ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 2 (525)

УДК 517.956

С.А. АЛДАШЕВ

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДАРБУ–ПРОТТЕРА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ДАРБУ–ПУАССОНА

1. Постановка задач и основные результаты

Двумерные спектральные задачи для сингулярных гиперболических уравнений изучаются в [1]. Однако их многомерные аналоги, как нам известно, не исследованы.

Пусть D_ε — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,\dots,x_m,t)$, ограниченная поверхностями $|x|=t+\varepsilon$, $|x|=1-t$ и плоскостью $t=0$, где $|x|$ — длина вектора $(x_1,\dots,x_m)$, $0\leqslant t\leqslant(1-\varepsilon)/2$, а $0\leqslant\varepsilon<1$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_ε области D_ε, обозначим соответственно через S_ε, S_1 и S.

В области D_ε рассмотрим уравнение Эйлера–Дарбу–Пуассона

$$L_\alpha u\equiv\Delta_x u-u_{tt}-\frac{\alpha}{t}u_t=\mu u, \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1,\dots,x_m$, $m\geqslant 2$, α, μ — действительные числа.

Через $u_\alpha(x,t)$ обозначим решение уравнения (1) при данном α.

Рассмотрим следующие спектральные задачи Дарбу–Проттера для уравнения (1).

Задача 1. Найти в области D_ε решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u_\alpha|_S=0,\ \ u_\alpha|_{S_\varepsilon}=0\ \text{ при } \alpha<1; \tag{2}$$

$$\frac{u_\alpha}{\ln t}\Big|_S=0,\ \ u_\alpha|_{S_\varepsilon}=0\ \text{ при } \alpha=1; \tag{3}$$

$$t^{\alpha-1}u_\alpha|_S=0,\ \ u_\alpha|_{S_\varepsilon}=0\ \text{ при } \alpha>1. \tag{4}$$

Задача 2. Найти в области D_ε решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\ \ u_\alpha|_{S_\varepsilon}=0\ \text{ при } \alpha\geqslant 0; \tag{5}$$

$$\lim_{t\to 0}t^\alpha(u_\alpha-u_{\alpha,1})_t=0,\ \ u_\alpha|_{S_\varepsilon}=0\ \text{ при } \alpha<0, \tag{6}$$

где $u_{\alpha,1}(x,t)$ — решение задачи Коши для уравнения (1) с данными

$$u_{\alpha,1}(x,0)=\tau(x),\quad \frac{\partial}{\partial t}u_{\alpha,1}(x,0)=0.$$

Рассмотрим также задачи 1^* и 2^*, которые соответственно отличаются от задач 1 и 2 лишь тем, что вместо $u_\alpha|_{S_\varepsilon}=0$ задается $u_\alpha|_{S_1}=0$.

Задача Дарбу для многомерного волнового уравнения

$$\Delta_x u-u_{tt}=0 \tag{7}$$

предложена в [2].

Для дальнейшего удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m$, t к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$, t.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, \ldots$, — пространство Соболева.

Через $\overline{\tau}_n^k(r)$, $\overline{\nu}_n^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения по сферическим функциям $Y_{n,m}^k(\theta)$ соответственно функций $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$.

Через H_ε обозначим проекцию области D_ε на плоскость (r,t).

Теорема 1. *Задачи* 1 *и* 2 *в классе* $C(\overline{D}_\varepsilon \setminus S) \cap C^2(D_\varepsilon)$ *для каждого* μ *имеют счетное множество собственных функций* $\Leftrightarrow \varepsilon = 0$.

Теорема 2. $\forall \varepsilon \geqslant 0$ *при каждом* μ *задачи* 1^* *и* 2^* *вольтерровы.*

При $\alpha = 0$ эти теоремы доказаны в [3].

2. Приведение задач 1 и 2 к двумерным спектральным задачам Дарбу

В сферических координатах уравнение (1) имеет вид [4]

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r}\delta u - u_{tt} - \frac{\alpha}{t}u_t = \mu u, \tag{8}$$

где $\delta \equiv -\sum\limits_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j})$, $g_1 = 1$, $g_j = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1})^2$, $j > 1$. Так как искомое решение $u_\alpha \in C^2(D_\varepsilon)$, то его можно искать в виде ряда

$$u_\alpha(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \overline{v}_{\alpha,n}^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{9}$$

где $\overline{v}_{\alpha,n}^k(r,t)$ — функции, определенные ниже.

Подставив (9) в (8), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [4], получим уравнение

$$L_\alpha \overline{v}_{\alpha,n}^k \equiv \overline{v}_{\alpha,n\,rr}^k + \frac{m-1}{r}\overline{v}_{\alpha,n\,r}^k - \overline{v}_{\alpha,n\,tt}^k - \frac{\alpha}{t}\overline{v}_{\alpha,n\,t}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\overline{v}_{\alpha,n}^k = \mu\overline{v}_{\alpha,n}^k,$$
$$\lambda_n = n(n+m-2), \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

которое с помощью замены $\overline{v}_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2} v_n^k(r,t)$ сводится к уравнению

$$L_\alpha v_{\alpha,n}^k \equiv v_{\alpha,n\,rr}^k - v_{\alpha,n\,tt}^k - \frac{\alpha}{t}v_{\alpha,n\,t}^k + \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4r^2}v_{\alpha,n}^k = \mu v_{\alpha,n}^k. \tag{10}$$

Далее, из краевых условий (2)–(6) для функций $v_{\alpha,n}^k(r,t)$ соответственно будем иметь

$$v_{\alpha,n}^k(r,0) = 0, \;\; v_{\alpha,n}^k(r, r-\varepsilon) = 0, \;\; k = \overline{1,k_n}, \;\; n = 0, 1, \ldots, \alpha < 1; \tag{11}$$

$$\frac{v_{\alpha,n}^k}{\ln t}\Big|_{t=0} = 0, \;\; v_{\alpha,n}^k(r, r-\varepsilon) = 0, \;\; k = \overline{1,k_n}, \;\; n = 0, 1, \ldots, \alpha = 1; \tag{12}$$

$$(t^{\alpha-1}v_{\alpha,n}^k)|_{t=0} = 0, \;\; v_{\alpha,n}^k(r, r-\varepsilon) = 0, \;\; k = \overline{1,k_n}, \;\; n = 0, 1, \ldots, \alpha > 1; \tag{13}$$

$$\frac{\partial v_{\alpha,n}^k}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \;\; v_{\alpha,n}^k(r, r-\varepsilon) = 0, \;\; k = \overline{1,k_n}, \;\; n = 0, 1, \ldots, \alpha \geqslant 0; \tag{14}$$

$$\lim_{t\to 0} t^\alpha (v_{\alpha,n}^k - v_{\alpha,n}^{1,k}) = 0, \;\; v_{\alpha,n}^k(r, r-\varepsilon) = 0, \;\; k = \overline{1,k_n}, \;\; n = 0, 1, \ldots, \alpha < 0, \tag{15}$$

где $v_{\alpha,n}^{1,k}(r,t)$ — решение задачи Коши для уравнения (10) с данными

$$v_{\alpha,n}^{1,k}(r,0) = \tau_n^k(r), \quad \frac{\partial}{\partial t}v_{\alpha,n}^{1,k}(r,0) = 0.$$

Таким образом, задачи 1 и 2 сведены к двумерным спектральным задачам Дарбу в области H_ε для уравнения (10). Аналогичным образом сводятся задачи 1* и 2* к соответствующим двумерным спектральным задачам Дарбу. Решения этих задач будем изучать в §§ 4, 5.

Наряду с уравнением (10) рассмотрим уравнение

$$L_0 v_{0,n}^k \equiv v_{0,n\,rr}^k - v_{0,n\,tt}^k + \frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4r^2} v_{0,n}^k = \mu v_{0,n}^k, \tag{16}$$

которое с помощью замены $\xi = \frac{r+t}{2}, \eta = \frac{r-t}{2}$ сводится к уравнению

$$M v_{0,n}^k \equiv v_{0,n\,\xi\eta}^k + \frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4(\xi+\eta)^2} v_{0,n}^k = \mu v_{0,n}^k. \tag{17}$$

В [5], [6] решения задачи Коши для (17) с данными $v_{0,n}^k(\xi,\xi) = \tau_n^k(\xi)$, $(\frac{\partial v_{0,n}^k}{\partial \xi} - \frac{\partial v_{0,n}^k}{\partial \eta})|_{\xi=\eta} = \nu_n^k(\xi)$, $\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \xi \leqslant 1/2$, приведены к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\begin{aligned} v_{0,n}^k(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta) + \frac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta) + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_\eta^\xi \left[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta) - \tau_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)|_{\xi_1=\eta_1}\right]d\xi_1 + \\ + \mu\int_{1/2}^\xi\int_{\varepsilon/2}^\eta v_{0,n}^k(\xi_1,\eta_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)d\xi_1 d\eta_1, \end{aligned} \tag{18}$$

где $\tau_n^k(\xi) = (2\xi)^{(m-1)/2}\overline{\tau}_n^k(2\xi)$, $\nu_n^k(\xi) = \sqrt{2}(2\xi)^{(m-1)/2}\overline{\nu}_n^k(2\xi)$,

$$R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = P_{\mu_1}\left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+(\xi\eta+\xi_1\eta_1)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right] = P_{\mu_1}(z)$$

— функция Римана для уравнения $Mv_{0n}^k = 0$, $P_{\mu_1}(z)$ — функция Лежандра, $\mu_1 = n + \frac{m-3}{2}$, $\frac{\partial}{\partial N}|_{\xi_1=\eta_1} = (\frac{\partial \xi_1}{\partial N'}\frac{\partial}{\partial \eta_1} + \frac{\partial}{\partial N'}\frac{\partial}{\partial \xi_1})|_{\xi_1=\eta_1}$, N' — нормаль к прямой $\xi = \eta$ в точке (ξ_1,η_1), направленная в сторону полуплоскости $\eta \leqslant \xi$.

3. Функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (10) и (16)

Приведем сначала некоторые свойства оператора L_α, которые необходимы для дальнейших исследований:

1. если v_α — решение уравнения $L_\alpha v = \mu v$, то функция

$$v_{2-\alpha} = t^{\alpha-1}v_\alpha \tag{19}$$

является решением уравнения $L_{2-\alpha}v = \mu v$;

2. если v_α — решение уравнения $L_\alpha v = \mu v$, то функция

$$\frac{1}{t}\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = v_{\alpha+2} \tag{20}$$

будет решением уравнения $L_{2+\alpha}v = \mu v$;

3. оператор L_α обладает свойством

$$L_\alpha v_\alpha = t^{1-\alpha}L_{2-\alpha}(t^{\alpha-1}v_\alpha). \tag{21}$$

Указанные свойства устанавливаются аналогично тому, как они были доказаны для уравнения $L_\alpha u = 0$ в [7].

Из равенства (19) имеем

$$v_{2-\alpha-2p} = t^{\alpha+2p-1}v_{\alpha+2p}. \tag{22}$$

Применив к (22) p раз формулу (20), а затем (19), заключаем

$$v_{2-\alpha} = \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^p (t^{\alpha+2p-1} v_{\alpha+2p}). \tag{23}$$

Это соотношение является фундаментальной формулой [7] для решения задачи Коши.

Пусть $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ — наименьшие целые числа, удовлетворяющие неравенствам $k+2p \geqslant m-1$, $2-k+2q \geqslant m-1$.

Утверждение 1. *Если $v_{0,n}^{2,k}(r,t)$ — решение задачи Коши для уравнения (16), удовлетворяющее условию*

$$v_{0,n}^{2,k}(r,0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} v_{0,n}^{2,k}(r,0) = \nu_n^k(r),$$

то функция

$$v_{2,n}^{2,k}(r,t) = \gamma_{-\alpha} t^{-\alpha} \int_0^1 v_{0,n}^{2,k}(r,\xi t)\xi(1-\xi^2)^{-\frac{\alpha}{2}-1} d\xi \equiv \gamma_{-\alpha}\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) D_{0t^2}^{\alpha/2} v_{0,n}^{2,k}(r,t) \tag{24}$$

при $\alpha < 0$ будет решением уравнения (10), удовлетворяющим условию

$$v_{\alpha,n}^{2,k}(r,0) = 0, \quad \lim_{t\to 0} t^\alpha \frac{\partial}{\partial t} v_{\alpha,n}^{2,k} = \nu_n^k(r). \tag{25}$$

Если же $0 < \alpha < 1$, то функция

$$v_{\alpha,n}^{2,k}(r,t) = \gamma_{2-k+2q}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q \left[t^{1-k+2q}\int_0^1 v_{0,n}^{1,k}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}} d\xi\right] \equiv$$
$$\equiv \gamma_{2-\alpha+2q} 2^{q-1}\Gamma\left(q-\frac{\alpha}{2}+1\right) D_{0t^2}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\frac{v_{0,n}^{1,k}(r,t)}{t}\right] \tag{26}$$

является решением уравнения (10) с начальными данными (25), где $\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\gamma_\alpha = 2\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция, D_{0t}^α — оператор Римана–Лиувилля [7], а $v_{0,n}^{1,k}(r,t)$ — решение уравнения (16) с начальным условием $v_{0,n}^{1,k}(r,0) = \frac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\ldots(2q+1-\alpha)}$, $\frac{\partial}{\partial t} v_{0,n}^{1,k}(r,0) = 0$.

Утверждение 2. *Если $v_{0,n}^{1,k}(r,t)$ — решение задачи Коши для уравнения (16), удовлетворяющее условию*

$$v_{0,n}^{1,k}(r,0) = \tau_n^k(r), \quad \frac{\partial}{\partial t} v_{0,n}^{1,k}(r,0) = 0, \tag{27}$$

то функция

$$v_{\alpha,n}^{1,k}(r,t) = \gamma_\alpha \int_0^1 v_{0,n}^{1,k}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} d\xi \equiv 2^{-1}\gamma_\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) t^{1-\alpha} D_{0t^2}^{-\alpha/2}\left[\frac{v_{0,n}^{1,k}(r,t)}{t}\right] \tag{28}$$

при $\alpha > 0$ есть решение уравнения (10), удовлетворяющее условию (27).

Утверждение 3. *Если $v_{0,n}^{1,k}(r,t)$ — решение задачи Коши для уравнения (16), удовлетворяющее условию (27), то функция*

$$v_{1,n}^{1,k}(r,t) = \int_0^1 v_{0,n}^{1,k}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} \ln[t(1-\xi^2)] d\xi \tag{29}$$

является решением уравнения $L_1 v = \mu v$ с начальными данными $\frac{v_{1,n}^{1,k}}{\ln t}|_{t=0} = \tau_n^k(r)$.

Справедливость приведенных утверждений устанавливается аналогично их доказательству для уравнения $L_\alpha u = 0$ и волнового уравнения (7) ([8], [9], [10]).

Приведем некоторые следствия из утверждений 2, 3. Сначала рассмотрим случай $\alpha < 0$, $\alpha \neq -(2r+1)$, $r = 0, 1, \ldots$ Если $v_{0,n}^{1,k}(r,t)$ — решение задачи Коши для уравнения (16) с данными

$$v_{0,n}^{1,k}(r,0) = \frac{\tau_n^k(r)}{(1-\alpha)\ldots(\alpha+2p-1)}, \quad \frac{\partial}{\partial t} v_{0,n}^{1,k}(r,0) = 0, \tag{30}$$

то из утверждения 2 следует, что функция

$$v_{\alpha+2p,n}^{1,k}(r,t) = \gamma_{\alpha+2p} \int_0^1 v_{0,n}^{1,k}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}+2p-1} d\xi$$

является решением уравнения $L_{\alpha+2p} v = \mu v$, удовлетворяющим начальному условию (30).

Тогда из соотношений (23) и (19) вытекает, что функция

$$v_{\alpha,n}^{1,k}(r,t) = t^{1-\alpha}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^p (t^{\alpha+2p-1} v_{\alpha+2p,n}^{1,k}) \equiv \gamma_{k+2p} 2^{p-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+p\right) t^{1-\alpha} D_{0t^2}^{-\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{v_{0,n}^{1,k}(r,t)}{t}\right] \tag{31}$$

есть решение уравнения (10) и удовлетворяет условию (27).

Пусть теперь $\alpha = -(2r+1)$. Если $v_{0,n}^{1,k}(r,t)$ — решение задачи Коши для (16) с данными (27), то из (19), (23) и утверждения 3 нетрудно получить, что функция

$$v_{-(2r+1),n}^{1,k}(r,t) = t^{2(r+1)} \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{r+1} \left[\int_0^1 v_{0,n}^{1,k}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}} \ln(t(1-\xi^2)) d\xi\right] \tag{32}$$

является решением задачи Коши для $L_{-(2r+1)} v = \mu v$, удовлетворяющим условию (27).

Используя ([11], лемма 1.14.2), запишем соотношение (32), в виде

$$v_{-(2r+1),n}^{1,k}(r,t) = \frac{a}{2} t^{2(r+1)} D_{0t^2}^{\frac{1}{2}+r} \left[\frac{v_{0,n}^{1,k}(r,t)}{t}\right] d\xi, \tag{33}$$

$$a = \frac{1}{2}\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} - \ln t.$$

4. Доказательство теоремы 1 для задач 1 и 2

Пусть $\varepsilon = 0$. Рассмотрим задачу 1 в случае $\alpha < 1$. Учитывая формулы (24), (26), а также обратимость D_{0t}^{α} ([7], [11]), сведем задачу (10), (11) к спектральной задаче Дарбу для уравнения (16) с данными

$$v_{0,n}^k(r,0) = 0, \quad v_{0,n}^k(r,r) = 0, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1. \tag{34}$$

В [6] доказано, что задача (16), (34) приводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода вида

$$v_{0,n}^k(\xi,\eta) = \mu \int_\xi^{\frac{1}{2}} \int_0^\eta v_{0,n}^k(\xi_1,\eta_1) P_{\mu_1}(z) d\xi_1 d\eta_1 + f_n^k(\xi,\eta), \tag{35}$$

$$f_n^k(\xi,\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_\eta^\xi \xi_1^\beta P_{\mu_1}\left[\frac{\xi_1^2+\xi\eta}{\xi_1(\xi+\eta)}\right] d\xi_1 d\eta_1, \quad \beta = \mu_1 - 2(s+1) > \frac{m-1}{2}, \quad s = 0,1,\ldots$$

Следовательно, учитывая утверждение 1, найдем нетривиальные решения задачи (10), (11) в классе $C(\overline{H}_0) \cap C^2(H_0)$, при этом $v_{\alpha,n}^k(r,t) \equiv 0$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1$, и $v_{\alpha,n}^k(r,t) \neq 0$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 2,3,\ldots$

В случае $\alpha = 1$ решение задачи (10), (12) будем искать в виде $v_{1,n}^k = v_{1,n}^{1,k} + v_{1,n}^{2,k}$, где $v_{1,n}^{2,k}(r,t)$ — решение спектральной задачи Дарбу для (10) с условием

$$\frac{\partial}{\partial t} v_{1,n}^{1,k}(r,0) = 0, \quad v_{1,n}^{2,k}(r,r) = -v_{1,n}^{2,k}(r,r). \tag{36}$$

Тогда в силу (18), (29) получим $v_{1,n}^{2,k}(r,t) \equiv 0$. Аналогично, как в случае $\alpha < 1$, задача (10), (36) сводится к задаче для (16) с данными

$$\frac{\partial}{\partial t} v_{0,n}^{1,k}(r,0) = 0, \quad v_{0,n}^{2,k}(r,r) = 0, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\dots, \tag{37}$$

решение которой определяется из интегрального уравнения (35) ([6]), где в этом случае

$$f_n^k(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(\xi^\beta + \eta^\beta) - \frac{\xi - \eta}{2(\xi+\eta)} \int_\eta^\xi \xi_1^\beta P'_{\mu_1}\left[\frac{\xi_1^2 + \xi\eta}{\xi_1(\xi+\eta)}\right] d\xi, \tag{38}$$
$$\beta = \mu_1 - 2s > \frac{(m+3)}{2}, \quad s = 0,1,\dots$$

Следовательно, задача (10), (12) также имеет ненулевые решения.

В силу свойства (21) оператора L_α, а также с учетом формулы (19) задача (10), (13) сводится к исследованному случаю $\alpha < 1$.

Таким образом, из (35), (38) вытекает, что если $\varepsilon = 0$, то задача 1 для каждого μ имеет счетное множество собственных функций вида

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} r^{\frac{1-m}{2}} v_{\alpha,n}^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta). \tag{39}$$

Аналогично, как в [12], [13], можно показать, что полученное решение (38) принадлежит классу $C(\overline{D}_0 \setminus S) \cap C^2(D_0)$, если $l > \frac{3m}{2}$.

Теперь рассмотрим задачу 2, которая сведена к задачам (10), (14) и (10), (15). Если $\alpha \geqslant 0$, то из (28) следует, что задача (10), (14) сводится к задаче Дарбу для уравнения $L_0 v_{0,n}^k = \mu v_{0,n}^k$ с данными (37), решение которой также нетривиальное [6]. При $\alpha < 0$, $\alpha \neq -(2r+1)$, решение задачи (10), (15) будем искать в виде $v_{\alpha,n}^k = v_{\alpha,n}^{1,k} + v_{\alpha,n}^{2,k}$, где $v_{\alpha,n}^{2,k}(r,t)$ — решение задачи Коши для уравнения (10) с данными

$$v_{\alpha,n}^{2,k}(r,0) = 0, \quad \lim_{t\to 0} t^\alpha \frac{\partial}{\partial t} v_{\alpha,n}^{2,k} = 0, \tag{40}$$

а $v_{\alpha,n}^{1,k}(r,t)$ — решение задачи Дарбу для (10) с условием (36). Задача (10), (40) изучена в § 3 и т. к. $\nu_n^k(r) \equiv 0$, то из (18), (24) следует $v_{\alpha,n}^{2,k}(r,t) \equiv 0$. Задача (10), (36) в силу (31) приводится к задаче Дарбу для $L_0 v_{0,n}^{1,k} = \mu v_{0,n}^{1,k}$ с данными (37), имеющей также ненулевые решения [6]. Следовательно, учитывая утверждение 2, получим нетривиальные решения задач (10), (14) и (10), (15) при $\alpha < 0, \alpha \neq -(2r+1)$.

Если $\alpha = -(2r+1)$, то решение задачи (10), (15) ищем в виде $v_{\alpha,n}^k = v_{\alpha,n}^{1,k} + v_{\alpha,n}^{2,k}$, где $v_{\alpha,n}^{2,k}(r,t)$ — решение задачи Коши (10), (40), а $v_{\alpha,n}^{1,k}(r,t)$ — решение задачи Дарбу для (10) с условием (36). Так как $v_{\alpha,n}^{2,k}(r,t) \equiv 0$, то в силу (33) задача (10), (36) сводится к задаче Дарбу для $L_0 v_{0,n}^{1,k} = \mu v_{0,n}^{1,k}$ с данными (37), решение которой нетривиальное [6]. Значит, в этом случае задача (10), (15) также имеет ненулевые решения.

Таким образом, если $\varepsilon = 0$, установлено, что задача 2 при любом μ имеет счетное множество собственных функций вида (39), где $v_{\alpha,n}^k(r,t)$ определяются из двумерных спектральных задач Дарбу. Первая часть теоремы доказана.

Теперь переходим ко второй части теоремы. Пусть задача 1 и 2 для каждого μ имеет счетное множество собственных функций. Покажем, что $\varepsilon = 0$. Предположим противное, т. е. $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим задачу 1 и случай $\alpha < 1$. Тогда задача (10), (11) приводится к задаче Дарбу для (16) с данными $v^k_{0,n}(r,0) = 0$, $v^k_{0,n}(r, r-\varepsilon) = 0$, которая имеет нулевое решение [5].

В случае $\alpha = 1$ задача (10), (12) сводится к задаче Дарбу для (16) с условием $\frac{\partial}{\partial t} v^{1,k}_{0,n}(r,0) = 0$, $v^{1,k}_{0,n}(r, r-\varepsilon) = 0$, имеющей тривиальное решение [5].

Случай $\alpha > 1$ приводится к $\alpha < 1$.

Таким образом, показано, что если $\varepsilon > 0$, то $u(x,t) \equiv 0$ является решением задачи 1 в классе $C(\overline{D}_\varepsilon \setminus S) \cap C^2(D_\varepsilon)$.

Аналогично доказывается, что при $\varepsilon > 0$ задача 2 также имеет нулевое решение. Это приводит к противоречию. $\square$

5. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим задачу 1^* и пусть $\alpha < 1$. В этом случае задача 1^* приводится к спектральной задаче Дарбу для уравнения (10) с данными $v^k_{\alpha,n}(r,0) = 0$, $v^k_{\alpha,n}(r, 1-r) = 0$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, которая сводится к краевой задаче для (16) с условиями

$$v^k_{0,n}(r,0) = 0, \quad v^k_{0,n}(r, 1-r) = 0, \quad \varepsilon \leqslant r \leqslant 1. \tag{41}$$

При $\alpha = 1$ задача 1^* аналогично приводится к задаче Дарбу для (16) с данными

$$\frac{\partial}{\partial t} v^k_{0,n}(r,0) = 0, \quad v^k_{0,n}(r, 1-r) = 0, \quad \varepsilon \leqslant r \leqslant 1. \tag{42}$$

Если $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon > 0$, то, как показано в [6] и [5], задачи (16), (41) и (16), (42) имеют нулевые решения.

Случай $\alpha > 1$ сводится к $\alpha < 1$.

Таким образом, доказано, что $u(r, \theta, t) \equiv 0$ является решением задачи 1^*.

Теорема 2 для задачи 1^* доказана. Ее справедливость для задачи 2^* устанавливается аналогично. $\square$

Литература

1. Хе К.Ч. *О собственных функциях однородных краевых задач для эллиптического уравнения с операторами Бесселя* // Неклассич. уравнения матем. физ. – Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002. – С. 128–135.
2. Protter M.H. *New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type* // J. Rational Mech. and Analysis. – 1954. – V. 3. – P. 435–436.
3. Алдашев С.А. *Критерий существования собственных функций спектральной задачи Дарбу–Проттера для одного класса многомерных гиперболических уравнений* // Тез. III международн. науч. конф. “Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры”. – Актобе: АГУ, 2003. – С. 66–67.
4. Михлин С.Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.* – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
5. Алдашев С.А. *Некоторые задачи для многомерного интегро-дифференциального гиперболического уравнения* // Укр. матем. журн. – 2000. – Т. 52. – № 5. – С. 590–595.
6. Алдашев С.А. *Спектральные задачи Дарбу–Проттера для одного класса многомерных гиперболических уравнений* // Укр. матем. журн. – 2002. – Т. 54. – № 12. – С. 1101–1106.
7. Weinstein A. *On the wave equation and the equation of Euler–Poisson* // The Fifth Symposium in applied Math. McGraw-Hill. – New York, 1954. – P. 137–147.
8. Терсенов С.А. *Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе.* – Новосибирск: Изд-во Новосибирск. ун-та, 1973. – 143 с.
9. Алдашев С.А. *О некоторых краевых задачах для одного класса сингулярных уравнений в частных производных* // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12. – № 6. – С. 3–14.

10. Терсенов С.А. *Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени.* – Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982. – 167 с.
11. Нахушев А.М. *Элементы дробного исчисления и их применение.* – Нальчик: КБНЦ РАН, 2000. – 298 с.
12. Алдашев С.А. *Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений.* – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.
13. Алдашев С.А. *О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений* //Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 1. – С. 1–5.

Казахская академия
транспорта и коммуникаций

Поступила
07.08.2003