{u}(x,y) = \Pi^{-1}[u(x,y)] = \begin{cases} (1-k)\left(E - 2S - \dfrac{1+3k}{1+k}\sum\limits_{i=1}^{\infty}T_{2l}^i S\right)\left(E - \dfrac{1-k}{1+k}T_{2l}\right)u(x,y), \quad 0<x<l; \\ (k-1)u(x,y) - 2k\sum\limits_{i=0}^{\infty}u(x+2li,y), \quad x>l, \end{cases}$$

где $T_{2l}[\widehat{u}(x,y)] = \widehat{u}(2+2l,y)$ — оператор сдвига, E — тождественный оператор.

IV. Пусть функция $u = u(x,y)$ удовлетворяет граничному условию

$$u(0,y) + au_-(l,y) = \widehat{u}(0,y), \quad 0<a<1,$$

и условиям сопряжения

$$bu_-(l,y) = u_+(l,y), \quad c\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) + d\frac{\partial u_-}{\partial x}(l,y) = \frac{\partial u_+}{\partial x}(l,y),$$

где $b, c, d > 0$, причем $c + ad < \min(b, d + ac)$ [2].

Получено представление для оператора преобразования $\Pi : \widehat{u}(x,y) \to u(x,y)$

$$u(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{i,j=0}^{\infty} \dfrac{(i+j+1)!}{i!j!}\Big(-\dfrac{2(c+ad)}{b+d+ac}\Big)^{i+1}\Big(\dfrac{b-d-ac}{b+d+ac}\Big)^{j} \times \\ \quad \times (c\widehat{u}(x+l(i+1)+2lj,y) + (b+d)\widehat{u}(x+li+2lj,y) + \\ \quad\quad + c\widehat{u}(l-x+li+2lj,y) + (d-b)\widehat{u}(2l-x+li+2lj,y)), \quad 0 < x < l; \\ \sum\limits_{i,j=0}^{\infty} \dfrac{(i+j+1)!}{i!j!}\Big(-\dfrac{2(c+ad)}{b+d+ac}\Big)^{i+1}\Big(\dfrac{b-d-ac}{b+d+ac}\Big)^{j} \times \\ \quad \times (bc\widehat{u}(x+l(i+1)+2lj,y) + 2bd\widehat{u}(x+li+2lj,y) - \\ \quad\quad - bc\widehat{u}(x-l+li+2lj,y)), \quad x > l. \end{cases}$$

Так как $\widehat{u} = \widehat{u}(x,y)$ — ограниченная функция, и $c + ad < \min(b, d + ac)$, то полученные ряды сходятся абсолютно, равномерно.

Для всех операторов преобразования, приведенных выше, построены обратные операторы.

Теорема. *Оператор преобразования* Π*, определяемый в задачах* I, II, IV*, осуществляет изоморфизм пространств* $W_2^1(D)$ *и* $W_2^2(D_1)$*; оператор преобразования* Π*, определяемый в задаче* III*, осуществляет изоморфизм пространств* $W_2^2(D)$ *и* $W_2^2(D_1)$*.*

2. Применение операторов преобразований к решению задач математической физики

Определенные выше операторы преобразования позволяют решать некоторые задачи математической физики кусочно-однородных сред. В качестве примера рассмотрим задачу для уравнения Лапласа и задачу о структуре температурного поля в кусочно-однородной области.

а) Найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta u(x,y) = 0$$

в области $D_1 = \{(x,y) \mid x \in (0;l) \cup (l;+\infty);\ y \in (-\infty;+\infty)\}$ по граничному условию

$$u(0,y) = v_1(y)$$

и условиям сопряжения

$$u_-(l,y) - u_+(l,y) = v_2(y), \quad k\frac{\partial u_-}{\partial x}(l,y) = \frac{\partial u_+}{\partial x}(l,y), \quad k \in (0;1) \cup (1;+\infty),$$

где $v_1(y), v_2(y) \in L_2(-\infty,+\infty)$. Решение поставленной задачи имеет вид

$$u(x,y) = \Pi[P(v_1)] + L[P(v_2)],$$

где $P(v)$ — интеграл Пуассона, Π — оператор преобразования, определяемый в задаче I, L — оператор преобразования, соответствующий задаче II.

б) Требуется найти ограниченное решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

в области $\Omega_T^1 = \{(x,t) \mid x \in (0,l) \cup (l,+\infty);\ t \in (0,T)\}$ по граничному условию

$$u(0,t) = g(t),$$

условиям сопряжения

$$u_-(l,t)=u_+(l,t),\quad k\frac{\partial u_-}{\partial x}(l,t)-\frac{\partial u_+}{\partial x}(l,t)=\frac{\partial h}{\partial x}(l,t),\quad k>0,$$

и по начальному условию

$$u(x,0)=f(x),$$

где $u(x,t)\in W_2^{2,0}(\Omega_T^1)$, $h(x,t)\in W_2^{2,0}(\Omega_T)$, $g(t)\in L_2(0,T)$, $f(x)\in L_2(I_1^+)$, где $\Omega_T=\{(x,t)\mid x\in(0,+\infty);\ t\in(0,T)\}$, $I_1^+=\{x\mid x\in(0,l)\cup(l,+\infty)\}$.

Решение задачи получим с помощью операторов преобразований Π и Π^{-1}, соответствующих задаче (1)–(2). Применив операторы Π^{-1} к поставленной задаче, приведем ее к задаче для однородной области Ω: *найти ограниченное решение уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

в области Ω *по граничному условию* $h(0,t)=g(t)$ *и по начальному условию*

$$h(x,0)=\Pi^{-1}[f(x)]=\widehat{f}(x).$$

Решение задачи имеет вид ([3], с. 234):

$$h(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Big[\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{t}}\Big(e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4t}}-e^{-\frac{(x+\eta)^2}{4t}}\Big)\widehat{f}(\eta)\mathrm{d}\eta+\int_0^t\frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}g(\tau)\mathrm{d}\tau\Big].$$

Применим к $h=h(x,t)$ оператор Π:

$$u(x,t)=\Pi[h(x,t)],$$

$$u(x,t)=\Pi_x\Big[\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Big(\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{t}}\Big(e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4t}}-e^{-\frac{(x+\eta)^2}{4t}}\Big)\Pi_\eta^{-1}[f(\eta)]\mathrm{d}\eta+\int_0^t\frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}g(\tau)\mathrm{d}\tau\Big)\Big].$$

В результате определена структура нестационарного температурного поля в Ω_T^1.

Операторы преобразования, полученные в работе, позволяют также решать задачи о структуре волнового поля в кусочно-однородном полупространстве.

Литература

1. Елисеева Т.В. *Задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями* // Комплексный анализ и математическая физика. Сб. науч. тр., посвященный 100-летию со дня рождения профессора А.А. Темлякова. – М., 2003. – С. 136–142.
2. Елисеева Т.В. *Операторный метод решения обобщенных задач сопряжения для уравнения Лапласа* // Вестн. молодых ученых ПГПУ им. В.Г. Белинского. – Пенза, 2003. – № 2. – С. 49–51.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1977. – 736 с.

Пензенский государственный университет

Поступила 26.12.2003