*Известия вузов. Математика* *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
*2016, № 9, с. 84–89* *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

*Краткое сообщение*

*А.М. КАМАЛУТДИНОВ, В.Н. ПАЙМУШИН*

# УТОЧНЕННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ УДЛИНЕННОЙ ПЛАСТИНЫ СТЕРЖНЕВОГО ТИПА

*Аннотация.* Для удлиненных пластин стержневого типа, исходя из предложенных ранее соотношений непротиворечивого варианта геометрически нелинейной теории упругости при малых деформациях, на основе использования уточненной сдвиговой модели С.П. Тимошенко выведены уточненные геометрически нелинейные уравнения движения. Такие уравнения позволяют описывать высокочастотные крутильные формы колебаний удлиненных пластин стержневого типа, формирующиеся в них при их изгибных колебаниях по низкочастотным формам. Путем предельного перехода к классической модели теории стержней проведено преобразование выведенных уравнений к упрощенной системе уравнений меньшего порядка.

*Ключевые слова*: удлиненная пластина стержневого типа, уравнения теории упругости, кинематические соотношения в квадратичном приближении, модель Тимошенко, геометрическая нелинейность, уравнения движения, классическая модель, упрощенные уравнения движения.

*УДК*: 531.121

Консольно закрепленные пластины стержневого типа, у которых толщина $h$ и ширина $b$ намного меньше ее длины $L$, используются, в частности, в качестве тест-образцов при теоретико-экспериментальном определении логарифмического декремента колебаний (ЛДК) материалов, являющегося параметром их внутреннего демпфирования [1]. Такой метод определения ЛДК материала на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов по первой основной моде с учетом аэродинамического демпфирования был предложен в работах [2]–[4]. При определении ЛДК материалов на основе исследования вынужденных колебаний тест-образцов по второй или третьей формам изгибных колебаний, наряду с фиксируемыми изгибными колебаниями, наблюдаются также и высокочастотные крутильные колебания, формирующие в окружающей среде звуковые волны. Теоретическое исследование таких изгибно-крутильных форм колебаний пластин рассматриваемого класса на основе известных уравнений движения теории среднего изгиба пластин и стержней невозможно из-за недостаточной степени их точности и содержательности. В связи с этим для корректного описания указанных механических эффектов в основу базовых уравнений

Поступила 01.02.2016

Благодарности. Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров и гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-00667).

движения положим использование соотношений непротиворечивого варианта геометрически нелинейной теории упругости при малых деформациях, предложенных и проанализированных ранее в серии работ [5], [6]. В соответствии с ними в прямоугольных декартовых координатах $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ для определения деформаций удлинений $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ и сдвигов $\gamma_{12}$, $\gamma_{13}$, $\gamma_{23}$ имеют место кинематические соотношения в неполном квадратичном приближении

$$\varepsilon_1 = E_{11} + \left(E_{12}^2 + E_{13}^2\right)/2, \ldots, \ \gamma_{12} = E_{12} + E_{21} + E_{13}E_{23}, \ldots, \ E_{\alpha\beta} = \partial u_\beta / \partial x^\alpha, \tag{1}$$

где $u_1 = U$, $u_2 = V$, $u_3 = W$ — компоненты вектора перемещений $\mathbf{u} = U\mathbf{e}_1 + V\mathbf{e}_2 + W\mathbf{m}$.

Для пластин рассматриваемого класса имеют место неравенства $b/L \ll 1, h/L \ll 1$, $h/b \sim 0.3 \div 0.06$, что позволяет отнести их к классу плоских стержней, закрепленных в сечении $x = 0$ и имеющих свободный край в сечении $x = L$. Поэтому, оставаясь в рамках принятой в теории стержней степени точности, для вектора перемещений $\mathbf{U}$ примем представление вида [7]

$$\begin{gathered} \mathbf{U} = (u + z\psi - y\chi)\,\mathbf{e}_1 + (v - z\varphi)\,\mathbf{e}_2 + (w + y\varphi)\,\mathbf{m}, \\ 0 \le x \le L, \quad -b/2 \le y \le b/2, \quad -h/2 \le z \le h/2, \end{gathered} \tag{2}$$

где $u$, $v$, $w$ — компоненты вектора перемещений точек осевой линии $0x$, $\varphi$, $\psi$, $\chi$ — компоненты вектора поворотов, соответствующие использованию сдвиговой модели типа Тимошенко в теории стержней.

В соответствии с принятым представлением (2) и соотношениями $E_{\alpha\beta} = \partial u_\beta / \partial x^\alpha$ получим

$$\begin{gathered} E_{11} = u' + z\psi' - y\chi', \quad E_{12} = v' - z\varphi', \quad E_{13} = w' + y\varphi', \\ E_{21} = -\chi, \quad E_{23} = \varphi, \quad E_{31} = \psi, \quad E_{32} = -\varphi, \quad E_{22} = E_{33} = 0, \end{gathered}$$

при использовании которых с точностью, принятой в теории тонких оболочек и стержней, соотношения (1) целесообразно составить в приближении

$$\varepsilon_1 = u' + \left[\left(v'\right)^2 + \left(w'\right)^2\right]/2 \ - y\left(\chi' - w'\varphi'\right) + z\left(\psi' - v'\varphi'\right), \tag{3}$$

$$\gamma_{12} = v' - \chi + w'\varphi - z\varphi', \quad \gamma_{13} = \psi + w' - v'\varphi + y\varphi', \tag{4}$$

$$\gamma_{23} \approx 0, \quad \varepsilon_2 \approx 0, \quad \varepsilon_3 \approx 0. \tag{5}$$

В соответствии с полученными соотношениями (3)–(5) вариация потенциальной энергии деформации будет равна

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \int_0^L \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{11}\delta\varepsilon_1 + \sigma_{12}\delta\gamma_{12} + \sigma_{13}\delta\gamma_{23})\,dx\,dy\,dz = \\ &= \int_0^L (Q_x\delta u' + Q_y^*\delta v' + Q_z^*\delta w' + M_y\delta\psi' + M_z\delta\chi' + Q_z\delta\psi - Q_y\delta\chi + M_x^*\delta\varphi' + N^*\delta\varphi)dx, \end{aligned} \tag{6}$$

где приняты обозначения

$$\begin{gathered} Q_y^* = Q_y + Q_x v' - Q_z\varphi - M_y\varphi', \quad Q_z^* = Q_z + Q_x w' + Q_y\varphi - M_z\varphi', \\ M_x^* = M_x - M_z w' - M_y v', \quad N^* = Q_y w' - Q_z v', \end{gathered}$$

и введены приведенные к осевой линии погонные внутренние усилия и моменты, определяемые в сечении $x = \mathrm{const}$ через напряжения $\sigma_{11}$, $\sigma_{12}$, $\sigma_{13}$ по формулам $\Big( \int\limits_{-b/2}^{b/2} \int\limits_{-h/2}^{h/2} (\cdots)dy\,dz =$

$\iint\limits_F (\cdots)dF\Big)$

$$Q_x = \iint_F \sigma_{11} dF, \quad Q_y = \iint_F \sigma_{12} dF, \quad Q_z = \iint_F \sigma_{13} dF,$$
$$M_y = \iint_F \sigma_{11} z dF, \quad M_z = -\iint_F \sigma_{11} y dF, \quad M_x = \iint_F (\sigma_{13} y - \sigma_{12} z) dF. \tag{7}$$

При $z = 0$ выражение (2) принимает вид

$$\mathbf{U}|_{z=0} = (u - y\chi)\,\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + (w + y\varphi)\,\mathbf{m}. \tag{8}$$

Считая далее, что действующая на рассматриваемое тело аэродинамическая нагрузка найдена в приближении $\mathbf{p}\,(x,y) = p\,(x,y)\,\mathbf{m}$, при использовании (8) для вариации работы внешних сил составим выражение

$$\delta A = \int_0^L \int_{-b/2}^{b/2} \mathbf{p}\delta\mathbf{U}|_{z=0} dx\, dy = \int_0^L (p\delta w + m_x \delta\varphi)\, dx, \tag{9}$$

где $P = \int\limits_{-b/2}^{b/2} p\,(x,y)\,dy$, $m_x = \int\limits_{-b/2}^{b/2} p\,(x,y)\,y\,dy$.

Используя далее представление (2), для вариации кинетической энергии рассматриваемого тела соответствующее выражение составим в приближении ($t$ — время)

$$\delta K = -\rho \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \delta\mathbf{U} dx\, dy\, dx = -\int_0^L [\rho hb\,(\ddot{u}\delta u + \ddot{v}\delta v + \ddot{w}\delta w) + \rho J_p \ddot{\varphi}\delta\varphi] dx, \tag{10}$$

где $\ddot{\varphi} = \partial^2\varphi/\partial t^2$, $\rho$ — плотность материала пластины, $J_p = \left(hb^3 + bh^3\right)/12$ — полярный момент инерции поперечного сечения.

Исходя из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского, при использовании составленных выражений (6), (9), (10) стандартным путем устанавливается система уравнений движения

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \rho bh \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial Q_y^*}{\partial x} - \rho bh \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial Q_z^*}{\partial x} + P - \rho bh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$
$$\frac{\partial M_y}{\partial x} - Q_z = 0, \quad \frac{\partial M_z}{\partial x} + Q_y = 0, \quad \frac{\partial M_x^*}{\partial x} - N^* + m_x - \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \tag{11}$$

для которых при $x = 0$ формулируются кинематические граничные условия

$$u = v = w = \psi = \chi = \varphi = 0,$$

а при $x = L$ — силовые граничные условия

$$Q_x = 0, \quad Q_y^* = 0, \quad Q_z^* = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0, \quad M_x^* = 0. \tag{12}$$

В дополнение к равенствам (5) примем статическую гипотезу теории тонких пластин и оболочек $\sigma_{33} = 0$, в соответствии с которой и равенством $\varepsilon_2 = 0$ для напряжений $\sigma_{11}$, $\sigma_{12}$, $\sigma_{13}$ в пределах линейно упругих деформаций при статическом деформировании будут иметь место физические соотношения ($E_* = E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21})$)

$$\sigma_{11} = E_* \varepsilon_1, \quad \sigma_{12} = G_{12}\gamma_{12}, \quad \sigma_{13} = G_{13}\gamma_{13}, \tag{13}$$

где $E_1$, $\nu_{12}$, $\nu_{21}$, $G_{12}$, $G_{13}$ — модуль упругости первого рода, коэффициенты Пуассона и модули поперечных сдвигов ортотропного материала.

При подстановке в составленные соотношения (13) выражений (3), (4) в соответствии с (7) имеем

$$\begin{gathered} Q_x = \widetilde{E}_* bh\left(u' + \frac{(v')^2}{2} + \frac{(w')^2}{2}\right), \quad Q_y = \widetilde{G}_{12} bh \left(v' - \chi + w'\varphi\right), \\ Q_z = \widetilde{G}_{13} bh \left(w' + \psi - v'\varphi\right), \quad M_y = D_y \left(\psi' - v'\varphi'\right), \\ M_z = D_z \left(\chi' - w'\varphi'\right), \quad M_x = B_p \varphi', \end{gathered} \tag{14}$$

где

$$B_p = \frac{\widetilde{G}_{13} hb^3 + \widetilde{G}_{12} bh^3}{12}, \quad D_y = \frac{\widetilde{E}_* bh^3}{12}, \quad D_z = \frac{\widetilde{E}_* hb^3}{12}. \tag{15}$$

Первая из формул (15), характеризующая жесткость поперечного сечения на кручение, требует введения поправочного коэффициента, зависящего от параметра $h/b$. При его введении для стержня из изотропного материала в случае $h/b \leq 0.3$ имеет место известная уточненная формула $B_p = Gbh^3/3$, где $G = G_{12} = G_{13}$.

Сдвиговые деформации $\gamma_{12}^0$, $\gamma_{13}^0$ в точках плоскостей $x0z$ и $x0y$ в соответствии с соотношениями (4) принимают вид

$$\gamma_{12}^0 = v' - \chi + w'\varphi, \quad \gamma_{13}^0 = \psi + w' - v'\varphi. \tag{16}$$

Введение гипотезы Бернулли, известной в классической теории стержней, требует принятия равенств $\gamma_{12}^0 = \gamma_{13}^0 = 0$. В соответствии с ними из (16) следует

$$\chi = v' + w'\varphi, \quad \psi = -w' + v'\varphi, \tag{17}$$

при использовании их соотношения (3), (4) преобразуются к виду

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 = u' + \frac{1}{2}\left[(v')^2 + (w')^2\right] - y\left(v'' + w''\varphi\right) - z\left(w'' - v''\varphi\right), \\ \gamma_{12} = -z\varphi', \qquad \gamma_{13} = y\varphi'. \end{gathered} \tag{18}$$

В силу установленных соотношений (18) для вычисления $\delta\Pi$ вместо (6) приходим к выражению

$$\delta\Pi = \int_0^L \left(Q_x \delta u' + Q_y^* \delta v' + Q_z^* \delta w' + M_z^* \delta v'' + M_y^* \delta w'' + M_x \delta\varphi' + N^* \delta\varphi\right) dx,$$

где

$$\begin{gathered} Q_y^* = Q_x v', \quad Q_z^* = Q_x w', \quad M_z^* = M_z - M_y \varphi, \quad M_y^* = M_y + M_z \varphi, \\ N^* = M_z w'' - M_y v'' \end{gathered}$$

и в отличие от (14),

$$M_y = -\iint_F \sigma_{11} z dF = D_y \left(w'' - \varphi v''\right), \quad M_z = -\iint_F \sigma_{11} y dF = D_z \left(v'' + \varphi w''\right).$$

Таким образом, использование (17) редуцирует систему шести уравнений движения (11) к системе четырех уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \rho bh \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial S_y^*}{\partial x} + \rho bh \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial S_z^*}{\partial x} - P + \rho bh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} - N^* + m_x - \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \end{gathered} \tag{19}$$

где

$$S_y^* = \frac{\partial M_z^*}{\partial x} - Q_x v', \quad S_z^* = \frac{\partial M_y^*}{\partial x} - Q_x w'.$$

Для составленных уравнений движения (19) в силу (17) в сечении $x = 0$ формулируются кинематические граничные условия

$$u = v = w = v' = w' = \varphi = 0,$$

а в сечении $x = L$ — силовые граничные условия

$$Q_x = 0, \quad S_y^* = 0, \quad S_z^* = 0, \quad M_y^* = 0, \quad M_z^* = 0, \quad M_x = 0.$$

В уравнениях (19) у рассматриваемых стержней пластинчатого типа в силу $h/b \ll 1$ при действии поперечной аэродинамической нагрузки с большой степенью точности можно пренебречь изгибом в плоскости $x0y$, полагая $v \equiv 0$. В силу этого равенства для входящих в остающиеся три уравнения движения

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \rho bh \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial S_z^*}{\partial x} - P + \rho bh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} - N^* + m_x - \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \qquad (20)$$

неизвестных $S_z^*$ и $N^*$ будут иметь место выражения

$$S_z^* = \frac{\partial M_y^*}{\partial x} - Q_x w' = (M_y + M_z \varphi)' - Q_x w' = D_y w''' + \\ + D_z \big(\varphi^2 w''\big)' - Q_x w', \; N^* = M_z w'' = D_z \varphi \big(w''\big)^2. \quad (21)$$

Можно показать, что в (21) слагаемое, содержащее усилие $Q_x$, может быть отброшено. В результате система уравнений (20) при использовании соотношений (21) сводится к разрешающей системе

$$\rho bh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{Ebh^3}{12} w^{(IV)} + \frac{Eb^3 h}{12} \big(\varphi^2 w''\big)'' = 0,$$
$$\frac{\rho b^3 h}{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{Gbh^3}{3} \varphi'' + \frac{Eb^3 h}{12} \big(w''\big)^2 \varphi = 0.$$

## Литература


[1] ASTM E-756 *Standard test method for measuring vibration damping properties of materials*, Amer. Soc. for Testing and Materials (2004).

[2] Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Egorov A.G. *Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens.* 1. *Experimental basis*, Mechanics of Composite Materials **50** (2), 127–136 (2014).

[3] Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N., Paimushin V.N. *Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens.* 2. *Aerodynamic Component of Damping*, Mechanics of Composite Materials **50** (3), 267–275 (2014).

[4] Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Shishkin V.M. *Identification of the elasticity and damping of a fiberglass based on a study of dying flexural vibrations of test samples*, Mechanics of Composite Materials **51** (3), 285–300 (2015).

[5] Paimushin V.N., Shalashilin V.I. *Consistent variant of continuum deformation theory in the quadratic approximation*, Dokl. Phys. **49** (6), 374–377 (2004).

[6] Paimushin V.N., Shalashilin V.I. *On square approximations of the deformation theory and problems of constructing improved versions of geometrical non-linear theory of multylayer construction elements*, J. Appl. Math. Mech. **69** (5), 861–881 (2005).

[7] Paimushin V.N. *Problems of geometric non-linearity and stability in the mechanics of thin shells and rectilinear columns*, J. Appl. Math. Mech. **71** (5), 772–805 (2007).

*А.М. Камалутдинов*

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,*
*ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,*

e-mail: islamui@hotmail.com

*В.Н. Паймушин*

*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева,*
*ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия,*

e-mail: vpajmushin@mail.ru

*A.M. Kamalutdinov and V.N. Paimushin*

**Refined geometrically nonlinear equations of motion for elongated rod-type plate**

*Abstract.* We derive new refined geometrically nonlinear equations of motion for elongated rod-type plates. They are based on the proposed earlier relationships of geometrically nonlinear theory of elasticity in the case of small deformations and refined S.P. Timoshenko's shear model. These equations allow to describe the high-frequency torsional oscillation of elongated rod-type plate formed in them when plate performs low-frequency flexural vibrations. By limit transition to the classical model of rod theory we carry out transformation of derived equations to simplified system of equations of lower degree.

*Keywords*: elongated rod-type plate, equations of elasticity theory, kinematic relationships in the quadratic approximation, Timoshenko's model, geometric nonlinearity, equations of motion, classical model, optimization, simplified equations of motion.

*A.M. Kamalutdinov*

*Kazan (Volga Region) Federal University,*
*18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: islamui@hotmail.com

*V.N. Paimushin*

*Kazan National Research Technical University,*
*10 K. Marks str., Kazan, 420111 Russia,*

e-mail: vpajmushin@mail.ru