ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 1 (524)

УДК 514.763

Б.М. ДУБРОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНТАКТНЫХ ИНВАРИАНТОВ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Полная система инвариантов линейного дифференциального уравнения произвольного порядка относительно замен переменных, сохраняющих класс линейных уравнений, была построена Э. Вильчинским [1] в начале прошлого века. Этот результат был обобщен в [2] на случай систем линейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений вида

$$y^{(k+1)} + P_k(x)y^{(k)} + \cdots + P_0(x)y(x) = 0, \tag{1}$$

где $y(x)$ — неизвестная $\mathbb{R}^m$-значная функция, а коэффициенты $P_i(x)$ лежат в $\operatorname{End}(\mathbb{R}^m)$. Подходящей заменой переменных вида $(x, y) \mapsto (\lambda(x), \mu(x)y)$ любое линейное уравнение может быть приведено к канонической форме Лагерра–Форсайта, определенной условиями $P_k = 0$ и $\operatorname{tr} P_{k-1} = 0$. В случае, если уравнение приведено к такой канонической форме, выражения

$$\Theta_n = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \frac{(2n-j-1)!(k-n+j)!}{(n-j)!(j+1)!} P_{k-n+j}^{(j-1)},$$

$n = 2, \ldots, k+1$, являются $\operatorname{End}(\mathbb{R}^m)$-значными относительными инвариантами системы (1).

В [2] показано, что эти инварианты по сути сводятся к инвариантам непараметризованных невырожденных кривых в грассмановых многообразиях $\operatorname{Gr}_m(\mathbb{R}^{k+1} \otimes \mathbb{R}^m)$. С использованием этого подхода доказывается

Теорема 1. *Инварианты Θ_n, $n = 2, \ldots, k+1$, полиномиальны относительно коэффициентов матриц $P_i^{(j)}(x)$.*

Применяя линеаризацию произвольных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), показываем, что эти инварианты обобщаются на нелинейный случай и продолжаются до относительных инвариантов систем нелинейных дифференциальных уравнений произвольного порядка с точностью до контактной группы преобразований.

А именно, рассмотрим произвольную нелинейную систему дифференциальных уравнений, разрешенную относительно старших производных

$$y_i^{(k+1)} = F_i(x, y_s^{(r)}), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Обозначим через

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{k-1} y_j^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial y_j^{(i)}} + \sum_{j=1}^{m} F_j \frac{\partial}{\partial y_j^{(k)}}$$

оператор полного дифференцирования.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{P}_r = -\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j^{(r)}}\right)_{i,j=1,\ldots,m}$ для всех $r = 0, \ldots, k$. Тогда выражения, полученные из инвариантов Θ_n, $n = 2, \ldots, k+1$, формальной подстановкой матриц $D^j(\mathcal{P}_r)$ вместо матриц $P_r^{(j)}$, являются контактными инвариантами системы* (2).

Будем называть инварианты, описываемые данной теоремой, *обобщенными инвариантами Вильчинского* и обозначать их через W_n, $n = 2, \ldots, k+1$, соответственно.

Замечание 1. В случае $m \geq 2$ все контактные преобразования систем ОДУ сводятся к точечным ([3], с. 147), и, таким образом, в случае систем ОДУ обобщенные инварианты Вильчинского устойчивы относительно точечных преобразований.

Замечание 2. В случае одного ОДУ первый нетривиальный инвариант Вильчинского появляется у уравнений порядка 3, т. к. все линейные уравнения второго порядка приводятся к тривиальному уравнению $y'' = 0$ подходящей заменой переменных вида $(x, y) \mapsto (\lambda(x), \mu(x)y)$. (Построение такого преобразования сводится, вообще говоря, к решению уравнения Риккати и не может быть проведено в квадратурах.) Аналогично, хорошо известно ([4], с. 356), что все нелинейные ОДУ 2-го порядка контактно эквивалентны и не могут иметь нетривиальных контактных инвариантов. В случае систем ОДУ первый нетривиальный инвариант Вильчинского появляется уже у систем второго порядка.

Пример 1. В случае одного ОДУ 3-го порядка получим единственный обобщенный инвариант Вильчинского:

$$W_3 = f_0 + \frac{1}{3}f_1 f_2 + \frac{2}{27}f_2^3 - \frac{1}{2}f_{1x} - \frac{1}{3}f_2 f_{2x} + \frac{1}{6}f_{2xx},$$

где для функции $f(x, y, y', \ldots, y^{(k)})$ через f_i обозначается $\frac{\partial f}{\partial y^{(i)}}$, а через f_x — $D(f)$. Этот инвариант впервые появился в работе [5] и играет ключевую роль в [6] по контактной эквивалентности ОДУ 3-го порядка.

Пример 2. Для систем ОДУ второго порядка получим следующий инвариант $W_2 = \Phi(x) - 1/m \operatorname{tr} \Phi(x)$, где $\Phi(x) = \mathcal{P}_0(x) - \frac{1}{2}D(\mathcal{P}_1(x)) + \frac{1}{4}\mathcal{P}_1(x)^2$. Он был построен в [7] и играет важную роль в обратной задаче вариационного исчисления [8].

Обобщенные инварианты Вильчинского для одного обыкновенного дифференциального уравнения произвольного порядка были впервые построены в [9] в связи с вопросом контактной тривиализуемости одного ОДУ.

Литература

1. Wilczynski E.J. *Projective differentail geometry of curves and ruled surfaces.* – Leipzig: Teubner, 1905. – 295 S.
2. Se-ashi Yu. *A geometric construction of Laguerre–Forsyth's canonical forms of linear ordinary differential equations* // Adv. Studies in Pure Math. – 1993. – V. 22. – P. 265–297.
3. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. *Введение в теорию нелинейных дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1986. – 334 с.
4. Olver P.J. *Symmetry, invariants and equivalence.* – New York: Springer-Verlag, 1995. – 525 p.
5. Wünschmann K.W. *Über Beruhrungsbedingungen bei Integralkurven von Differentialgleichungen.* – Inaug. Dissert. – Leipzig: Teubner, 1905.
6. Chern S.-S. *The geometry of the differential equation $y''' = F(x, y, y', y'')$* // Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. – 1950. – V. 4. – P. 97–111.
7. Fels M. *The equivalence problem for systems of second order ordinary differential equations* // Proc. London Math. Soc. – 1995. – V. 71. – P. 221–240.
8. Anderson I.M., Thompson G. *The inverse problem of the calculus of variations for ordinary differential equations* // Mem. Amer. Math. Soc. – 1992. – V. 98. – P. 1–83.
9. Doubrov B. *Contact trivialization of ordinary differential equations* // Differential Geometry and Its Applications. – Proc. Conf., Opava (Czech Republic). – 2001. – P. 73-84.

Казанский государственный университет

Поступила
31.10.2005