ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 5 (468)

УДК 517.929.4 : 519.21

Р.И. КАДИЕВ

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

В работе исследуется вопрос p-устойчивости ($1 \le p < \infty$) по части переменных решений нелинейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений по семимартингалу на основе подхода, изложенного в [1].

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\ge 0}, P)$ — стохастический базис ([2], с. 9); D^n — линейное пространство n-мерных предсказуемых ([2], с. 13) случайных процессов на $[0,+\infty[$, траектории которых почти наверное (п. н.) непрерывны справа и имеют предел слева; k^n — линейное пространство n-мерных $\mathcal{F}_0$-измеримых случайных величин; $Z = \mathrm{col}(z^1, \dots, z^m)$ есть m-мерный семимартингал ([2], с. 73); $L^n(Z)$ — линейное пространство предсказуемых $n \times m$-матриц на $[0,+\infty[$, строки которых локально интегрируемы по семимартингалу Z [3]; $\lambda : [0,+\infty[\to R_+$ — некоторая неубывающая функция; λ^* — мера, порожденная функцией λ; L_p^λ — линейное пространство скалярных функций на $[0,+\infty[$, суммируемых со степенью q при $1 \le q < \infty$ по мере λ^* и ограниченных в существенном при $q = \infty$ по мере λ^* ($L_q^t = L_q$); R^n — линейное пространство n-мерных векторов с нормой $|\cdot|$; $\|\cdot\|$ — норма $l \times n$-матрицы, согласованная с нормой $|\cdot|$; $\|\cdot\|_X$ — норма в нормированном пространстве X; E — символ математического ожидания; $1 \le p < \infty$; $1 \le q \le \infty$; $1 \le k < n$, $\gamma_i : [0,+\infty[\to R^1$ — положительная функция при $i = 1,2$; $\xi : [0,+\infty[\to R^1$ — неотрицательная локально суммируемая по мере λ^* функция; B — линейное нормированное подпространство пространства $L^n(Z)$.

В дальнейшем предположим, что семимартингал Z имеет п. н. непрерывные траектории и представим в виде $Z = b + c$, где b — предсказуемый случайный процесс локально ограниченной вариации, а c — локально квадратично интегрируемый мартингал ([2], с. 28). Кроме того, все компоненты процесса b и взаимные характеристики $\langle c^i, c^j\rangle$ ([2], с. 48) всех компонент мартингала c будем предполагать абсолютно непрерывными относительно меры λ^*. Последнее означает, что

$$b^i = \int_0^\cdot a^i d\lambda, \quad \langle c^i, c^j\rangle = \int_0^\cdot A^{ij} d\lambda \quad (i,j = 1,\dots,m).$$

Пусть $a = \mathrm{col}(a^1,\dots,a^m)$, $A = [A^{ij}]$ — $n \times m$-матрица. Известно [3], что в этом случае пространство $L^n(Z)$ состоит из предсказуемых $n \times m$-матриц H, для которых выполнено неравенство $\int_0^t (|Ha| + \|HAH^\top\|) d\lambda < \infty$ п. н. для любого $t \ge 0$ и $\int_0^t HdZ = \int_0^t Hdb + \int_0^t Hdc$. Кроме того, имеет место неравенство $\Big(E\Big|\int_0^t HdZ\Big|^{2p}\Big)^{1/2p} \le \Big(E\Big(\int_0^t |Ha|d\lambda\Big)^{2p}\Big)^{1/2p} + c_p\Big(E\Big(\int_0^t \|HAH^\top\|d\lambda\Big)^p\Big)^{1/2p}$, где c_p — положительное число, зависящее от p ([2], с. 65).

Для любых $x \in D^n$ и $f \in L^n(Z)$ $y = \mathrm{col}(x^1,\dots,x^k)$, $h = \mathrm{col}(x^{k+1},\dots,x^n)$, $f^y = \mathrm{col}(f^1,\dots,f^k)$, $f^h = \mathrm{col}(f^{k+1},\dots,f^n)$ ($f^y \in L^k(Z)$, $f^h \in L^{n-k}(Z)$, $f = \mathrm{col}(f^y, f^h)$). Введем следующие нормированные пространства:

$$k_p^n = \{\alpha : \alpha \in k^n,\ E|\alpha|^p < \infty\}$$

с нормой $\|\alpha\|_{k_p^n}=(E|\alpha|^p)^{1/p}$;

$$M_p^{\gamma_1,\gamma_2}=\{x : x\in D_p^n,\ \ \sup_{t\geq 0}E|\gamma_1(t)y(t)|^p+\sup_{t\geq 0}E|\gamma_2(t)h(t)|^p<\infty\}$$

с нормой $\|x\|_{M_p^{\gamma_1,\gamma_2}}=(\sup\limits_{t\geq 0}E|\gamma_1(t)y(t)|^p)^{1/p}+(\sup\limits_{t\geq 0}E|\gamma_2(t)h(t)|^p)^{1/p}$ $(M_p^{1,1}=M_p)$;

$$\Lambda_{p,q}^n(\xi)=\{H : H\in L^n(Z),\ (E|Ha|^p)^{1/p}\xi^{1/q-1},\ (E\|HAH^\top\|^{p/2})^{1/p}\xi^{1/q-1/2}\in L_q^\lambda\}$$

с нормой $\|H\|_{\Lambda_{p,q}^n(\xi)}=\|(E|Ha|^p)^{1/p}\xi^{1/q-1}\|_{L_q^\lambda}+\|(E\|HAH^\top\|^{p/2})^{1/p}\xi^{1/q-1/2}\|_{L_q^\lambda}$;

$$(\Lambda_{p,q}^n(\xi))^{\gamma_1,\gamma_2}=\{f : f\in L^n(Z),\ \gamma_1 f^y\in\Lambda_{p,q}^k(\xi),\ \gamma_2 f^h\in\Lambda_{p,q}^{n-k}(\xi)\}$$

с нормой $\|f\|_{(\Lambda_{p,q}^n(\xi))^{\gamma_1,\gamma_2}}=\|\gamma_1 f^y\|_{\Lambda_{p,q}^k(\xi)}+\|\gamma_2 f^h\|_{\Lambda_{p,q}^{n-k}(\xi)}$.

Рассмотрим уравнение

$$dx(t)=[(Qx)(t)+g(t)]dZ(t),\quad t\geq 0, \tag{1}$$

где $g\in L^n(Z)$, а $Q : D^n\to L^n(Z)$ — k^1-линейный [4] оператор. Предполагается, что для любого $\alpha\in k^n$ существует единственное (с точностью до P-эквивалентности) решение $x(t)$ уравнения (1) такое, что $x(0)=\alpha$. Для этого решения имеет место представление

$$x(t)=U(t)x(0)+(Wg)(t),\quad t\geq 0, \tag{2}$$

где U — фундаментальная матрица, а W — оператор Коши для уравнения (1) [4].

Обозначим через D_p^n линейное пространство, определенное равенством (2) при $g\in B$, $x(0)\in k_p^n$. В дальнейшем будем предполагать, что пространство решений уравнения (1) D_p^n при $f\in B$, $x(0)\in k_p^n$ является подпространством $M_p^{\gamma_1,\gamma_2}$ при некоторых функциях γ_1, γ_2. Тогда очевидно, что D_p^n — линейное нормированное пространство. Кроме того, через $\widehat{D}_p^n$ обозначим замыкание пространства D_p^n.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим задачу Коши

$$dx(t)=[(Vx)(t)+f(t)]dZ(t),\quad t\geq 0, \tag{3}$$

$$x(0)=\alpha, \tag{4}$$

где $V : D^n\to L^n(Z)$ — k^1-линейный оператор такой, что $V : D_p^n\to B$, $f\in L^n(Z)$, $\alpha\in k^n$.

Предположим, что задача (3), (4) имеет единственное решение $x_f(t,\alpha)$ при любых $\alpha\in k^n$, $f\in L^n(Z)$.

Определение 1. Будем говорить, что уравнение (3) D_p^n-устойчиво, если задача (3), (4) имеет единственное решение $x_f(\cdot,\alpha)\in D_p^n$ при любых $f\in B$, $\alpha\in k_p^n$, и это решение непрерывно зависит от $\{f,\alpha\}$, т. е. для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что $\|x_{f_1}(\cdot,\alpha_1)-x_{f_2}(\cdot,\alpha_2)\|_{D_p^n}<\varepsilon$, если $\|f_1-f_2\|_B<\delta$, $\|\alpha_1-\alpha_2\|_{k_p^n}<\delta$.

Рассмотрим задачу Коши для нелинейного стохастического функционально-дифференциального уравнения

$$dx(t)=[(\overline{N}x)(t)+f(t)]dZ(t),\quad t\geq 0, \tag{5}$$

$$x(0)=\alpha, \tag{6}$$

где $\overline{N} : D_p^n\to B$, $f\in B$, $\alpha\in k_p^n$.

Определение 2. Пусть $(\overline{N}0)(t)=0$. Уравнение (5) назовем локально D_p^n-устойчивым, если можно указать такое $\delta_0>0$, что для каждой пары $\{f,\alpha\}\in B\times k_p^n$, удовлетворяющей условиям $\|f\|_B<\delta_0$, $\|\alpha\|_{k_p^n}<\delta_0$, задача (5), (6) имеет единственное решение $x_f(\cdot,\alpha)\in D_p^n$ и для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(x_f(\cdot,\alpha),\varepsilon)>0$, что $\|x_{f_1}(\cdot,\alpha_1)-x_{f_2}(\cdot,\alpha_2)\|_{D_p^n}<\varepsilon$, если $\|f_1-f_2\|_B<\delta$, $\|\alpha_1-\alpha_2\|_{k_p^n}<\delta$ и $\|f_1\|_B<\delta_0$, $\|\alpha_1\|_{k_p^n}<\delta_0$.

Отметим, что если уравнение (5) локально D_p^n-устойчиво, то тривиальное решение уравнения $dx(t) = (\overline{N}x)(t)dZ(t)$, $t \geq 0$, p-устойчиво по первым k компонентам, если $\gamma_1(t) = 1$, асимптотически p-устойчиво по первым k компонентам, если $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma_1(t) = +\infty$, и экспоненциально p-устойчиво по первым k компонентам, если $\gamma_1(t) = \exp\{\beta t\}$, $\beta > 0$. При этом асимптотика остальных $n-k$ компонентов решения задачи Коши (5), (6) $x_f(t,\alpha)$ при $\|f\|_B < \delta_0$, $\|\alpha\|_{k_p^n} < \delta_0$ (δ_0 — некоторое число из определения 2) определяется весом $\gamma_2(t)$.

Укажем некоторые уравнения вида (1) и подпространства B пространства $L^n(Z)$, для которых выполняется условие $D_p^n \subset M_p^{\gamma_1,\gamma_2}$ при некоторых функциях γ_1 и γ_2.

Возьмем уравнение

$$dx(t) + A\xi(t)x(t)d\lambda(t) = g(t)dZ(t), \quad t \leq 0, \tag{7}$$

где A — диагональная матрица такая, что $a^{ii} = \overline{\alpha}$ при $i = 1,\dots,k$, $\overline{\alpha}$ — некоторое положительное число, $a^{ii} = \overline{\alpha}_1$ при $i = k+1,\dots,n$, $\overline{\alpha}_1$ — отрицательное число. Разумеется, выбор подпространств B пространства $L^n(Z)$, для которых $D_p^n \subset M_p^{\gamma_1,\gamma_2}$, существенно зависит от ξ и A. Справедлива

Теорема 1. *Если* $B = (\Lambda_{2p,q}^n(\xi))^{\gamma_1,\gamma_2}$, *где* $\gamma_1(t) = \exp\left\{\beta_1 \int\limits_0^t \xi(s)d\lambda(s)\right\}$, $\beta_1 \in [0,\overline{\alpha}[$, $\gamma_2(t) = \exp\left\{\beta_2 \int\limits_0^t \xi(s)d\lambda(s)\right\}$, $\beta_2 \in [-\infty,\overline{\alpha}_1[$, *то для уравнения* (1) *имеем* $D_{2p}^n \subset M_{2p}^{\gamma_1,\gamma_2}$.

Доказательство. Если в уравнении (1) сделаем замену $x(t) = B(t)\psi(t)$, где $b^{ii}(t) = 1$ при $i = 1,\dots,k$, $b^{ii}(t) = \exp\left\{(\overline{\alpha}-\overline{\alpha}_1)\int\limits_0^t \xi(s)d\lambda(s)\right\}$ при $i = k+1,\dots,n$, а остальные элементы матрицы $B(t)$ равны нулю, то получим уравнение

$$d\psi(t) + \overline{\alpha}\xi(t)\psi(t)d\lambda(t) = \overline{g}(t)dZ(t), \quad t \geq 0. \tag{8}$$

Решение $\psi_{\overline{g}}(\cdot,\alpha)$ уравнения (8) при $\overline{g} \in (\Lambda_{2p,q}^n(\xi))^{\gamma}$, где $\gamma(t) = \exp\left\{\beta \int\limits_0^t \xi(s)d\lambda(s)\right\}$, β — любое положительное число такое, что $0 \leq \beta < \overline{\alpha}$, $\alpha \in k_{2p}^n$, принадлежит пространству M_{2p}^{γ}. Это следует из [4]. Тогда для уравнения (7) решение $x_g(\cdot,\alpha)$ при $g \in (\Lambda_{2p,q}^n(\xi))^{\gamma_1,\gamma_2}$, $\alpha \in k_{2p}^n$ принадлежит пространству $M_{2p}^{\gamma_1,\gamma_2}$. $\square$

Перейдем к уравнению Ито с "максимумом". Будем считать, что $Z(t) = \mathrm{col}(t,\mathcal{W}^1(t),\dots,\mathcal{W}^{(m-1)}(t))$, где $\mathcal{W}^i$ $(i = 1,\dots,m-1)$ — независимые, стандартные винеровские процессы. В этом случае $\lambda(t) = t$, $a = \mathrm{col}(1,0,\dots,0)$, $A = \mathrm{diag}[0,1,\dots,1]$.

Рассмотрим уравнение

$$dx(t) = [(Vx)(t) + (Fx)(t) + f(t)]dZ(t), \quad t \geq 0, \tag{9}$$

где $f \in B$, $V : D_p^n \to B$ — k^1-линейный оператор, $Fx \stackrel{\mathrm{def}}{=} T\{x, S_1^{\varphi}x,\dots,S_r^{\varphi}x\}$ и $T : \widehat{D}_p^n \to B$ — нелинейный оператор, а оператор $S_d^{\varphi}x$ определен равенством $S_d^{\varphi}x \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{col}(S_d^{\varphi^1}x^1,\dots,S_d^{\varphi^n}x^n)$, где $(S_d^{\varphi^i}x^i)(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\limits_{s\in[h_{id}(t),\, g_{id}(t)]} (E|\widehat{x}^i(s)|^{2p})^{1/2p}$,

$$\widehat{x}^i(s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} x^i(s), & \text{если } s \geq 0; \\ \varphi^i(s), & \text{если } s < 0, \end{cases}$$

$x = \mathrm{col}(x^1,\dots,x^n)$, $\varphi = \mathrm{col}(\varphi^1,\dots,\varphi^n)$, $h_{id}, g_{id} : [0,+\infty[\to R^1$ — измеримые по Лебегу функции такие, что $h_{id}(t) \leq g_{id}(t)$ при всех $t \geq 0$, $\varphi^i :]-\infty,0[\times\Omega \to R^1$ — случайный процесс с п. н. непрерывными траекториями, $\sup\limits_{t<0}(E|\varphi^i(t)|^{2p})^{1/2p} < \infty$ при $i = 1,\dots,n$, $d = 1,\dots,r$. В качестве уравнения (1) возьмем уравнение (7) с $\xi(t) \equiv 1$, $t \geq 0$, $B = (\Lambda_{2p,\infty}^n(1))^{\gamma_1,\gamma_2}$, $\gamma_1(t) = \exp\{\beta_1 t\}$, $\beta_1 \in [0,\overline{\alpha}[$, $\gamma_2(t) = \exp\{\beta_2 t\}$, $\beta_2 \in]-\infty,\overline{\alpha}_1[$, $B^1 = (L_\infty^n)^{\gamma_1,\gamma_2} = \{f : f$ — n-мерная измеримая функция на $[0,+\infty[$ такая, что $\gamma_1 f^y = \gamma_1 \operatorname{col}(f^1,\dots,f^k) \in L_\infty^k$, $\gamma_2 f^h = \gamma_2 \operatorname{col}(f^{k+1},\dots,f^n) \in L_\infty^{n-k}\}$ — линейное пространство с нормой $\|f\|_{B^1} = \|\gamma_1 f^y\|_{L_\infty^k} + \|\gamma_2 f^h\|_{L_\infty^{n-k}}$. Тогда по теореме 1 имеем $D_{2p}^n \subset M_{2p}^{\gamma_1,\gamma_2}$.

Замечание. Так как рассматривается уравнение Ито, то в дальнейшем все случайные процессы прогрессивно измеримы. Кроме того, ясно, что любой случайный процесс из пространства $\widehat{D}_{2p}^n$ прогрессивно измерим и его траектории п. н. непрерывны.

Теорема 2. *Пусть существует такое $\delta > 0$, что $0 \le t - h_{id}(t) \le \delta$ при всех $t \ge 0$ и всех $i = 1,\dots,k$, $d = 1,\dots,r$. Тогда при любом $\beta_1 > 0$, $\beta_2 < 0$ для всех $x_1, x_2 \in \widehat{D}_p^n$ справедливо неравенство*

$$\|S_d^0 x_1 - S_d^0 x_2\|_{B^1} \le \exp\{\beta_1\delta\}\|x_1 - x_2\|_{\widehat{D}_{2p}^n} \tag{10}$$

для $d = 1,\dots,r$.

Доказательство. В силу леммы 3 из [1] для любых $x \in \widehat{D}_{2p}^n$, d $(1 \le d \le r)$ функция $S_d^0 x$ измерима. Более того, очевидно, что функция $S_d^0 x$ принадлежит пространству B^1 при любых $\beta_1 > 0$, $\beta_2 < 0$. Пусть $x_1, x_2 \in \widehat{D}_p^n$, тогда $y_i = \operatorname{col}(x_i^1,\dots,x_i^k)$, $h_i = \operatorname{col}(x_i^{k+1},\dots,x_i^n)$, $y_i(t) = \zeta_{\beta_1}(t) y_{i\beta_1}(t)$, $h_i(t) = \zeta_{\beta_2}(t) h_{i\beta_2}(t)$ при $i = 1,2$, где $\zeta_{\beta_1}(t) \overset{\text{def}}{=} \exp\{-\beta_1 t\}$, $\zeta_{\beta_2}(t) \overset{\text{def}}{=} \exp\{-\beta_2 t\}$, $y_{i\beta_1} \in M_{2p}$, $h_{i\beta_2} \in M_{2p}$, $y_{i\beta_1} = \operatorname{col}(x_{i\beta_1}^1,\dots,x_{i\beta_1}^k)$, $h_{i\beta_2} = \operatorname{col}(x_{i\beta_2}^{k+1},\dots,x_{i\beta_2}^n)$ при $i = 1,2$, $d^i(t) \overset{\text{def}}{=} |(S_d^0 x_1^i)(t) - (S_d^0 x_2^i)(t)|\exp\{\beta_1 t\}$ при $i = 1,\dots,k$, $d = 1,\dots,r$, $d^i(t) \overset{\text{def}}{=} |(S_d^0 x_1^i)(t) - (S_d^0 x_2^i)(t)|\exp\{\beta_2 t\}$ при $i = k+1,\dots,n$, $d = 1,\dots,r$. Таким образом, для функции d^i при всех $t \ge 0$ имеем

$$d^i(t) \le \exp\{\beta_1\delta\}(S_d^0|x_{1\beta_1}^i - x_{2\beta_1}^i|)(t)$$

при $i = 1,\dots,k$, $d = 1,\dots,r$. Это неравенство получено в ходе доказательства леммы 4 из [1]. А для функции d^i при $i = k+1,\dots,n$ и всех $t \ge 0$ имеем

$$\begin{aligned} d^i(t) &\le \exp\{\beta_2 t\}|(S_d^0(\zeta_{\beta_2} x_{1\beta_2}^i))(t) - (S_d^0(\zeta_{\beta_2} x_{2\beta_2}^i))(t)| \le \exp\{\beta_2 t\}(S_d^0(\zeta_{\beta_2}|x_{1\beta_2}^i - x_{2\beta_2}^i|))(t) \le \\ &\le \exp\{\beta_2 t\}(S_d^0\zeta_{\beta_2})(t)(S_d^0|x_{1\beta_2}^i - x_{2\beta_2}^i|)(t) \le (S_d^0|x_{1\beta_2}^i - x_{2\beta_2}^i|)(t) \end{aligned}$$

при $d = 1,\dots,r$. Тогда

$$\begin{aligned} &\|S_d^0 x_1 - S_d^0 x_2\|_{B^1} \le \operatorname*{vrai\,sup}_{t\ge0}(E|\operatorname{col}(d^1(t),\dots,d^n(t))|^{2p})^{1/2p} \le \\ &\le \exp\{\beta_1\delta\}\sup_{t\ge0}(E|y_{1\beta_1}(t) - y_{2\beta_1}(t)|^{2p})^{1/2p} + \sup_{t\ge0}(E|h_{1\beta_2}(t) - h_{2\beta_2}(t)|^{2p})^{1/2p} \le \exp\{\beta_1\delta\}\|x_1 - x_2\|_{\widehat{D}_p^n} \end{aligned}$$

при $d = 1,\dots,r$. $\square$

Неравенство (10) позволяет применить теорему $1'$ из [1] к уравнению (9). Заметим, что если уравнение $dx(t) = [(Vx)(t) + f(t)]dZ(t)$, $t \ge 0$, D_{2p}^n-устойчиво, то оператор Коши K этого уравнения действует из пространства B в пространство D_{2p}^n и ограничен. Пусть в дальнейшем оператор T действует из пространства $D_p^n \times (B^1)^r$ в пространство B. Тогда из теоремы $1'$ работы [1] получим

Следствие. Пусть при некоторых $\beta_1 \in [0,\overline{\alpha}[$, $\beta_2 \in]-\infty,\overline{\alpha}_1[$ уравнение $dx(t) = [(Vx)(t) + f(t)]dZ(t)$, $t \ge 0$, D_{2p}^n-устойчиво, $\widehat{c} \overset{\text{def}}{=} \|K\|_{B\to D_{2p}^n}$. Кроме того, $T\{0,\dots,0\} = 0$ и существуют такие постоянные $\delta' > 0$, $\delta > 0$, $k_i > 0$ $(i = 0,\dots,r)$, что $t - h_{id}(t) \le \delta$ при всех $t \ge 0$ и всех $i = 1,\dots,n$, $d = 1,\dots,r$,

$$\|T\{u_0^2,\dots,u_r^2\} - T\{u_0^1,\dots,u_r^1\}\|_B \le k_0\|u_0^2 - u_0^1\|_{D_{2p}^n} + \sum_{d=1}^r k_d\|u_d^2 - u_d^1\|_{B^1}$$

для всех $u_0^i \in D_{2p}^n$, $\|u_0^i\|_{D_{2p}^n} \le \delta'$ при $i = 1,2$, $u_d^i \in B^1$, $\|u_d^i\|_{B^1} \le \delta'$ при $i = 1,2$, $d = 0,\dots,r$, причем $\widehat{c}\Big(k_0 + \exp\{\beta_1\delta\} \sum\limits_{d=1}^{r} k_d\Big) < 1$. Тогда при данных β_1, β_2 уравнение $dx(t) = [(Vx)(t) + (T\{x, S_1^0 x, \dots, S_r^0 x\})(t) + f(t)]dZ(t)$, $t \ge 0$, локально D_{2p}^n-устойчиво.

В качестве примера рассмотрим систему двух скалярных уравнений (9) вида

$$dx(t) = [(Vx)(t) + (Fx)(t) + f(t)]dZ(t), \quad t \ge 0, \tag{11}$$

где $(Vx)(t) = (Ax(t), \overline{0}, \dots, \overline{0})$, A — 2×2-матрица, $a^{11} = -\widehat{q}$, $a^{22} = \widehat{q}$, $a^{12} = a^{21} = 0$, $\overline{0}$ — двумерный нулевой вектор-столбец, $(Fx)(t) = \Big(\sum\limits_{d=1}^{r_1} q_{1d}((S_{1d}^0 x)(t)), \dots, \sum\limits_{d=1}^{r_m} q_{md}((S_{md}^0 x)(t))\Big)$, $(S_{jd}^0 x)(t) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{col}((S_d^0 x^1)(t), (S_d^0 x^2)(t))$, $(S_{jd}^0 x^i)(t) \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{s \in [h_{jd}^i(t),\, g_{jd}^i(t)]} (E|\widehat{x}^i(s)|^{2p})^{1/2p}$,

$$\widehat{x}^i(s) = \begin{cases} x^i(s), & \text{если } s \ge 0; \\ 0, & \text{если } s < 0, \end{cases}$$

$h_{jd}^i, g_{jd}^i : [0, +\infty[\to R^1$ — измеримые функции, $h_{jd}^i(t) \le g_{jd}^i(t)$ при $i = 1,2$, $j = 1,\dots,m$, $d = 1,\dots,r_j$ и $t - h_{jd}^1(t) \le \delta$ при всех $t \ge 0$ и некотором $\delta > 0$, $q_{jd} : R^2 \to R^2$ — такая функция, что $q_{jd}(\overline{0}) = \overline{0}$ при $j = 1,\dots,m$, $d = 1,\dots,r_j$, $\widehat{q}$ — некоторое положительное число.

В качестве уравнения (1) возьмем уравнение (7) с $n = 2$, $k = 1$, $\xi(t) = 1$, $t \ge 0$, $B = (\Lambda_{2p,\infty}^2(1))^{\gamma_1,\gamma_2}$, $\gamma_1(t) = \exp\{\beta_1 t\}$, $\beta_1 \in [0, \overline{\alpha}[$, $\gamma_2(t) = \exp\{\beta_2 t\}$, $\beta_2 \in]-\infty, \overline{\alpha}_1[$. Тогда $D_{2p}^2 \subset M_{2p}^{\gamma_1,\gamma_2}$, уравнение $dx(t) = [(Vx)(t) + f(t)]dZ(t)$, $t \ge 0$, D_{2p}^2-устойчиво при некоторых $\beta_1 \in [0, \widehat{q}[$ $(\widehat{q} < \overline{\alpha})$, $\beta_2 \in]-\infty, -\overline{q}[$, $\overline{q} = \max\{\widehat{q}, -\overline{\alpha}_1\}$. В дальнейшем положим $\beta_2 = -2\widehat{q} + \beta_1$. Тогда $\widehat{c} \overset{\text{def}}{=} \|K\|_{B \to D_{2p}^1} \le 1/(\widehat{q} - \beta_1) + c_p(m-1)/(2(\widehat{q} - \beta_1)^{1/2})$ (здесь и в дальнейшем c_p — некоторое число, зависящее от p ([5], с. 117, неравенство 3.1), $c_1 = 1$). Кроме того, если для всех $u^2, u^1 \in R^2$ имеем $|q_{jd}(u^2) - q_{jd}(u^1)| \le \widehat{q}_{jd}|u^2 - u^1|$, где $\widehat{q}_{jd} \in R^1$ при всех $j = 1,\dots,m$, $d = 1,\dots,r_j$, и выполнено неравенство

$$\frac{\widehat{q}}{1 + c_p(m-1)\sqrt{\widehat{q}/2}} > \sum_{d=1}^{r_1} \widehat{q}_{1d} + c_p \sum_{j=2}^{m} \sum_{d=1}^{r_m} \widehat{q}_{jd}^2,$$

то при достаточно малом $\beta_1 > 0$ выполняется неравенство $\widehat{c}\exp\{\beta_1\delta\}\Big(\sum\limits_{d=1}^{r_1} \widehat{q}_{1d} + c_p \sum\limits_{j=2}^{m} \sum\limits_{d=1}^{r_m} \widehat{q}_{jd}^2\Big) < 1$, которое гарантирует в силу следствия при некотором $\beta_1 > 0$ локальную D_{2p}^2-устойчивость уравнения (11). Отсюда следует

Теорема 3. *Пусть для всех $u^2, u^1 \in R^1$ имеем $|q_{jd}(u^2) - q_{jd}(u^1)| \le \widehat{q}_{jd}|u^2 - u^1|$, где $q_{jd} \in R^1$ при всех $j = 1,\dots,m$, $d = 1,\dots,r_j$, и выполнено неравенство*

$$\widehat{q}(1 + c_p(m-1)\sqrt{\widehat{q}/2}) > \sum_{d=1}^{r_1} \widehat{q}_{1d} + c_p \sum_{j=2}^{m} \sum_{d=1}^{r_j} \widehat{q}_{jd}^2,$$

тогда тривиальное решение уравнения (11) *локально D_{2p}^2-устойчиво при некотором $\beta_1 > 0$ (экспоненциально $2p$-устойчиво по первой компоненте).*

Литература

1. Кадиев Р.И. *К вопросу об устойчивости стохастических функционально-дифференциальных уравнений по первому приближению* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 10. – С. 3–8.
2. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. *Теория мартингалов.* – М.: Наука, 1986. – 512 с.
3. Jacod J. *Integrales stochastiques par rapport a une cemimartingale vektorielle et changement de filtration* // Lect. Notes Math. – 1980. – V. 784. – P. 161–172.

4. Кадиев Р.И., Поносов А.В. *Устойчивость линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений при постоянно действующих возмущениях* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 2. – С. 198–207.
5. Ватанабэ С., Икэда Н. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.* – М.: Наука, 1981. – 445 с.

Дагестанский государственный университет

Поступила 30.04.1999