Известия вузов. Математика
2015, №10, с. 66–71

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

И.Б. БАДРИЕВ, М.В. МАКАРОВ, В.Н. ПАЙМУШИН

РАЗРЕШИМОСТЬ ФИЗИЧЕСКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-МЯГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Аннотация. В работе предложена обобщенная постановка геометрически и физически нелинейной задачи о равновесии трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. Обобщенная постановка сформулирована в виде задачи об определении седловой точки некоторого функционала. Исследованы свойства этого функционала. Установленные свойства позволили доказать теорему разрешимости рассматриваемой вариационной задачи.

Ключевые слова: трехслойная пластина, трансверсально-мягкий заполнитель, седловая точка, теорема разрешимости.

УДК: 543.4 : 544.2 : 517.958

Введение

Одним из основных способов изготовления трехслойных элементов конструкций является клеевое соединение внешних несущих слоев с заполнителем, которое зачастую может сопровождаться появлением на поверхностях сопряжения слоев технологических дефектов в виде участков непроклея. Исследование процессов деформирования таких элементов прежде всего диктуется необходимостью определения степени их пригодности для дальнейшего использования.

В данной работе рассматриваются геометрически и физически нелинейные задачи об определении напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. Для описания напряженно-деформированного состояния в несущих слоях используются уравнения модели Кирхгофа–Лява. Кинематические соотношения для заполнителя выводятся путем последовательного интегрирования по поперечной координате исходных трехмерных уравнений теории упругости, предварительно упрощенных за счет предположения о равенстве нулю тангенциальных компонент напряжений [1], [2]. Кроме того, задача рассматривается при ограничении, соответствующем идеальной

Поступила 02.04.2015

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-01-05686, 15-38-21099).

упруго-пластической модели для заполнителя. Указанное условие означает недопущение разрушения конструкции.

Обобщенная постановка задачи формулируется в виде задачи об отыскании седловой точки некоторого функционала. Исследуются свойства этого функционала — слабая полунепрерывность снизу и коэрцитивность относительно основных переменных и слабая полунепрерывность сверху относительно множителя Лагранжа. На основе этих свойств доказывается теорема существования решения.

Задача о равновесии трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в геометрически нелинейной постановке была рассмотрена в [3], где был предложен двухслойный алгоритм ее решения, основанный на опускании нелинейности на нижний слой, приведены и проанализированы результаты численных экспериментов, в работе [4] доказана теорема существования решения этой задачи. В работах [5], [6] исследованы обобщенные постановки задач теории мягких сетчатых оболочек при наличии ограничений и методы их численного решения.

1. Постановка задачи

Рассматривается одномерная по пространственным координатам задача об определении напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины, состоящей из двух внешних несущих слоев и расположенного между ними трансверсально-мягкого заполнителя, связанного с несущими слоями при помощи клеевого соединения. Для описания задачи используются [1], [2] соотношения, основанные на применении к несущим слоям уравнений модели Кирхгофа–Лява, к заполнителю — уравнений теории упругости, упрощенных в рамках принятой модели трансверсально-мягкого слоя и проинтегрированных по толщине с удовлетворением условий сопряжения слоев по перемещениям.

Пусть a — длина пластины, $2h$, $2h_{(k)}$ — толщины заполнителя и k-го слоя соответственно (здесь и всюду в дальнейшем предполагаем, что $k = 1, 2$), $X^1_{(k)}$, $X^3_{(k)}$ — компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k-го слоя, $w^{(k)}$ и $u^{(k)}$ — прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности k-го слоя соответственно, $T^{11}_{(k)}$, $M^{11}_{(k)}$– мембранные усилия и внутренние изгибающие моменты в k-м слое соответственно, $H_{(k)} = h + h_{(k)}$.

Края пластины предполагаем закрепленными, так что выполняются условия

$$u^{(k)}(x) = 0, \quad w^{(k)}(x) = 0, \quad M^{11}_{(k)}(x) = 0, \quad x = 0, \quad x = a.$$

Задача рассматривается в геометрически нелинейной постановке, т. е. предполагаем, что

$$T^{11}_{(k)} = B_{(k)} \left[\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right], \quad k = 1, 2,$$

где $B_{(k)} = 2h_{(k)}E^{(k)}/(1 - \nu^{(k)}_{12}\nu^{(k)}_{21})$ — жесткость k-го слоя на растяжение–сжатие, $E^{(k)}$ и $\nu^{(k)}_{12}$, $\nu^{(k)}_{21}$ — модуль упругости первого рода и коэффициенты Пуассона материала k-го несущего слоя.

Обозначим через $U = \big(w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)}\big)$ вектор перемещений точек срединной поверхности k-го слоя. Рассмотрим функционалы

$$\Phi_k(U) = \frac{1}{2}\int_0^a \left\{ B_{(k)}\left[\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw^{(k)}}{dx}\right)^2\right]^2 + D_{(k)}\left(\frac{d^2w^{(k)}}{dx^2}\right)^2 \right\}dx -$$
$$- \int_0^a \left(X^1_{(k)}u^{(k)} + X^3_{(k)}w^{(k)} + M^1_{(k)}\frac{dw^{(k)}}{dx}\right)dx, \quad k = 1, 2,$$

где $D_{(k)} = B_{(k)}h^2_{(k)}/3$ — изгибная жесткость k-го слоя, $M^1_{(k)}$ – поверхностный момент внешних сил, приведенный к срединной поверхности k-го слоя.

В силу вариационного принципа Лагранжа положение равновесия изолированных пластин характеризуется точкой минимума функционалов Φ_1 и Φ_2. Рассматривая исследуемую задачу в контактной постановке, в соответствии с результатами [1], [2], [7], [8] введем контактные реактивные усилия взаимодействия q^1, представляющие собой касательные напряжения в заполнителе, постоянные по его толщине. Это требует рассмотрения дополнительных функционалов, учитывающих потенциальную энергию деформации заполнителя (поперечного сдвига и обжатия), а также работу неуравновешенных контактных усилий q^1:

$$\Phi_0(U) = \frac{1}{2}\int_0^a c_3\big(w^{(2)} - w^{(1)}\big)^2 dx,$$
$$\Phi_3(U, q^1) = \int_0^a \left[\sum_{k=1}^{2} H_{(k)}\frac{dw^{(k)}}{dx} + \big(u^{(1)} - u^{(2)}\big)\right] q^1 dx,$$
$$\Phi_4(q^1) = \frac{1}{2}\int_0^a \left[\frac{2h}{G_{13}}\left(q^1\right)^2 + \frac{h^3}{3E_3}\left(\frac{dq^1}{dx}\right)^2\right]dx,$$

где G_{13}, E_3 — модули поперечного сдвига и обжатия заполнителя, $c_3 = E_3/(2h)$. Для q^1 предполагаем выполнеными граничные условия

$$q^1(0) = q^1(a) = 0.$$

Считая, что зависимость между касательным напряжением q^1 и деформацией поперечного сдвига соответствует идеальной упруго-пластической модели, задачу рассмотрим при ограничении

$$\big|q^1(x)\big| \le q^1_*, \quad 0 < x < a, \tag{1}$$

где q^1_* – заданное предельное значение напряжения в заполнителе.

Условие (1) означает недопущение разрушения конструкции.

Обозначим через $V_k = \overset{\circ}{W}{}^{(k)}_2(0, a)$ пространства Соболева со скалярными произведениями $(u, v) = \int\limits_0^a \frac{d^k u(x)}{dx^k}\frac{d^k v(x)}{dx^k}dx$, V_q — пространство Соболева функций, имеющих компактный носитель на $(0, a)$ и первую обобщенную производную, суммируемую с квадратом, со скалярным произведением $(u, v)_q = \frac{2h}{G_{13}}\int\limits_0^a u(x)v(x)dx + \frac{h^3}{3E_3}\int\limits_0^a \frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx}dx$. Положим $V = V_2 \times V_2 \times V_1 \times V_1$, $K = \{q^1 \in V_q : |q^1(x)| \le q^1_*,\ 0 < x < a\}$, $L(U, q^1) = \Phi_0(U) + \Phi_1(U) + \Phi_2(U) - \Phi_3(U, q^1) - \Phi_4(q^1)$. Нетрудно видеть, что функционалы Φ_0, Φ_1, Φ_2 корректно определены на V, функционалы Φ_3, L — на $V \times V_q$, функционал Φ_4 – на V_q. Скалярное произведение в V будем обозначать через $(\cdot, \cdot)_V$.

Под решением задачи об определении напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем будем понимать такую функцию $(\widehat{U}, \widehat{q}^1) \in V \times K$, что

$$L(\widehat{U}, \widehat{q}^1) = \inf_{U \in V} \sup_{q^1 \in K} L(U, q^1). \tag{2}$$

2. Исследование разрешимости

При исследовании разрешимости задачи будем опираться на общие результаты о существовании седловых точек функции Лагранжа (например, [9]).

Свойства функционалов Φ_j, $j = 0, \ldots, 4$, изложены в четырех леммах.

Лемма 1. *Функционалы* Φ_j, $j = 0, 1, 2, 4$, *являются слабо полунепрерывными снизу.*

Лемма 2. *Функционал* Φ_3 *является неотрицательным, билинейным и непрерывным по обоим аргументам.*

Лемма 3. *Множество* K *является слабо замкнутым.*

Напомним, что функционал Φ называется коэрцитивным ([9], с. 44), если $\Phi(z) \to +\infty$ при $\|z\| \to +\infty$.

Лемма 4. *Функционалы* Φ_j, $j = 0, 1, 2, 4$, *являются коэрцитивными.*

Из лемм 1–4 вытекает

Теорема. *Задача* (2) *имеет по крайней мере одну седловую точку* $(\widehat{U}, \widehat{q}^1) \in V \times K$.

Решение задачи (2) можно проводить методами, предложенными в [10]–[13].

Литература

[1] Paimushin V.N., Bobrov S.N. *Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms*, Mech. of composite materials **36** (1), 59–66 (2000).

[2] Paimushin V.N. *Nonlinear theory of the central bending of three-layer shells with defects in the form of sections of bonding failure*, Sov. Appl. Mech. **23** (11), 1038–1043 (1987).

[3] Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V., Paimushin V.N. *Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate*, Appl. Math. Sci. **9** (78), 3887–3895 (2015).

[4] Карчевский М.М., Паймушин В.Н. *О вариационных задачах теории трехслойных пологих оболочек*, Дифференц. уравнения **30** (7), 1217–1221 (1994).

[5] Badriev I.B., Banderov V.V. *Iterative methods for solving variational inequalities of the theory of soft shells*, Lobachevskii J. Math. **35** (4), 354–365 (2014).

[6] Badriev I.B., Banderov V.V. *Numerical method for solving variation problems in mathematical physics*, Appl. Mech. and Materials **668–669**, 1094–1097 (2014).

[7] Паймушин В.Н. *К вариационным методам решения нелинейных пространственных задач сопряжения деформируемых тел*, ДАН СССР **273** (5), 1083–1086 (1983).

[8] Паймушин В.Н. *Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек*, Изв. АН СССР. Механ. тверд. тела, №2, 171–180 (1987).

[9] Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы* (Мир, М., 1979).

[10] Glowinski R., Lions J.-L. and Tremolieres R. *Analyse numérique des inéquations variationnelles* (Dunod, Paris, 1976).

[11] Fortin M., Glowinski R. *Augmented Lagrangian methods: Applications to the numerical solution of boundary-value problems* (North-Holland, Amsterdam, 1983).

[12] Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В., Паймушин В.Н., Хабибуллин Р.Ф. *О решении физически нелинейных задач о равновесии трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем*, Учен. зап. Казанск. ун-та. Сер. физ.-матем. науки **157** (1), 15–24 (2015).
[13] Lapin A.V. *Preconditioned Uzawa-type methods for finite-dimensional constrained saddle point problems*, Lobachevskii J. Math. **31** (4), 309–322 (2010).

И.Б. Бадриев

профессор, кафедра вычислительной математики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: ildar.badriev@kpfu.ru

М.В. Макаров

младший научный сотрудник,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия;
аспирант, кафедра прочности конструкций,
Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева,
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия,

e-mail: makarovmaksim@mail.ru

В.Н. Паймушин

главный научный сотрудник,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия;
профессор, кафедра прочности конструкций,
Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева,
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия,

e-mail: vpajmushin@mail.ru

I.B. Badriev, M.V. Makarov, and V.N. Paimushin

Solvability of a physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversal-soft core

Abstract. The paper presents a generalized statement of geometrically and physically nonlinear problem of the equilibrium of sandwich plate with transversal-soft core. Generalized statement is formulated as a problem of finding a saddle point of a functional. We investigate the properties of this functional. These properties allow to prove a theorem of solvability of variational problem under consideration.

Keywords: sandwich plate, transversal-soft core, saddle point, theorem of solvability.

I.B. Badriev

Professor, Chair of Computational Mathematics,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008, Russia,

e-mail: ildar.badriev@kpfu.ru

M.V. Makarov

Junior Research Worker,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008, Russia;
Postgraduate, Chair of Structural Strength,
Kazan National Research Technical University,
10 K. Marks str., Kazan, 420111 Russia,

e-mail: makarovmaksim@mail.ru

V.N. Paimushin

Head Research Worker,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008, Russia;
Professor, Chair of Structural Strength,
Kazan National Research Technical University,
10 K. Marks str., Kazan, 420111 Russia,

e-mail: vpajmushin@mail.ru