ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 2 (525)

УДК 517.544

И.Т. ДЕНИСЮК

РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ЛАМЕ В ОБЛАСТЯХ С КУСОЧНО-ГЛАДКИМИ ГРАНИЦАМИ

Применение к прикладным стационарным задачам механики сплошной среды задач сопряжения аналитических функций в заданых [1], [2] и аффинно-преобразованных двумерных областях, а также гармонических функций в трехмерных областях с негладкими границами [3] приведено в [4]–[9]. Для решения динамических задач механики сплошной среды в трехмерных областях с негладкими границами, являющихся важными как с теоретической, так и прикладной точек зрения ([10], с. 12), необходимо построить решение волнового уравнения Ламе в областях указанного типа. Решение трехмерных динамических задач в областях с гладкими границами строится в [11] с помощью интегрального преобразования Лапласа.

1. Постановка задачи. Пусть V_1 является конечной односвязной областью, ограниченной поверхностью S, которая содержит гладкие замкнутые непересекающиеся особые линии (множества угловых точек) и конические точки и $V_0 = R_3 \setminus V_1$, R_3 — трехмерное пространство. Построим решение волнового уравнения Ламе ([12], с. 551)

$$c_{1i}^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{u}_i(x,t) - c_{2i}^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{u}_i(x,t) - \frac{\partial^2 \overline{u}_i(x,t)}{\partial t^2} = \overline{f}_i(x,t) \tag{1}$$

в соответствующих областях V_i $(i=\overline{0,1})$ при начальных условиях

$$\overline{u}_i(x,t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \overline{u}_i(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

и следующих граничных условиях на поверхности S: в точках гладкости

$$\overline{u}_0(x,t) - \overline{u}_1(x,t) = 0, \quad N_{x0}[\overline{u}_0(x,t)] - N_{x1}[\overline{u}_1(x,t)] = 0, \quad x \in S, \tag{3}$$

в особых точках x_0 поверхности S

$$\lim_{x\to x_0}[\overline{u}_0(x,t) - \overline{u}_1(x,t)] = 0, \quad \lim_{x\to x_0}\{N_{x0}[\overline{u}_0(x,t)] - N_{x1}[\overline{u}_1(x,t)]\} = 0, \tag{4}$$

где $c_{1i}^2 = \frac{\lambda_i+2\mu_i}{\rho_i}$, $c_{2i}^2 = \frac{\mu_i}{\rho_i}$, $\lambda_i, \mu_i, \rho_i \in R$, $x = (x_1, x_2, x_3)$; нормальный оператор $N_{xi}[\ ]$ действует согласно правилу $N_{xi}[\overline{u}_i(x,t)] = 2\mu_i \frac{\partial \overline{u}_i(x,t)}{\partial n} + \lambda_i(\overline{n}, \operatorname{div}\overline{u}(x,t)) + \mu_i[\overline{n}, \operatorname{rot}\overline{u}_i(x,t)]$; значение индекса $i=1$ соответствует величинам области V_1, а значение $i=0$ — области V_0.

Условия (4) не являются тривиальным следствием условий (3), они определяют класс решения аналогично тому, как это имеет место в двумерном случае в задаче Римана ([13], с. 444).

Решение уравнения Ламе в особых точках x_0 определяется уравнением [12]

$$\lim_{\Delta V\to x_0} \iiint\limits_{\Delta V} \left[c_{1i}^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{u}_i(x,t) - c_{2i}^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{u}_i(x,t) - \frac{\partial^2 \overline{u}_i(x,t)}{\partial t^2} - \overline{f}_i(x,t)\right] dv = 0, \tag{5}$$

что физически означает выполнение условий равновесия среды в особых точках, т. е. при стягивании области ΔV в точку x_0.

2. Упругие запаздывающие потенциалы. Для решения задачи введем упругие запаздывающие потенциалы на основе решения задачи (1), (2) для мгновенной сосредоточенной силы, действующей в пространстве R_3 ([12], с. 651; [14]). Отметим, что в [14] запаздывающие потенциалы как таковые не рассматривались.

Определение 1. Упругим запаздывающим потенциалом простого слоя называется интеграл

$$\overline{V}(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \iint\limits_S \Gamma_1(x,y,t-\tau)\overline{\varphi}_1(y,\tau)ds_y, \tag{6}$$

где

$$\Gamma_1(x,y,t-\tau) = \|\Gamma_{1kj}(x,y,t-\tau)\|, \qquad \Gamma_{1kj}(x,y,t) = \delta\Big(t-\frac{r}{c_2}\Big)U_{kj}^{(1)}(y,x) + \delta\Big(t-\frac{r}{c_2}\Big)U_{kj}^{(2)}(y,x) +$$

$$+t\Big[H\Big(t-\frac{r}{c_1}\Big) - H\Big(t-\frac{r}{c_2}\Big)\Big]\frac{1}{r^2}U_{kj}^{(3)}(y,x), \quad U_{kj}^{(1)}(y,x) = \frac{1}{4\pi\rho c_1^2}\frac{\partial r}{\partial y_k}\frac{\partial r}{\partial y_j}\frac{1}{r},$$

$$U_{kj}^{(2)}(y,x) = \frac{1}{4\pi\rho c_2^2}\Big[\frac{\delta_{kj}}{r} - \frac{\partial r}{\partial y_k}\frac{\partial r}{\partial y_j}\Big]\frac{1}{r}, \quad U_{kj}^{(3)}(y,x) = -\frac{1}{4\pi\rho}\Big[\frac{\delta_{kj}}{r} - 3\frac{\partial r}{\partial y_k}\frac{\partial r}{\partial y_j}\Big]\frac{1}{r} \quad (j,k=\overline{1,3}),$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, $H(t)$ — единичная функция Хевисайда, δ_{kj} — символ Кронекера, $\overline{\varphi}_1(y,\tau) = \{\varphi_{11}(y,\tau), \varphi_{12}(y,\tau), \varphi_{13}(y,\tau)\}$ — плотность, $r = |x-y|$, $y = (y_1,y_2,y_3)$.

Определение 2. Упругим запаздывающим потенциалом двойного слоя называется интеграл

$$\overline{W}(x,y,t) = \int\limits_0^t d\tau \iint\limits_S \Gamma_2(x,y,t-\tau)\overline{\varphi}_2(y,t)ds_y, \tag{7}$$

где

$$\Gamma_2(x,y,t-\tau) = \|\Gamma_{2jk}(x,y,t-\tau)\|, \qquad \Gamma_{2kj}(x,y,t) = \delta'\Big(t-\frac{r}{c_1}\Big)T_{kj}^{(4)}(y,x) + \delta'\Big(t-\frac{r}{c_2}\Big)T_{kj}^{(5)}(y,x) +$$

$$+\delta\Big(t-\frac{r}{c_1}\Big)T_{kj}^{(1)}(y,x) + \delta\Big(t-\frac{r}{c_2}\Big)T_{kj}^{(2)}(y,x) + t\Big[H\Big(t-\frac{r}{c_1}\Big) - H\Big(t-\frac{r}{c_2}\Big)\Big]\frac{1}{r^2}T_{kj}^{(3)}(y,x),$$

$$T_{kj}^{(4)}(y,x) = -\frac{1}{4\pi\rho c_1^2}\Big[\lambda n_j + 2\mu\frac{\partial r}{\partial y_j}\frac{\partial r}{\partial n(y)}\Big]\frac{\partial r}{\partial y_k}\frac{1}{r},$$

$$T_{kj}^{(5)}(y,x) = -\frac{\mu}{4\pi\rho c_2^3}\Big[\delta_{kj}\frac{\partial r}{\partial n(y)} + \frac{\partial r}{\partial y_j}n_k - 2\frac{\partial r}{\partial y_k}\frac{\partial r}{\partial y_j}\frac{\partial r}{\partial n(y)}\Big]\frac{1}{r},$$

$$T_{kj}^{(1)}(y,x) = -\frac{1}{4\pi\rho c_1^2}\Big[(\lambda-2\mu)\frac{\partial r}{\partial y_k}n_j(y) - 2\mu\frac{\partial r}{\partial y_j}n_k(y) - 2\mu\frac{\delta_{kj}}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n(y)} + 12\mu\frac{\partial r}{\partial y_k}\frac{\partial r}{\partial y_j}\frac{\partial r}{\partial n(y)}\Big]\frac{1}{r^2},$$

$$T_{kj}^{(2)}(y,x) = -\frac{\mu}{4\pi\rho c_2^2}\Big[3\delta_{kj}\frac{\partial r}{\partial n(y)} + 2\frac{\partial r}{\partial y_k}n_j(y) + 3\frac{\partial r}{\partial y_j}n_k(y) - 12\frac{\partial r}{\partial y_k}\frac{\partial r}{\partial y_j}\frac{\partial r}{\partial n(y)}\Big]\frac{1}{r^2},$$

$$T_{kj}^{(3)}(y,x) = \frac{6\mu}{4\pi\rho}\Big[\delta_{kj}\frac{\partial r}{\partial n(y)} + \frac{\partial r}{\partial y_k}n_j(y) + \frac{\partial r}{\partial y_j}n_k(y) - 5\frac{\partial r}{\partial y_k}\frac{\partial r}{\partial y_j}\frac{\partial r}{\partial n(y)}\Big]\frac{1}{r^2},$$

$\delta'(t) = \frac{d}{dt}\delta(t)$, $\overline{\varphi}_2(y,\tau) = \{\varphi_{21}(y,\tau), \varphi_{22}(y,\tau), \varphi_{23}(y,\tau)\}$ — плотность.

Определение 3. Упругим запаздывающим потенциалом объема называется интеграл

$$\overline{U}(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \iiint\limits_V \Gamma_1(y,x,t-\tau)\overline{\varphi}_3(y,\tau)dv, \tag{8}$$

где $\overline{\varphi}_3(y,\tau) = \{\varphi_{31}(y,\tau), \varphi_{32}(y,\tau), \varphi_{33}(y,\tau)\}$ — плотность.

Установим условия существования введенных потенциалов и изучим их свойства в случае области, ограниченной кусочно-гладкой поверхностью S.

Теорема 1. *Если вектор плотности $\overline{\varphi}_2(x,t)$ упругого запаздывающего потенциала двойного слоя (7) в точках гладкости поверхности S удовлетворяет условию Липшица–Гёльдера, имеет непрерывные ограниченные производные $\partial\overline{\varphi}_2(x,t)/\partial t$ и $\partial^2\overline{\varphi}_2(x,t)/\partial t^2$, а в особых точках $x_0 \in S$ имеет место представление*

$$\overline{\varphi}_2(x,t) = O(|x-x_0|^\alpha), \quad \alpha \in (0,1), \tag{9}$$

то упругий запаздывающий потенциал двойного слоя (7) существует, удовлетворяет однородному волновому уравнению Ламе, соответствующему (1) с начальными условиями (2), и в точках гладкости поверхности граничные значения потенциала определяются равенством

$$\overline{W}^{\pm}(x,t) = \mp\overline{\varphi}_2(x,t) + \overline{W}(x,t), \tag{10}$$

где $\overline{W}(x,t)$ — прямое значение потенциала в точке x, $\overline{W}^{\pm}(x,t)$ — граничные значения потенциала при подходе к точке $x \in S$ со стороны области V_1 (знак "+") или стороны области V_0 (знак "−").

Доказательство. Допустим, что поверхность S содержит одну особую гладкую линию L и точка x_1 ($x_1 \in S$, $x_1 \notin L$) является точкой гладкости поверхности S. Окружим особую линию трубчатой поверхностью радиуса $R_0 < R_1$, где R_1 — расстояние от x_1 до особой линии.

Представим интеграл (7) суммой

$$\overline{W}(x,t) = \overline{W}_1(x,t) + \overline{W}_2(x,t), \tag{11}$$

$$\overline{W}_1(x,t) = \int_0^t d\tau \iint_{S_1} \Gamma_2(x,y,t-\tau)\overline{\varphi}_2(y,\tau)ds_y, \quad \overline{W}_2(x,t) = \int_0^t d\tau \iint_{S_2} \Gamma_2(x,y,t-\tau)\overline{\varphi}_2(y,\tau)ds_y,$$

где S_1 — часть поверхности S, лежащая вне трубчатой поверхности, а S_2 — внутри нее.

Первый интеграл формулы (11), являющийся вектором, имеет компоненты ($k = \overline{1,3}$), которые в результате интегрирования по переменной τ согласно ([15], с. 38) принимают вид

$$\iint_S \sum_{j=1}^3 \Big\{ -T_{kj}^{(4)}(y,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_{2j}\left(y,t-\frac{r}{c_1}\right) - T_{kj}^{(5)}(y,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_{2j}\left(y,t-\frac{r}{c_2}\right) + T_{kj}^{(1)}(y,x)\varphi_{2j}\left(y,t-\frac{r}{c_1}\right) +$$
$$+ T_{kj}^{(2)}(y,x)\varphi_{2j}\left(y,t-\frac{r}{c_2}\right) + T_{kj}^{(3)}(y,x)\int_{1/c_1}^{1/c_2} \theta\varphi_{2j}(y,t-r\theta)d\theta \Big\} ds_y, \tag{12}$$

а второй интеграл имеет компоненты такого же вида с заменой поверхности интегрирования S_1 на S_2.

Согласно формуле Лагранжа ([16], с. 226) имеем $\varphi_{2j}(y,t-\frac{r}{c_1}) = \varphi_{2j}(y,t) + \varphi'_{2j}[y,t+(\varepsilon_{1j}-1)\frac{r}{c_1}]\frac{r}{c_1}$, где $0 < \varepsilon_{1j} < 1$.

Записывая аналогичные представления для других функций и их производных и учитывая тождество

$$-T_{kj}^{(4)}(y,x) - T_{kj}^{(5)}(y,x) + T_{kj}^{(1)}(y,x)\frac{r}{c_1} + T_{kj}^{(2)}(y,x)\frac{r}{c_2} + T_{kj}^{(3)}(y,x)\frac{r}{3}\left(\frac{1}{c_2^3} - \frac{1}{c_1^3}\right) \equiv 0,$$

получим

$$\overline{W}_1(x,t)=\iint\limits_{S_1}\left\|T_{kj}^{(1)}(y,x)+T_{kj}^{(2)}(y,x)+T_{kj}^{(3)}(y,x)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_2^2}-\frac{1}{c_1^2}\right)\right\|\overline{\varphi}_2(y,t)ds_y-$$

$$-\iint\limits_{S_1}\Bigg(\bigg\{\|T_{kj}^{(4)}(y,x)\|\frac{\partial}{\partial t}\overline{\varphi}_2\left[y,t+(\varepsilon_{21}-1)\frac{r}{c_1}\right]\frac{1}{c_1}+\|T_{kj}^{(5)}(y,x)\|\frac{\partial}{\partial t}\overline{\varphi}_2\left[y,t+(\varepsilon_{22}-1)\frac{r}{c_2}\right]\frac{1}{c_2}\bigg\}r+$$

$$+\|T_{kj}^{(1)}(y,x)\|\frac{1}{c_1^2}(1-\varepsilon_{21})\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{\varphi}_2\left[y,t+(\varepsilon_{221}-1)(1-\varepsilon_1)\frac{r}{c_1}\right]+$$

$$+\|T_{kj}^{(2)}(y,x)\|\frac{1}{c_2^2}(1-\varepsilon_{22})\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{\varphi}_2\left[y,t+(\varepsilon_{222}-1)(1-\varepsilon_{22})\frac{r}{c_2}\right]+$$

$$+\|T_{kj}^{(3)}(y,x)\|(1-\varepsilon_{25})\int\limits_{1/c_1}^{1/c_2}\theta^3\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{\varphi}_2[y,t+(1-\varepsilon_{25})(\varepsilon_{225}-1)r\theta]\Bigg)r^2ds_y, \quad (13)$$

где $\varepsilon_{2g}=\begin{cases}\varepsilon_{2g1}, & j=1;\\ \varepsilon_{2g2}, & j=2;\\ \varepsilon_{2g3}, & j=3,\end{cases}$ $g=1,2,5;$ $\varepsilon_{22g}=\begin{cases}\varepsilon_{22g1}, & j=1;\\ \varepsilon_{22g2}, & j=2;\\ \varepsilon_{22g3}, & j=3,\end{cases}$ $0<\varepsilon_{gj}<1,\ 0<\varepsilon_{22g}<1.$

Первый интеграл в (13) является известным обобщенным упругим потенциалом двойного слоя ([17], с. 549) $\overline{W}_0(x,t)=\iint\limits_{S_1}\Gamma_{20}(x,y)\overline{\varphi}_2(y,t)ds_y$ и имеет граничные значения при переходе точки x через поверхность S_1

$$\overline{W}_0^{\pm}(x,t)=\mp\overline{\varphi}_2(x,t)+\overline{W}_0(x,t). \quad (14)$$

Второй интеграл представления (13) имеет непрерывную подинтегральную функцию и является непрерывной функцией при переходе x точки гладкости поверхности S ([17], с. 547).

Интеграл $\overline{W}_2(x,t)$ формулы (11) вычисляется как несобственный для $x\in S_1$ путем перехода к переменным ρ, s, которые являются криволинейными координатами локальной области кривой L из [3], при учете условия (9).

Таким образом, интеграл (7) существует, а учитывая представления (11), (13), (14) и группируя слагаемые, получаем формулу (10).

Пусть поверхность S содержит вершину конической поверхности с прямолинейными образующими и гладкой криволинейной направляющей. Тогда вместо трубчатой поверхности следует брать сферическую с центром в особой точке при указанной выше схеме доказательства с использованием локальных координат, связанных с конической точкой [3].

Аналогично проводится доказательство при наличии конечного числа непересекающихся особых линий L_j $(j=\overline{1,N})$ и конечного числа конических точек O_k $(k=\overline{1,m})$, $O_k\notin L_j$.

Непосредственная подстановка (7) в однородное волновое уравнение Ламе и условия (2) показывает, что они удовлетворяются. $\square$

Теорема 2. *Если в точках гладкости поверхности S плотность $\overline{\varphi}_1(x,t)$ упругого запаздывающего потенциала простого слоя $\overline{V}(x,t)$ (6) удовлетворяет условию Липшица–Гёльдера, имеет непрерывные ограниченные производные $\partial\overline{\varphi}_1(x,t)/\partial t$ и $\partial^2\overline{\varphi}_1(x,t)/\partial t^2$, а в особых точках x_0 имеет место асимптотическое представление*

$$\overline{\varphi}_1(x,t)=O\left(\frac{1}{|x-x_0|^{\alpha}}\right),\quad \alpha\in(0,1), \quad (15)$$

то потенциал существует, является непрерывной функцией при переходе точки x через точку гладкости поверхности, удовлетворяет однородному волновому уравнению Ламе (1) и условиям (2), и в точках гладкости поверхности S граничные значения нормального оператора от *упругого запаздывающего потенциала простого слоя имеют вид*

$$N_x^{\pm}[\overline{V}(x,t)] = \pm\overline{\varphi}_1(x,t) + N_x[\overline{V}(x,t)], \tag{16}$$

где $N_x[\overline{V}(x,t)]$ *— прямое значение нормального оператора от потенциала на поверхности.*

Доказательство. Пусть поверхность S содержит одну особую гладкую линию. Аналогично предыдущему доказательству вводим трубчатую поверхность, охватывающую особую линию. Тогда имеем

$$\overline{V}(x,t) = \overline{V}_1(x,t) + \overline{V}_2(x,t), \tag{17}$$

$$\overline{V}_1(x,t) = \int_0^t d\tau \iint_{S_1} \Gamma_1(x,y,t-\tau)\overline{\varphi}_1(y,\tau)ds_y, \quad \overline{V}_2(x,t) = \int_0^t d\tau \iint_{S_2} \Gamma_2(x,y,t-\tau)\overline{\varphi}_1(y,\tau)ds_y.$$

Вектор $\overline{V}_1(x,t)$ после интегрирования по τ согласно ([15], с. 38) и применения формулы Лагранжа так же, как и в теореме 1, представляется в виде

$$\begin{aligned}\overline{V}_1(x,t) = &\iint_{S_1} \left\| U_{kj}^{(i)}(y,x) + U_{kj}^{(2)}(y,x) + U_{kj}^{(3)}(y,x)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2}\right)\right\| \overline{\varphi}_1(y,\tau)ds_y + \\ &+ \iint_{S_1} \left\{ \|U_{kj}^{(1)}(y,x)\| \frac{\partial}{\partial t}\overline{\varphi}_1\left[y, t + (\varepsilon_{11} - 1)\frac{r}{c_1}\right]\frac{1}{c_1} + \|U_{kj}^{(2)}(y,x)\| \frac{\partial}{\partial t}\overline{\varphi}_1\left[y, t + (\varepsilon_{12} - 1)\frac{r}{c_2}\right]\frac{1}{c_2} + \right. \\ &\left. + \|U_{kj}^{(3)}(y,x)\| \int_{1/c_1}^{1/c_2} \frac{\partial}{\partial t}\overline{\varphi}_1[y, t + (\varepsilon_{15} - 1)r\theta] \right\} r\, ds_y,\end{aligned} \tag{18}$$

где $\varepsilon_{1h} = \begin{cases} \varepsilon_{1h1}, & j = 1; \\ \varepsilon_{1h2}, & j = 2;\ h = 1,2,5,\ 0 < \varepsilon_{1hj} < 1. \\ \varepsilon_{1h3}, & j = 3, \end{cases}$

Первое слагаемое правой части (18) является известным обобщенным упругим потенциалом простого слоя ([17], с. 547), сохраняющим непрерывность при переходе точки поверхности S_1. Второй интеграл (18), имеющий непрерывную подинтегральную функцию, является непрерывной функцией при $x \in S_1$.

Интеграл $\overline{V}_2(x,t)$ вычисляется как несобственный с помощью связанных с кривой криволинейных координат $\rho,\ \theta,\ s$ [3] при учете условия (15).

Действуя оператором $N_x[\ ]$ на равенства (17), (18), учитывая известные граничные значения нормального оператора от обобщенного потенциала простого слоя ([17], с. 554) и непрерывность нормального оператора от второго интеграла представления (17), видим, что соотношение (16) имеет место.

В случае конической точки также вместо трубчатой поверхности берем сферу при указанной схеме доказательства. Аналогично строится доказательство для конечного числа особых непересекающихся линий и конических точек.

Непосредственная подстановка (6) в (1) и (2) показывает, что они удовлетворяются. □

Теорема 3. *Объемный упругий запаздывающий потенциал* (8) *с плотностью* $\overline{\varphi}_3(x,t) = -\frac{1}{2}\overline{f}(x,t)$ *является решением неоднородного волнового уравнения Ламе* (1) *с условиями* (2).

Доказательство. Выполним в (8) интегрирование по τ согласно ([15], с. 38) и представим потенциал аналогично ([18], с. 300) в виде

$$\overline{U}(x,t) = -\frac{1}{2}\iiint\limits_{V\setminus E}\Big[\|U^{(1)}_{kj}(y,x)\|\overline{f}\Big(y,t-\frac{r}{c_1}\Big) + \|U^{(2)}_{kj}(y,x)\|\overline{f}\Big(y,t-\frac{r}{c_2}\Big) +$$

$$+ \|U^{(3)}_{kj}(y,x)\|\int\limits_{1/c_1}^{1/c_2}\theta\overline{f}(y,t-r\theta)\Big]dv_y - \frac{1}{2}\iiint\limits_{E}\Big\{\|U^{(1)}_{kj}(y,x)\|\Big[\overline{f}\Big(y,t-\frac{r}{c_1}\Big) - f(y,t)\Big] +$$

$$+ \|U^{(2)}_{kj}(y,x)\|\Big[\overline{f}\Big(y,t-\frac{r}{c_2}\Big) - \overline{f}(y,t)\Big] + \|U^{(3)}_{kj}(y,x)\|\int\limits_{1/c_1}^{1/c_2}\theta[\overline{f}(y,t-r\theta) - \overline{f}(y,t)]d\theta\Big\}dv_y -$$

$$-\frac{1}{2}\iiint\limits_{E}\Big\|U^{(1)}_{kj}(y,x) + U^{(2)}_{kj}(y,x) + U^{(3)}_{kj}(y,x)\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2}\Big)\Big\|\overline{f}(y,t)dv_y, \quad (19)$$

где $E = E(x,\varepsilon)$ — шар с центром в точке x радиуса ε.

Первое слагаемое имеет непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяет однородному волновому уравнению Ламе, второй интеграл является дважды дифференцируемой функцией, а третий удовлетворяет неоднородному уравнению Ламе с правой частью $\overline{f}(x,t)$ ([17], с. 554).

Подставляя потенциал (8) в форме (19) в уравнение (1) и граничные условия (2) и устремляя радиус ε к нулю, получаем утверждение теоремы. □

Теорема 4 (Ляпунова–Таубера). *Если плотность $\overline{\varphi}_2(x,t)$ упругого запаздывающего потенциала двойного слоя удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и существуют предельные значения нормального оператора от упругого запаздывающего потенциала двойного слоя с одной стороны поверхности S в ее точке гладкости, то они существуют с другой стороны*; *при этом*

$$N^-_{x0}[\overline{W}(x,t)] = N^+_{x1}[\overline{W}(x,t)]. \quad (20)$$

Доказательство. Рассмотрим, как и при доказательстве теоремы 1, сначала случай наличия на поверхности S особой линии. Тогда нормальный оператор от упругого запаздывающего потенциала двойного слоя представляется согласно формуле (11) как сумма величин $N_x[\overline{W}_1(x,t)]$ и $N_x[\overline{W}_2(x,t)]$.

Первое слагаемое на основе формулы (13) является суммой нормального оператора от обобщенного упругого потенциала двойного слоя $N_x[\overline{W}_0(x,t)]$ ([17], с. 554) и нормального оператора от интеграла с непрерывной подинтегральной функцией. Согласно ([17], с. 554), если существует предельное значения величины $N_x[\overline{W}_0(x,t)]$ на одной стороне поверхности S_1, то существует предельное значение на другой стороне, совпадающее с первым,

$$N^-_{x0}[\overline{W}_0(x,t)] = N^+_{x1}[\overline{W}_0(x,t)], \quad (21)$$

а нормальный оператор от второго интеграла при $x \in S_1$ является непрерывной функцией при переходе точки такой поверхности.

Второе слагаемое $N_x[\overline{W}_2(x,t)]$ вычисляется при $x \in S_1$ как сингулярный интеграл путем перехода к переменным ρ, s, которые связаны с особой линией [3]. Таким образом, учитывая (21), получаем утверждение теоремы. Аналогичной будет схема доказательства в случае наличия на поверхности раздела конической точки, а также для конечного числа непересекающихся особых линий и конических точек. □

3. Разрешимость уравнения. Установим асимптотику решений волнового уравнения Ламе вблизи особых точек поверхности S.

Лемма 1. *Асимптотические представления решения однородного волнового уравнения Ламе* (1), *нормального оператора от него и решения стационарного уравнения Ламе, нормального оператора от него вблизи особой линии поверхности* S *совпадают и имеют вид*

$$\overline{u}(x,t) = \{u_\rho, u_\theta, u_s\},$$

$$u_\rho = \sum_{q=1}^{4}(\rho^{m_q}A_q) + o(\rho^{m_0}), \quad u_\theta = \sum_{q=1}^{4}(\rho^{m_q}B_q) + o(\rho^{m_0}), \quad u_s = \rho^{m_5}C + o(\rho^{m_5}),$$

$$N_x[\overline{u}(x,t)] = \{\tau_{\rho\theta}, \sigma_\theta, \tau_{\theta s}\}, \quad \tau_{\rho\theta} = \mu\sum_{q=1}^{4}\left(\rho^{m_q-1}\left[(m_q-1)B_q + \frac{\partial A_q}{\partial\theta}\right]\right) + O(1),$$

$$\sigma_\theta = 2\mu\sum_{q=1}^{4}\left(\rho^{m_q-1}\left\{[\beta(1+m_q)+1]A_q + (\beta+1)\frac{\partial B_q}{\partial\theta}\right\}\right) + O(1), \quad \tau_{\theta s} = \mu\rho^{m_5-1}\frac{\partial C}{\partial\theta} + O(1), \quad (22)$$

где $A_q = (m_q - \varkappa)a_{1q}(s)\sin(m_q-1)\theta + (\varkappa - m_q)b_{1q}(s)\cos(m_q-1)\theta + c_{1q}(s)\sin(m_q+1)\theta - d_{1q}(s)\times$ $\times\cos(m_q+1)\theta$, $B_q = (m_q+\varkappa)a_{1q}(s)\cos(m_q-1)\theta + (m_q+\varkappa)b_{1q}(s)\sin(m_q-1)\theta + c_{1q}(s)\cos(m_q+1)\theta +$ $d_{1q}(s)\sin(m_q+1)\theta$, $C = g_1(s)\cos m_5\theta + h_1(s)\sin m_5\theta$, $\beta = \frac{\nu}{1-2\nu}$, $m_5 = \frac{\pi}{2\pi-\omega}$, $\mu^* = \frac{\varkappa_1\gamma-\varkappa_0}{1-\gamma}$, $\varkappa_i = 3-4\nu_i$ $(i=\overline{0,1})$, $\omega(s) = \theta_1(s) - \theta_2(s)$ — *угол раствора поверхности* S *в точке с дуговой координатой* s *особой линии* L; $m_q \in (0,1)$, $q = \overline{1,4}$, *и являются корнями характеристических уравнений*

$$\sin m_q\omega = \pm m_q\sin\omega, \quad \mu^*\sin m_q\omega = \pm m_q\sin\omega, \quad q=\overline{1,4}, \quad (23)$$

$m_0 = \max\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$, *идентифицирующий индекс* $i = \overline{0,1}$ *в формулах* (22), (23) *опущен.*

Доказательство. Однородное волновое уравнение Ламе (1) инвариантно относительно преобразования

$$x_1' = B^*x_1, \quad x_2' = B^*x_2, \quad x_3' = B^*x_3, \quad t' = B^*t.$$

Учитывая граничные условия (3), будем иметь

$$u_j(x_1,x_2,x_3,t) = A^*u_j(B^*x_1, B^*x_2, B^*x_3, B^*t), \quad A^* = A^*(B^*), \quad j=\overline{1,3}. \quad (24)$$

Дифференцируя (24) по B^*, получаем систему уравнений

$$(\operatorname{grad} u_j, \overline{r}) + \frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{B^*}{A^*}\frac{\partial A^*}{\partial B^*}u_j,$$

решение которой

$$u_j = x_1^{m_j}\varphi_j\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_1}{t}\right), \quad (25)$$

где φ_j — однородная функция m_j-го измерения.

Подставляя представления декартовых координат в локальной области особой линии посредством криволинейных координат ρ, θ, s из [3] в (25), получаем формулы для компонент вектора $\overline{u}$ решения волнового уравнения Ламе

$$u_\rho = \rho^{m_1}A\left(\theta, s, \frac{\rho}{t}\right), \quad u_\theta = \rho^{m_2}B\left(\theta, s, \frac{\rho}{t}\right), \quad u_s = \rho^{m_3}C\left(\theta, s, \frac{\rho}{t}\right), \quad m_j = m_j(s,t). \quad (26)$$

Из уравнения (5) согласно (26) находим системы дифференциальных уравнений, определяющие неизвестные величины и совпадающие с приведенными в [6], [19]. Корни характеристических уравнений (23) детально исследованы в [20]. □

Лемма 2. *Асимптотика решений однородных волнового и стационарного уравнений Ламе, а также нормального оператора от них одна и та же вблизи конической точки поверхности S и имеет вид в локальных координатах ρ_1, θ_1, s_1* [3]

$$\overline{u}(x,t) = \{u_{\rho_1}, u_{\theta_1}, u_{s_1}\},$$

$$u_{\rho_1} = \sum_{g=1}^{l}(\rho_1^{m_{kg}} A_{kg}) + o(\rho_1^{m_{k0}}), \quad u_{\theta_1} = \sum_{g=1}^{l}(\rho_1^{m_{kg}} B_{kg}) + o(_1^{m_{k0}}), \quad u_{s_1} = \sum_{g=1}^{l}(\rho_1^{m_{kg}} C_{kg}) + o(\rho_1^{m_{k0}}),$$

$$N_x[\overline{u}(x,t)] = \{\tau_{\rho_1\theta_1}, \sigma_{\theta_1}, \tau_{\theta_1 s_1}\}\tau_{\rho_1\theta_1} = \mu\sum_{g=1}^{l}\left\{\rho_k^{m_{kg}-1}\left[(m_{kg}-1)B_{kg} + \frac{\partial A_{kg}}{\partial\theta_1}\right]\right\} + O(1),$$

$$\sigma_{\theta_1} = 2\mu\sum_{g=1}^{l}(\rho_1^{m_{kg}-1}\{[\beta(m_{kg}+2)+1]A_{kg} + (\beta+1)(\partial B_{kg}/\partial\theta_1) +$$

$$+\beta H_0^{-1}(\partial C_{kg}/\partial s_1) + \beta B_{kg} H_0^{-1}(\partial H_0/\partial\theta_1)\}) + O(1), \quad \beta = \nu/(1-2\nu),$$

$$\tau_{\theta_1 s_1} = \mu\sum_{g=1}^{l}[\rho_1^{m_{kg}-1}(-H_0^{-1}(\partial H_0/\partial\theta_1)C_{kg} + \partial C_{kg}/\partial\theta_1 + H_0^{-1}(\partial B_{kg}/\partial s_1))] + O(1), \tag{27}$$

где l — число корней $m_{kg} \in (0,1)$ соответствующих характеристических уравнений [7], *$m_{k0} = \max\limits_{g=\overline{1,l}} m_{kg}$, H_0, A_{kg}, B_{kg}, C_{kg} приведены в* [7].

Доказательство строится с помощью формул (25) и представления декартовых координат посредством ρ_1, θ_1, s_1 [3], что подробно изложено в [7] и применено в [19], [21].

Для дальнейшего необходимы величины

$$A_1 = 0{,}5\iint\limits_S \sum_{j=1}^{3}\left\{\sum_{p=1}^{2}|U_{0jk}^{(p)}(y,x) - U_{1jk}^{(p)}(y,x)| + \delta_1|U_{0jk}^{(3)}(y,x) - U_{1jk}^{(3)}(y,x)|\right\}ds_y,$$

$$A_2 = 0{,}5\iint\limits_S \sum_{j=1}^{3}\left\{\sum_{p=1,2,4,5}|T_{0kj}^{(p)}(y,x) - T_{1kj}^{(p)}(y,x)| + r^2\delta_1|T_{0jk}^{(3)}(y,x) - T_{1kj}^{(3)}(y,x)|\right\}ds_y,$$

$$\alpha_1 = 0{,}5\iint\limits_S \sum_{j=1}^{3}\left\{\sum_{s=1}^{2}[|T_{1kj}^{(s)}(y,x)|\delta_{s+1}]r + |U_{1kj}^{(3)}(y,x)|(\delta_4+\delta_5)r^2\right\}ds_y,$$

$$\alpha_2 = 0{,}5\iint\limits_S \sum_{j=1}^{3}\left\{\sum_{g=1}^{2}[|T_{1kj}^{(g)}(y,x)|\delta_{g+1}]r + \sum_{g=4}^{5}[|T_{1kj}^{(g)}(y,x)|\delta_{g+1}] + |T_{1kj}^{(3)}(y,x)|(\delta_4+\delta_5)r^2\right\}ds_y,$$

$$B_1 = 0{,}5\iint\limits_S \left\{\sum_{g=1,2,4,5}|P_{0kj}^{(g)}(y,x) - P_{1kj}^{(g)}(y,x)| + |P_{0kj}^{(3)}(y,x) - P_{1kj}^{(3)}(y,x)|\delta_1 r^2\right\}ds_y,$$

$$B_2 = 0{,}5\iint\limits_S \sum_{j=1}^{3}\left\{\sum_{g=1}^{6}|G_{0kj}^{(g)}(y,x) - G_{1kj}^{(g)}(y,x)| + |G_{0kj}^{(7)}(y,x) - G_{1kj}^{(3)}(y,x)|\delta_1 r^2\right\}ds_y,$$

$$\alpha_3 = 0{,}5\iint\limits_S \sum_{j=1}^{3}\left\{\sum_{s=1}^{2}[|P_{1kj}^{(s)}(y,x)|\delta_{s+1}] + \sum_{s=4}^{5}[|P_{1kj}^{(s)}(y,x)|\delta_{7-s}] + |P_{1kj}^{(3)}(y,x)|(\delta_4+\delta_5)r^2\right\}ds_y,$$

$$\alpha_4 = 0{,}5\iint\limits_S \sum_{j=1}^{3}\left\{\sum_{p=1}^{2}[|G_{1kj}^{(p)}(y,x)|\delta_{p+1}]r + \sum_{g=4,6}[|G_{1kj}^{(g)}(y,x)|\delta_2]r +\right.$$

$$\left. + \sum_{g=3,5}[|G_{1kj}^{(g)}(y,x)|\delta_3]r + |G_{1kj}^{(7)}(y,x)|(\delta_4+\delta_5)r^2\right\}ds_y, \tag{28}$$

где $G_{1kj}^{(g)}(y,x)$, $g=\overline{1,7}$, — выражения, определяющие элементы матрицы

$$N_{xi}[\Gamma_{2i}(x,y,t)] = \left\| \delta''\left(t-\frac{r}{c_{1i}}\right)G_{ikj}^{(6)}(y,x) + \delta''\left(t-\frac{r}{c_{2i}}\right)G_{ikj}^{(5)}(y,x) + \delta'\left(t-\frac{r}{c_{1i}}\right)G_{ikj}^{(4)}(y,x) + \right.$$
$$+\delta'\left(t-\frac{r}{c_{2i}}\right)G_{ikj}^{(3)}(y,x) + \delta\left(t-\frac{t}{c_{1i}}\right)G_{ikj}^{(1)}(y,x) + \delta\left(t-\frac{r}{c_{2i}}\right)G_{lkj}^{(2)}(y,x) +$$
$$\left. + t\left[H\left(t-\frac{r}{c_{1i}}\right) - H\left(t-\frac{r}{c_{2i}}\right)\right]G_{1kj}^{(7)}(y,x)\right\|, \quad i=\overline{0,1},$$

$P_{ikj}^{(h)}(y,x)$, $h=\overline{1,5}$, получается из соответствующих выражений $T_{ikj}^{(h)}(y,x)$ при замене $\overline{n}(y)$ на $\overline{n}(x)$; $\delta_1 = 0{,}5|c_{20}^{-2}-c_{10}^{-2}|$, $\delta_2 = |c_{10}^{-1}-c_{11}^{-1}|$, $\delta_3 = |c_{20}^{-1}-c_{21}^{-1}|$, $\delta_4 = 0{,}5|c_{20}^{-2}-c_{21}^{-2}|$, $\delta_5 = 0{,}5|c_{10}^{-2}-c_{11}^{-2}|$.

Теорема 5. *Если существуют корни характеристических уравнений лемм 1 и 2, принадлежащие интервалу $(0,1)$, частные производные по t всех порядков правой части $\overline{f}_i(x,t)$ волнового уравнения Ламе (1) по модулю ограничены одним и тем же числом*

$$\left|\frac{\partial^n \overline{f}_i(x,t)}{\partial t^n}\right| < L \tag{29}$$

при $x\in S$ и имеют место неравенства

$$q_1 = A_1 + A_2 + \alpha_1 + \alpha_2 < 1, \quad q_2 = B_1 + B_2 + \alpha_3 + \alpha_4 < 1, \tag{30}$$

где A_1, A_2, α_1, α_2, B_1, B_2, α_3, α_4 даны формулами (28), то существует решение волнового уравнения Ламе (1) с начальными условиями (2) и граничными условиями (3).

Доказательство. Следуя леммам 1 и 2, представим решение волнового уравнения Ламе в виде

$$\overline{u}_i(x,t) = \overline{u}_{i1}(x,t) + \overline{u}_{i2}(x,t), \quad i=\overline{0,1}, \tag{31}$$

где $\overline{u}_{i1}(x,t)$ реализуют асимптотику решений, установленную леммами 1 и 2, а $\overline{u}_{i2}(x,t)$ являются непрерывными функциями в своих областях определения. Представим первые слагаемые, следуя теоремам 1 и 2, упругими запаздывающими потенциалами простого и двойного слоя с плотностями, реализующими соответствующую асимптотику [3].

Функции $\overline{u}_{i2}(x,t)$ берем, следуя теоремам 1–3, в виде сумм всех трех упругих запаздывающих потенциалов

$$\overline{u}_{i2}(x,t) = \overline{V_i}(x,t) + \overline{W}_i(x,t) + \overline{U}_i(x,t), \tag{32}$$

где

$$\overline{V}_i(x,t) = \int_0^t d\tau \iint_S \Gamma_{1i}(x,y,t-\tau)\overline{\varphi}_{1i}(y,\tau)ds_y,$$
$$\overline{W}_i(x,t) = \int_0^t d\tau \iint_S \Gamma_{2i}(x,y,t-\tau)\overline{\varphi}_{2i}(y,\tau)ds_y,$$
$$\overline{U}_i(x,t) = -0{,}5\int_0^t d\tau \iiint_{V_i} \Gamma_{1i}(x,y,t-\tau)\overline{f_i}(y,\tau)dv_y,$$

$\overline{\varphi}_{1i}(y,\tau)$, $\overline{\varphi}_{2i}(y,\tau)$ — неизвестные плотности.

Подставим (31), (32) в условия (3) и выполним действия с обобщенными функциями согласно [15]. Положим ввиду произвольности плотностей

$$\overline{\varphi}_{10}(x,t) = \overline{\varphi}_{11}(x,t), \quad \overline{\varphi}_{20}(x,t) = \overline{\varphi}_{21}(x,t) \tag{33}$$

В результате получим систему функциональных уравнений

$$\begin{aligned}
&\overline{\varphi}_{20}(x,t) + P[\overline{\varphi}_{10}(x,t), \overline{\varphi}_{20}(x,t)] = 0{,}5\overline{g}(x,t),\\
&\overline{\varphi}_{10}(x,t) + Q[\overline{\varphi}_{10}(x,t), \overline{\varphi}_{20}(x,t)] = -0{,}5\overline{h}(x,t),
\end{aligned} \tag{34}$$

где

$$P[\overline{\varphi}_{10}(x,t), \overline{\varphi}_{20}(x,t)] = 0{,}5 \iint\limits_S \Big\{ \sum_{i=0}^{1} \Big[\sum_{p=1}^{2} \|U_{ikj}^{(p)}(y,x)\| \overline{\varphi}_{10}\Big(y, t - \frac{r}{c_{pi}}\Big) +$$

$$+ \|U_{ikj}^{(3)}(y,x)\| \int_{1/c_{1i}}^{1/c_{2i}} \theta \overline{\varphi}_{10}(y, t - r\theta) d\theta \Big] + \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \Big[- \sum_{q=1}^{2} \|T_{ikj}^{(q)}(y,x)\| \overline{\varphi}_{20}\Big(y, t - \frac{r}{c_{qi}}\Big) +$$

$$+ \sum_{s=4}^{5} \|T_{ikj}^{(s)}(y,x)\| \frac{\partial}{\partial t} \overline{\varphi}_{20}\Big(y, t - \frac{r}{c_{s-3,i}}\Big) + \|T_{ikj}^{(3)}(y,x)\| \int_{1/c_{1i}}^{1/c_{2i}} \theta \overline{\varphi}_{20}(y, t - r\theta) d\theta \Big] \Big\} ds_y,$$

$$Q[\overline{\varphi}_{10}(x,t), \overline{\varphi}_{20}(x,t)] = -0{,}5 \iint\limits_S \Big\{ \sum_{i=0}^{1} \Big[\sum_{q=1}^{2} \|P_{ikj}^{(q)}(y,x)\| \overline{\varphi}_{10}\Big(y, t - \frac{r}{c_{qi}}\Big) -$$

$$- \sum_{s=4}^{5} \|P_{ikj}^{(s)}(y,x)\| \frac{\partial}{\partial t} \overline{\varphi}_{10}\Big(y, t - \frac{r}{c_{s-3,i}}\Big) + \|P_{ikj}^{(3)}(y,x)\| \int_{1/c_{1i}}^{1/c_{2i}} \theta \overline{\varphi}_{10}(y, t - r\theta) d\theta \Big] +$$

$$+ \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \Big[\sum_{q=1}^{2} \|G_{ikj}^{(q)}(y,x)\| \overline{\varphi}_{20}\Big(y, t - \frac{r}{c_{qi}}\Big) - \sum_{q=3}^{4} \|G_{ikj}^{(q)}(y,x)\| \frac{\partial}{\partial t} \overline{\varphi}_{20}\Big(y, t - \frac{r}{c_{5-q,i}}\Big) +$$

$$+ \|G_{ikj}^{(7)}(y,x)\| \int_{1/c_{1i}}^{1/c_{2i}} \theta \overline{\varphi}_{20}(y, t - r\theta) d\theta \Big] \Big\} ds_y,$$

$$\overline{g}(x,t) = -[\overline{u}_{01}^{-}(x,t) + \overline{U}_0^{-}(x,t)] + [\overline{u}_{11}^{+}(x,t) + \overline{U}_1^{+}(x,t)],$$

$$\overline{h}(x,t) = N_{x1}^{+}[\overline{u}_{11}(x,t) + \overline{U}_1(x,t)] - N_{xo}^{-}[\overline{u}_{01}(x,t) + \overline{U}_0(x,t)].$$

Правые части уравнений (34) являются непрерывными функциями на S ввиду выполнения условий (3). Уравнения имеют характер интегродифференциальных уравнений по переменной t ([22], с. 105) и сингулярных интегральных уравнений по переменной $x = (x_1, x_2, x_3)$ [23].

Для решения применим метод последовательных приближений [11], [22]

$$\overline{\varphi}_{20}(x,t) = 0{,}5\overline{g}(x,t), \overline{\varphi}_{10}(x,t) = -0{,}5\overline{h}(x,t), \tag{35}$$

$$\overline{\varphi}_{20}^{(n)}(x,t) = -P[\overline{\varphi}_{10}^{(n-1)}(x,t), \overline{\varphi}_{20}^{(n-1)}(x,t)] + 0{,}5\overline{g}(x,t),$$

$$\overline{\varphi}_{10}^{(n)}(x,t) = -Q[\overline{\varphi}_{10}^{(n-1)}(x,t), \overline{\varphi}_{20}^{(n-1)}(x,t)] - 0{,}5\overline{h}(x,t), \tag{36}$$

$$\overline{\varphi}_{20}(x,t) = \lim_{n\to\infty} \overline{\varphi}_{20}^{(n)}(x,t), \quad \overline{\varphi}_{10}(x,t) = \lim_{n\to\infty} \overline{\varphi}_{10}^{(n-1)}(x,t). \tag{37}$$

Сходимость пределов (37) эквивалентна сходимости рядов

$$\overline{\varphi}_{10}^{(0)}(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} [\overline{\varphi}_{10}^{(n)}(x,t) - \overline{\varphi}_{10}^{(n-1)}(x,t)], \quad \overline{\varphi}_{20}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} [\overline{\varphi}_{20}^{(n)}(x,t) - \overline{\varphi}_{20}^{(n-1)}(x,t)]. \tag{38}$$

Переходя к скалярным компонентам рядов (38) при учете условий (29), (30), устанавливаем, что они мажорируются рядами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Lq_1^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Lq_2^n$, т. е. ряды (38) сходятся абсолютно и равномерно в точках гладкости поверхности S. Выполняя предельный переход в (36) при $n \to \infty$, убеждаемся в том, что (35)–(37) является решением системы уравнений (34). □

Литература

1. Денисюк И.Т. *Решение одной задачи сопряжения для составной области с угловыми точками на линиях раздела* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 6. – С. 17–24.
2. Денисюк И.Т. *Одна задача сопряжения аналитических функций в аффинно преобразованных областях с кусочно-гладкими границами* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 6. – С. 70–74.
3. Денисюк И.Т. *Задача сопряжения гармонических функций в трехмерных областях с негладкими границами* // Изв. вузов. – Математика. – 2002. – № 4. – С. 29–35.
4. Денисюк И.Т. *Термоупругость изотропной пластинки с угловыми включениями* // Изв. РАН. Механ. тверд. тела. – 1999. – № 2. – С. 148–155.
5. Денисюк И.Т. *Одна модель тонких упругих включений в изотропной пластинке* // Изв. РАН. Механ. тверд. тела. – 2000. – № 4. – С. 140–148.
6. Денисюк И.Т. *Напряженное состояние вблизи особой линии раздела сред* // Изв. РАН. Механ. тверд. тела. – 1995. – № 5. – С. 64–70.
7. Денисюк И.Т. *Напряжения вблизи конической точки поверхности раздела сред* // Изв. РАН. Механ. твердого тела. – 2001. – № 3. – С. 68–77.
8. Денисюк И.Т. *Особенность напряжений анизотропной пластинки с угловым вырезом* // Приклад. механ. – 1996. – № 1. – С. 48–52.
9. Денисюк И.Т. *Напряжения анизотропной пластинки с угловыми включениями* // Приклад. механ. – 1999. – № 2. – С. 76–84.
10. Поручиков В.Б. *Методы динамической теории упругости.* – М.: Наука, 1986. – 328 с.
11. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. *Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости.* – М.: Наука, 1976. – 662 с.
12. Новацкий В. *Теория упругости.* – М.: Мир, 1975. – 872 с.
13. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
14. Хуторянский Н.М. *О методе обобщенных запаздывающих потенциалов и интегральных уравнений в нестационарных динамических задачах теории упругости* // Приклад. пробл. прочности и пластичности. – 1978. – Вып. 9. – С. 8–18.
15. Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике.* – М.: Наука, 1979. – 318 с.
16. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т 1. – М.: Наука, 1970. – 608 с.
17. Партон В.З., Перлин П.И. *Методы математической теории упругости.* – М.: Наука, 1981. – 688 с.
18. Положий Г.М. *Уравнения математической физики.* – М.: Высш. школа, 1964. – 560 с.
19. Денисюк I.Т. *Термонапруження біля вершини кутового многогранного включення* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – № 3. – С. 41–47.
20. Денисюк I.Т. *Сингулярні напруження в ізотропній матриці з пружним клином* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – № 4. – С. 76–81.
21. Денисюк I.Т. *Напруження біля конічних та пірамідальних включень* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – № 3. – С. 16–20.
22. Вольтерра В. *Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1982. – 304 с.
23. Михлин С.Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.* – М.: Физматгиз, 1962. – 252 с.

Луцкий государственный
технический университет (Украина)

Поступила
07.12.2002