

Л.В. МАСЛОВСКАЯ, О.М. МАСЛОВСКАЯ

МЕТОД ШТРАФА ДЛЯ СТЫКОВКИ СЕТОК В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Введение

Известно, что в методе конечных элементов часто используются нестыкающиеся сетки. Необходимость использования нестыкающихся сеток часто возникает при локальном сгущении сетки, т. к. построение локально сгущенной стыкающейся сетки вызывает большие трудности. Нестыкающиеся сетки возникают также при расчете больших конструкций, на разных кусках которых работают разные программисты. При расчетах таких конструкций часто используется метод декомпозиции области, сетки на разных подобластях необходимо стыковать. Известны следующие основные методы для стыковки сеток.

1. Итеративные процедуры, обеспечивающие непрерывность приближенного решения или его нормальных производных при переходе через интерфейс. Это формирует базис для альтернирующих методов Шварца.
2. Прямые процедуры, использующие метод множителей Лагранжа.
3. Mortar-метод и его модификации.

Основные идеи, лежащие в основе метода Лагранжа и mortar-метода, изложены в [1] и [2], где эти методы использовались для удовлетворения главным условиям на границе области в некотором слабом смысле. В более поздних работах ([3], [4]) эти идеи были перенесены на случай стыковки сеток.

Предложенный в [5] и [6] метод штрафа для приближенного удовлетворения главным условиям на границе области, насколько нам известно, для стыковки сеток не использовался. В данной работе сделана попытка использовать метод штрафа для стыковки сеток.

В работе рассмотрен метод штрафа стыковки треугольных сеток по линиям, называемым интерфейсами. Основная идея состоит в построении возмущенной задачи с параметром, который играет роль штрафа. Возмущенная задача строится путем замены главного граничного условия на интерфейсе естественным, содержащим параметр. Проведена дискретизация возмущенной задачи методом конечных элементов. Получены оценки для нормы разности между решением дискретной возмущенной задачи и решением исходной задачи, зависящие от шага и штрафа. Даны рекомендации по выбору штрафа в зависимости от шага. Проведен численный эксперимент, подтверждающий теоретические оценки. Ради простоты изложения все выкладки проделаны для простейшей модельной задачи. Они без труда переносятся на любую краевую задачу для эллиптического уравнения второго порядка с положительно определенным оператором.

1. Построение и исследование задачи с интерфейсом

В двумерной полигональной области Ω с границей $\partial\Omega$ рассмотрим задачу

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{в } \Omega, \quad (1.1)$$

$$u|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_0} = 0, \quad (1.2)$$

где $\partial\Omega_0$ — часть границы $\partial\Omega$ ненулевой меры.

Дадим вариационную формулировку задачи (1.1), (1.2) в пространстве

$$\overline{H}_\Omega^1 = \{u \in H_\Omega^1, \quad u|_{\partial\Omega_0} = 0\}.$$

Задача 1.1. Найти функцию $u \in \overline{H}_\Omega^1$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_\Omega \operatorname{grad}^T u \cdot \operatorname{grad} v \, dx \, dy = \int_\Omega f v \, dx \, dy \quad \forall v \in \overline{H}_\Omega^1. \quad (1.3)$$

Известны теоремы существования и единственности решения задачи 1.1. Гладкость решения зависит от гладкости правой части и величины углов с вершинами в угловых точках границы [7]. Предположения о гладкости решения будем оговаривать отдельно.

Разобьем область Ω на две неналегающие подобласти: Ω_1 с границей $\partial\Omega_1$ и Ω_2 с границей $\partial\Omega_2$. Предположим, что $\partial\Omega_0$ является частью границы $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_{12}$ является общей частью границ $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ и называется интерфейсом. Предположим, что $\partial\Omega_{12}$ является ломаной.

Пусть u_1 — след функции u на Ω_1 , u_2 — след функции u на Ω_2 , f_1 — след функции f на Ω_1 , f_2 — след функции f на Ω_2 .

Тогда задачу (1.1), (1.2) можно переписать в виде

$$-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = f_1(x, y) \quad \text{в } \Omega_1, \quad (1.4)$$

$$-\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = f_2(x, y) \quad \text{в } \Omega_2, \quad (1.5)$$

$$u_1|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_1 \setminus (\partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_{12})} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_2 \setminus \partial\Omega_{12}} = 0, \quad (1.7)$$

$$u_1|_{\partial\Omega_{12}} = u_2|_{\partial\Omega_{12}}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial n_1}\Big|_{\partial\Omega_{12}} = -\frac{\partial u_2}{\partial n_2}\Big|_{\partial\Omega_{12}}. \quad (1.8)$$

Рассмотрим пространство $E = H_{\Omega_1}^1 \times H_{\Omega_2}^1$ с нормой $\|(u_1, u_2)\|_E^2 = \|u_1\|_{H_{\Omega_1}^1}^2 + \|u_2\|_{H_{\Omega_2}^1}^2$. Введем пространство $U = \{(u_1, u_2) \in \overline{H}_{\Omega_1}^1 \times H_{\Omega_2}^1, u_1 = u_2 \text{ на } \partial\Omega_{12}\}$, где $\overline{H}_{\Omega_1}^1 = \{u \in H_{\Omega_1}^1, u|_{\partial\Omega_0} = 0\}$.

Совпадение u_1 и u_2 на интерфейсе понимается как совпадение на $\partial\Omega_{12}$ следов функций из $\overline{H}_{\Omega_1}^1$ и $H_{\Omega_2}^1$. Эти следы принадлежат пространству $H_{\partial\Omega_{12}}^{\frac{1}{2}}$.

U является подпространством пространства E . Следовательно, на его элементах определена $\|\cdot\|_E$.

Дадим вариационную формулировку задачи (1.4)–(1.8).

Задача 1.2. Найти $(u_1, u_2) \in U$, чтобы

$$a[(u_1, u_2), (v_1, v_2)] = f(v_1, v_2) \quad \forall (v_1, v_2) \in U,$$

где

$$a[(u_1, u_2), (v_1, v_2)] = \int_{\Omega_1} (\operatorname{grad}^T u_1 \cdot \operatorname{grad} v_1) dx \, dy + \int_{\Omega_2} (\operatorname{grad}^T u_2 \cdot \operatorname{grad} v_2) dx \, dy, \quad (1.9)$$

$$f(v_1, v_2) = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx \, dy + \int_{\Omega_2} f_2 v_2 dx \, dy.$$

Лемма 1.1. Пространство U является замкнутым подпространством пространства E .

Лемма 1.2. Отображение $(u_1, u_2) \Rightarrow \|(u_1, u_2)\|_A$, где

$$\|(u_1, u_2)\|_A^2 = a[(u_1, u_2), (u_1, u_2)],$$

есть норма на пространстве U .

Лемма 1.3. Нормы $\|(u_1, u_2)\|_A$ и $\|(u_1, u_2)\|_E$ эквивалентны.

Доказательство. Неравенство

$$\|(u_1, u_2)\|_A \leq \|(u_1, u_2)\|_E \quad (1.10)$$

очевидно.

Остается показать, что существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|(u_1, u_2)\|_A \geq C\|(u_1, u_2)\|_E. \quad (1.11)$$

Очевидно,

$$\|(u_1, u_2)\|_A^2 + \|u_2\|_{L_{2,\Omega_2}}^2 \geq C^2\|(u_1, u_2)\|_E^2. \quad (1.12)$$

Предположим, что (1.11) не выполняется. Тогда существует такая последовательность $(u_1^k, u_2^k) \in U$, что

- (i) $\|(u_1^k, u_2^k)\|_E = 1 \quad \forall k,$
- (ii) $\|(u_1^k, u_2^k)\|_A < \frac{1}{k}.$

Из (i) следует, что существует подпоследовательность последовательности (u_1^k, u_2^k) (обозначения сохраним), которая слабо сходится в U и сильно в $L_{2,\Omega_1} \times L_{2,\Omega_2}$. Этот предел обозначим через $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$. В силу слабой полунепрерывности снизу отображения $(u_1, u_2) \in U \rightarrow \|(u_1, u_2)\|_A$ (для топологии, индуцированной нормой $\|\cdot\|_E$) из (ii) следует $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = 0$.

Используя (1.12) и (ii), получим

$$0 < C^2 = C^2\|(u_1^k, u_2^k)\|_E^2 \leq \|(u_1^k, u_2^k)\|_A^2 + \|u_2^k\|_{L_{2,\Omega_2}}^2 < \frac{1}{k^2} + \|u_2^k\|_{L_{2,\Omega_2}}^2.$$

Правая часть полученного неравенства стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, а левая является положительной константой. Пришли к противоречию. Неравенство (1.11) доказано. Из (1.10), (1.11) следует утверждение леммы. \square

Аналогичные рассуждения часто используются при доказательстве теорем об эквивалентных нормировках ([8], с. 444–445).

Легко доказывается

Теорема 1.1. Задачи 1.1 и 1.2 эквивалентны.

2. Построение и исследование возмущенной задачи (задачи со штрафом)

При дискретизации задачи 1.2 на нестыкующихся сетках трудно удовлетворить главному условию совпадения функций u_1 и u_2 на интерфейсе. Поэтому это главное условие заменяется естественным с параметром σ

$$\frac{\partial u_1}{\partial n_1} \Big|_{\partial\Omega_{12}} = -\sigma(u_1 - u_2) \Big|_{\partial\Omega_{12}}.$$

Очевидно, это естественное условие аппроксимирует при больших σ главное условие совпадения функций u_1 и u_2 на интерфейсе.

Константа $\sigma > 0$ играет роль штрафа. Тогда вместо задачи (1.4)–(1.8) получаем задачу

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u_1^\sigma}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1^\sigma}{\partial y^2} &= f_1(x, y) \quad \text{в } \Omega_1, \\ -\frac{\partial^2 u_2^\sigma}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2^\sigma}{\partial y^2} &= f_2(x, y) \quad \text{в } \Omega_2, \\ u_1^\sigma \Big|_{\partial\Omega_0} &= 0, \\ \frac{\partial u_1^\sigma}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1 \setminus (\partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_{12})} &= 0, \quad \frac{\partial u_2^\sigma}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2 \setminus \partial\Omega_{12}} = 0, \\ \frac{\partial u_1^\sigma}{\partial n_1} \Big|_{\partial\Omega_{12}} &= -\sigma(u_1^\sigma - u_2^\sigma) \Big|_{\partial\Omega_{12}}, \\ \frac{\partial u_1^\sigma}{\partial n_1} \Big|_{\partial\Omega_{12}} &= -\frac{\partial u_2^\sigma}{\partial n_2} \Big|_{\partial\Omega_{12}}. \end{aligned}$$

Дадим теперь вариационную формулировку задачи со штрафом, которую можно назвать возмущенной.

Пространство $U' = \{(u_1, u_2) \in \overline{H}_{\Omega_1}^1 \times H_{\Omega_2}^1\}$ является подпространством пространства E , на его элементах определена $\|\cdot\|_E$.

Задача 2.1. Найти $(u_1^\sigma, u_2^\sigma) \in U'$, удовлетворяющую вариационному уравнению

$$a'[(u_1^\sigma, u_2^\sigma), (v_1, v_2)] \equiv a[(u_1^\sigma, u_2^\sigma), (v_1, v_2)] + \sigma b[(u_1^\sigma, u_2^\sigma), (v_1, v_2)] = f(v_1, v_2)$$

$\forall (v_1, v_2) \in U'$, где

$$a[(u_1^\sigma, u_2^\sigma), (v_1, v_2)] = \int_{\Omega_1} (\operatorname{grad}^T u_1^\sigma \cdot \operatorname{grad} v_1) dx dy + \int_{\Omega_2} (\operatorname{grad}^T u_2^\sigma \cdot \operatorname{grad} v_2) dx dy, \quad (2.1)$$

$$b[(u_1^\sigma, u_2^\sigma), (v_1, v_2)] = \int_{\partial\Omega_{12}} (u_1^\sigma - u_2^\sigma)(v_1 - v_2) ds, \quad (2.2)$$

$$f(v_1, v_2) = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx dy + \int_{\Omega_2} f_2 v_2 dx dy. \quad (2.3)$$

Отметим, что в определении пространства U' уже нет требованияния совпадения u_1 и u_2 на интерфейсе. Это очень важно для численной реализации.

Лемма 2.1. Отображение

$$(u_1, u_2) \Rightarrow \|(u_1, u_2)\|_{A'}, \quad (2.4)$$

где

$$\|(u_1, u_2)\|_{A'}^2 = a'[(u_1, u_2), (u_1, u_2)] \quad (2.5)$$

есть норма на пространстве U' .

По аналогии с леммой 1.3 доказывается

Лемма 2.2. Нормы $\|(u_1, u_2)\|_{A'}$ и $\|(u_1, u_2)\|_E$ эквивалентны.

Теорема 2.1. Пусть $f \in H_{\Omega}^{-1}$. Тогда задача 2.1 имеет единственное решение.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из леммы Лакса–Мильграма ([9], сс. 19, 20). При этом $\int_{\Omega_i} f_i v_i dx dy, i = 1, 2$, следует понимать как отношение двойственности между $H_{\Omega_i}^{-1}$ и $H_{\Omega_i}^1$. \square

3. Дискретизация. Сходимость

Проведем триангуляцию с диаметром h_1 области Ω_1 и триангуляцию с диаметром h_2 области Ω_2 . Обе триангуляции предполагаются регулярными ([9], сс. 48, 133). На интерфейсе $\partial\Omega_{12}$ сетки не стыкуются, т. е. если узел одной сетки принадлежит интерфейсу, то он необязательно является узлом второй сетки. Обозначим полученную сетку через $T_h \equiv T_{h_1} \times T_{h_2}$. Пример такой сетки приведен на рис. 2 ниже.

Рассмотрим конечномерное пространство $S_h \equiv S_{h_1} \times S_{h_2}$ лагранжевых сплайнов первой степени, построенных на сетке T_h . Очевидно, $S_h \subset E$. Пусть $\bar{S}_h \equiv \bar{S}_{h_1} \times S_{h_2}$ — подпространство пространства S_h такое, что его элементы принимают нулевые значения на $\partial\Omega_0$. Очевидно, $\bar{S}_h \in U'$. Отметим, что элементы пространства \bar{S}_h терпят разрыв при переходе через интерфейс.

Построим дискретную задачу, соответствующую задаче 2.1.

Задача 3.1. Найти $(u_{1,h}^\sigma, u_{2,h}^\sigma) \in \bar{S}_h$ так, что

$$\begin{aligned} a'[(u_{1,h}^\sigma, u_{2,h}^\sigma), (v_{1,h}, v_{2,h})] &\equiv a[(u_{1,h}^\sigma, u_{2,h}^\sigma), (v_{1,h}, v_{2,h})] + \\ &+ \sigma b[(u_{1,h}^\sigma, u_{2,h}^\sigma), (v_{1,h}, v_{2,h})] = f(v_{1,h}, v_{2,h}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$\forall (v_{1,h}, v_{2,h}) \in \bar{S}_h$, где a , b и f определяются формулами (2.1), (2.2), (2.3) соответственно.

Очевидно, что вариационное уравнение (3.1) эквивалентно системе алгебраических уравнений. Из результатов предыдущего параграфа следует, что при $\sigma > 0$ матрица системы положительно определена, следовательно, система однозначно разрешима.

Ниже получим оценки скорости сходимости. При этом используется методика [10].

Обозначим

$$(e_1, e_2) \equiv (u_1, u_2) - (u_{1,h}^\sigma, u_{2,h}^\sigma), \quad (3.2)$$

где (u_1, u_2) — решение задачи 1.2, а $(u_{1,h}^\sigma, u_{2,h}^\sigma)$ — решение задачи 3.1.

Теорема 3.1. Предположим, что решение задачи 1.1 $u \in \bar{H}_{\Omega}^{-1} \cap H_{\Omega}^2 \cap H_{\partial\Omega_{12}}^2$, следовательно, решение задачи 1.2 $(u_1, u_2) \in H \equiv U \cap H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2 \cap H_{\partial\Omega_{12}}^2 \times H_{\partial\Omega_{12}}^2$. Тогда

$$\|(e_1, e_2)\|_{A'} \leq C((\sigma^{-\frac{1}{2}} + h)\|(u_1, u_2)\|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2} + \sigma^{\frac{1}{2}} h^2 \|(u_1, u_2)\|_{H_{\partial\Omega_{12}}^2 \times H_{\partial\Omega_{12}}^2}), \quad (3.3)$$

$$\|u_{1,h}^\sigma - u_{2,h}^\sigma\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} = \|e_1 - e_2\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \leq$$

$$\leq C((\sigma^{-1} + \sigma^{-\frac{1}{2}} h)\|(u_1, u_2)\|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2} + h^2 \|(u_1, u_2)\|_{H_{\partial\Omega_{12}}^2 \times H_{\partial\Omega_{12}}^2}), \quad (3.4)$$

где $h = \max(h_1, h_2)$.

Доказательство. Известно, что для каждого $(u_1, u_2) \in H$ существует интерполянт Лагранжа $(L_{h_1}u_1, L_{h_2}u_2)$ такой, что

$$\|u_i - L_{h_i}u_i\|_{H_{\Omega_i}^1} \leq Ch_i\|u_i\|_{H_{\Omega_i}^2}, \quad (3.5.1)$$

$$\|u_i - L_{h_i}u_i\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \leq Ch_i^2\|u_i\|_{H_{\partial\Omega_{12}}^2}, \quad (3.5.2)$$

$$\|u_i - L_{h_i}u_i\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \leq Ch_i^{\frac{3}{2}}\|u_i\|_{H_{\partial\Omega_{12}}^2}^{\frac{3}{2}} \leq Ch_i^{\frac{3}{2}}\|u_i\|_{H_{\Omega_i}^2}. \quad (3.5.3)$$

Заметим, что $L_{h_1}u_1$ и $L_{h_2}u_2$ на интерфейсе $\partial\Omega_{12}$ не совпадают.

Обозначим

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \equiv (u_1, u_2) - (L_{h_1} u_1, L_{h_2} u_2), \quad (3.6)$$

где (u_1, u_2) — решение задачи 1.2.

Из (3.2) и (3.6)

$$(\Phi_1, \Phi_2) = (e_1, e_2) - (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (L_{h_1} u_1, L_{h_2} u_2) - (u_{1,h}^\sigma, u_{2,h}^\sigma) \in \overline{S}_h. \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует

$$a'((\Phi_1, \Phi_2), (\chi_{1,h}, \chi_{2,h})) = a'((e_1, e_2), (\chi_{1,h}, \chi_{2,h})) - a'((\varepsilon_1, \varepsilon_2), (\chi_{1,h}, \chi_{2,h})) \quad \forall (\chi_{1,h}, \chi_{2,h}) \in \overline{S}_h. \quad (3.8)$$

Из (3.1) и (3.2) следует

$$\begin{aligned} a'((e_1, e_2), (\chi_{1,h}, \chi_{2,h})) &= a'((u_1, u_2), (\chi_{1,h}, \chi_{2,h})) - a'((u_{1,h}^\sigma, u_{2,h}^\sigma), (\chi_{1,h}, \chi_{2,h})) = \\ &= a'((u_1, u_2), (\chi_{1,h}, \chi_{2,h})) - f(\chi_{1,h}, \chi_{2,h}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из (3.9) получаем

$$\begin{aligned} |a'((u_1, u_2), (\chi_{1,h}, \chi_{2,h}))| &\leq \left(\left\| \frac{\partial u_1}{\partial n_1} \right\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} + \left\| \frac{\partial u_2}{\partial n_2} \right\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \right) \|(\chi_{1,h}, \chi_{2,h})\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}} \times L_{2,\partial\Omega_{12}}} \leq \\ &\leq \sigma^{-\frac{1}{2}} \|(u_1, u_2)\|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2} \|(\chi_{1,h}, \chi_{2,h})\|_{A'}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из (3.5.1), (3.5.2) и (3.6) следует

$$\begin{aligned} \|(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\|_{A'} &\leq (\|(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\|_{H_{\Omega_1}^1 \times H_{\Omega_2}^1} + \sigma^{\frac{1}{2}} \|(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}} \times L_{2,\partial\Omega_{12}}}) \leq \\ &\leq C(h \|(u_1, u_2)\|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2} + \sigma^{\frac{1}{2}} h^2 \|(u_1, u_2)\|_{H_{\partial\Omega_{12}}^2 \times H_{\partial\Omega_{12}}^2}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из (3.8), (3.10), (3.11) имеем

$$\|(\Phi_1, \Phi_2)\|_{A'} \leq C((\sigma^{-\frac{1}{2}} + h) \|(u_1, u_2)\|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2} + \sigma^{\frac{1}{2}} h^2 \|(u_1, u_2)\|_{H_{\partial\Omega_{12}}^2 \times H_{\partial\Omega_{12}}^2}). \quad (3.12)$$

Из (3.7), (3.11), (3.12) следует (3.3).

Используя (3.3), получим

$$\begin{aligned} \|e_1 - e_2\|_{L_{2,\Omega_{12}}} &\leq C\sigma^{-\frac{1}{2}} \|(e_1, e_2)\|_{A'} \leq \\ &\leq C((\sigma^{-1} + \sigma^{-\frac{1}{2}} h) \|(u_1, u_2)\|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2} + h^2 \|(u_1, u_2)\|_{H_{\partial\Omega_{12}}^2 \times H_{\partial\Omega_{12}}^2}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из (3.13) следует (3.4). \square

Следствие. При $\sigma = h^{-2}$ (3.3) дает

$$\|(e_1, e_2)\|_{A'} \leq Ch(\|(u_1, u_2)\|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2} + \|(u_1, u_2)\|_{H_{\partial\Omega_{12}}^2 \times H_{\partial\Omega_{12}}^2}).$$

Из (3.4) при $\sigma = h^{-2}$ следует

$$\|u_{1,h}^\sigma - u_{2,h}^\sigma\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} = \|e_1 - e_2\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \leq Ch^2(\|(u_1, u_2)\|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2} + \|(u_1, u_2)\|_{H_{\partial\Omega_{12}}^2 \times H_{\partial\Omega_{12}}^2}). \quad (3.14)$$

Выбрав в (3.3) $\sigma = h^{-\frac{3}{2}}$, имеем

$$\|(e_1, e_2)\|_{A'} \leq Ch^{\frac{3}{4}}(\|(u_1, u_2)\|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2} + \|(u_1, u_2)\|_{H_{\partial\Omega_{12}}^2 \times H_{\partial\Omega_{12}}^2}).$$

Получим теперь оценку погрешности (e_1, e_2) в норме пространства $L_{2,\Omega_1} \times L_{2,\Omega_2}$.

Теорема 3.2. Пусть решение задачи 1.2 $(u_1, u_2) \in U \cap H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2$. Тогда

$$\|(e_1, e_2)\|_{L_{2,\Omega_1} \times L_{2,\Omega_2}} \leq C(\sigma^{-1} + \sigma^{-\frac{1}{2}} h + h^{\frac{3}{2}} + h^2 + \sigma^{\frac{1}{2}} h^{\frac{5}{2}} + \sigma h^3) \|(u_1, u_2)\|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2}. \quad (3.15)$$

Доказательство. При получении оценок будем пользоваться методом Обэна–Нитше ([9], с. 138–141).

Для каждой функции $(u_1, u_2) \in U \cap H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2$ существует интерполянт Лагранжа $(L_{h_1} u_1, L_{h_2} u_2)$ такой, что для него справедливы неравенства (3.5.1), (3.5.3).

Понадобятся оценки, похожие на (3.11), (3.13), (3.14), но более грубые. Они получаются аналогично, но с использованием (3.5.3) вместо (3.5.2). Эти оценки таковы

$$\|(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\|_{A'} \leq C(h + \sigma^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}}) \|(u_1, u_2)\|_{H_{\Omega_2}^2 \times H_{\Omega_2}^2}, \quad (3.11.1)$$

$$\|(e_1, e_2)\|_{A'} \leq C(\sigma^{-\frac{1}{2}} + h + \sigma^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}}) \|(u_1, u_2)\|_{H_{\Omega_2}^2 \times H_{\Omega_2}^2}, \quad (3.13.1)$$

$$\|e_1 - e_2\|_{L_{2,\Omega_{12}}} \leq C(\sigma^{-1} + \sigma^{-\frac{1}{2}} h + h^{\frac{3}{2}}) \|(u_1, u_2)\|_{H_{\Omega_2}^2 \times H_{\Omega_2}^2}, \quad (3.14.1)$$

$$\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \leq Ch^{\frac{3}{2}} \|(u_1, u_2)\|_{H_{\Omega_2}^2 \times H_{\Omega_2}^2}. \quad (3.16)$$

В задаче 1.2 выберем

$$f(v_1, v_2) = \int_{\Omega_1} e_1 v_1 dx dy + \int_{\Omega_2} e_2 v_2 dx dy.$$

Обозначим решение задачи с такой правой частью через (w_1, w_2) . Очевидно, в условиях теоремы $(w_1, w_2) \in U \cap H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2$. Тогда [7]

$$\|(w_1, w_2)\|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2} \leq C \|(e_1, e_2)\|_{L_{2,\Omega_1} \times L_{2,\Omega_2}}. \quad (3.17)$$

Обозначим

$$N((e_1, e_2), (w_1, w_2)) = a'((e_1, e_2), (w_1, w_2)) - ((e_1, e_2), A(w_1, w_2)), \quad (3.18)$$

$$N((e_1, e_2), (w_1, w_2)) = \int_{\partial\Omega_{12}} \frac{\partial w_1}{\partial n_1} e_1 ds + \int_{\partial\Omega_{12}} \frac{\partial w_2}{\partial n_2} e_2 ds = \int_{\partial\Omega_{12}} \frac{\partial w_1}{\partial n_1} (e_1 - e_2) ds.$$

Используя (3.14.1) и (3.17), имеем

$$\begin{aligned} |N((e_1, e_2), (w_1, w_2))| &= \left\| \frac{\partial w_1}{\partial n_1} \right\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \|e_1 - e_2\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \leq \\ &\leq C \|(w_1, w_2)\|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2} (\sigma^{-1} + \sigma^{-\frac{1}{2}} h + h^{\frac{3}{2}}) \|(u_1, u_2)\|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2} \leq \\ &\leq C \|(e_1, e_2)\|_{L_{2,\Omega_1} \times L_{2,\Omega_2}} (\sigma^{-1} + \sigma^{-\frac{1}{2}} h + h^{\frac{3}{2}}) \|(u_1, u_2)\|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Из (3.17), (3.18) получим

$$\|(e_1, e_2)\|_{L_{2,\Omega_1} \times L_{2,\Omega_2}}^2 = a'((v_1, v_2), (w_1, w_2)) - N((e_1, e_2), (w_1, w_2)). \quad (3.20)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (3.20)

$$a'((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = a'((v_1, v_2), (w_1, w_2) - (L_{h_1} w_1, L_{h_2} w_2)) + a'((v_1, v_2), (L_{h_1} w_1, L_{h_2} w_2)). \quad (3.21)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (3.21), используя (3.11.1) (в этой формуле (u_1, u_2) следует положить равным (w_1, w_2)), (3.17), (3.13.1),

$$\begin{aligned} |a'((v_1, v_2), (w_1, w_2) - (L_{h_1} w_1, L_{h_2} w_2))| &\leq \|(e_1, e_2)\|_{A'} \|(w_1, w_2) - (L_{h_1} w_1, L_{h_2} w_2)\|_{A'} \leq \\ &\leq C \|(e_1, e_2)\|_{A'} (h + \sigma^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}}) \|(w_1, w_2)\|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2} \leq C(h + \sigma^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}}) \|(e_1, e_2)\|_{A'} \|(e_1, e_2)\|_{L_{2,\Omega_1} \times L_{2,\Omega_2}} \leq \\ &\leq C(\sigma^{-\frac{1}{2}} h + h^{\frac{3}{2}} + h^2 + \sigma^{\frac{1}{2}} h^{\frac{5}{2}} + \sigma h^3) \|(u_1, u_2)\|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2} \|(e_1, e_2)\|_{L_{2,\Omega_1} \times L_{2,\Omega_2}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Оценим второе слагаемое а правой части (3.21)

$$\begin{aligned}
& a'((e_1, e_2), (L_{h_1}w_1, L_{h_2}w_2)) = a'((u_1, u_2), (L_{h_1}w_1, L_{h_2}w_2)) - \\
& - a'((u_{1h}^\sigma, u_{2h}^\sigma), (L_{h_1}w_1, L_{h_2}w_2)) = a'((u_1, u_2), (L_{h_1}w_1, L_{h_2}w_2) - (w_1, w_2)) + a'((u_1, u_2), (w_1, w_2)) - \\
& - f(L_{h_1}w_1, L_{h_2}w_2) = a'((u_1, u_2), (L_{h_1}w_1, L_{h_2}w_2) - (w_1, w_2)) + f(w_1, w_2) - \\
& - f(L_{h_1}w_1, L_{h_2}w_2) = (A(u_1, u_2), (L_{h_1}w_1, L_{h_2}w_2) - (w_1, w_2)) + f(w_1, w_2) - f(L_{h_1}w_1, L_{h_2}w_2) + \\
& + \int_{\partial\Omega_{12}} \frac{\partial u_1}{\partial n_1} (L_{h_1}w_1 - w_1) ds + \int_{\partial\Omega_{12}} \frac{\partial u_2}{\partial n_2} (L_{h_2}w_2 - w_2) ds = \\
& = \int_{\partial\Omega_{12}} \frac{\partial u_1}{\partial n_1} (L_{h_1}w_1 - w_1) ds + \int_{\partial\Omega_{12}} \frac{\partial u_2}{\partial n_2} (L_{h_2}w_2 - w_2) ds. \quad (3.23)
\end{aligned}$$

На основании (3.23) имеем

$$\begin{aligned}
|a'((e_1, e_2), (L_{h_1}w_1, L_{h_2}w_2))| & \leq \| (u_1, u_2) \|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2} h^{\frac{3}{2}} \| (w_1, w_2) \|_{H_{\partial\Omega_{12}}^2 \times H_{\partial\Omega_{12}}^2} \leq \\
& \leq Ch^{\frac{3}{2}} \| (e_1, e_2) \|_{L_{2,\Omega_1} \times L_{2,\Omega_2}} \| (u_1, u_2) \|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2}. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Из (3.19)–(3.24) следует (3.15). \square

Следствие. Выбрав в (3.15) $\sigma = h^{-2}$, получим

$$\| (e_1, e_2) \|_{L_{2,\Omega_1} \times L_{2,\Omega_2}} \leq Ch \| (u_1, u_2) \|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2},$$

т. е. при таком σ скорость сходимости в норме $L_{2,\Omega_1} \times L_{2,\Omega_2}$ такая же, как и в норме $H_{\Omega_1}^1 \times H_{\Omega_2}^1$.

Выбрав в (3.15) $\sigma = h^{-\frac{3}{2}}$, получим

$$\| (e_1, e_2) \|_{L_{2,\Omega_1} \times L_{2,\Omega_2}} \leq Ch^{\frac{3}{2}} \| (u_1, u_2) \|_{H_{\Omega_1}^2 \times H_{\Omega_2}^2},$$

т. е. в этом случае скорость сходимости в норме $L_{2,\Omega_1} \times L_{2,\Omega_2}$ больше, чем в норме $H_{\Omega_1}^1 \times H_{\Omega_2}^1$.

4. Численный эксперимент

Метод опробовался на модельных задачах. Рассмотрим одну из них. В области Ω , изображенной на рис. 1, ищется решение уравнения

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$\begin{aligned}
u|_{\text{I}} &= g_1(y), \\
u|_{\text{II}} &= g_2(x), \\
\frac{\partial u}{\partial x}|_{\text{III}} &= g_3(y), \\
\left(\frac{\partial u}{\partial y} + u \right)|_{\text{IV}} &= g_4(x), \\
\left(\frac{\partial u}{\partial x} + u \right)|_{\text{V}} &= g_5(y), \\
\left(\frac{\partial u}{\partial y} + u \right)|_{\text{VI}} &= g_6(x).
\end{aligned}$$

Построим интерфейс $\partial\Omega_{12}$, как показано на рис. 1.

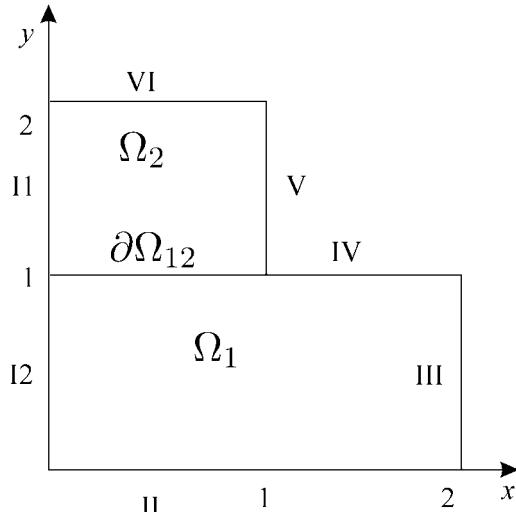


Рис. 1. Область Ω с интерфейсом.

Обозначим через u_1 след u на Ω_1 , через u_2 — след u на Ω_2 . Условия на интерфейсе имеют вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial n_1}|_{\partial\Omega_{12}} = -\sigma(u_2 - u_1)|_{\partial\Omega_{12}}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial n_1}|_{\partial\Omega_{12}} = -\frac{\partial u_2}{\partial n_2}|_{\partial\Omega_{12}},$$

где $\sigma > 0$ — штраф.

Тогда вариационная формулировка задачи со штрафом имеет вид
найти

$$(u_1, u_2) \in \overline{U} = \{(u_1, u_2) \in H_{\Omega_1}^1 \times H_{\Omega_2}^1, \ u_2|_{I1} = g_1(y), u_1|_{II} = g_2(x), \ u_1|_{I2} = g_1(y)\},$$

удовлетворяющую следующему интегральному тождеству

$$\begin{aligned} a'((u_1, u_2), (v_1, v_2)) &= \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Omega_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) dx dy + \\ &+ \int_1^2 u_1 v_1|_{y=1} dx + \int_1^2 u_2 v_2|_{x=1} dy + \int_0^1 u_2 v_2|_{y=2} dx + \sigma \int_0^1 (u_1 - u_2)(v_1 - v_2)|_{y=1} dx = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx dy + \\ &+ \int_{\Omega_2} f_2 v_2 dx dy + \int_0^1 g_3(y) v_1|_{x=2} dy + \int_1^2 g_4(x) v_1|_{y=1} dx + \int_1^2 g_5(y) v_2|_{x=1} dy + \int_0^1 g_6(x) v_2|_{y=2} dx = f(v) \\ \forall (v_1, v_2) \in U &= \{(u_1, u_2) \in H_{\Omega_1}^1 \times H_{\Omega_2}^1, \ u_2|_{I1} = 0, u_1|_{II} = 0, u_1|_{I2} = 0\}. \end{aligned}$$

В предположении $f(x, y) \in H_{\Omega}^{-1}$ проверяется выполнимость условий леммы Лакса–Мильграма ([7], с.19–20), из которой следует однозначная разрешимость рассматриваемой задачи.

Далее производится триангуляция области с использованием нестыкующейся сетки, как показано на рис. 2.

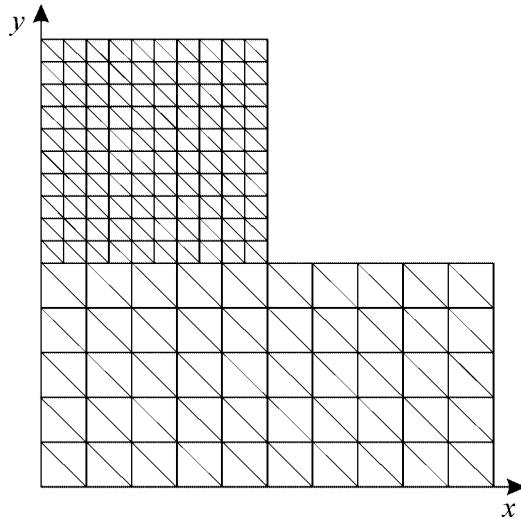


Рис. 2. Триангуляция области с использованием нестыкующейся сетки.

Шаг в области Ω_2 обозначим через h , он в два раза меньше шага в области Ω_1 . Нестыковка имеет место на интерфейсе в точках, являющихся серединами сторон больших треугольников.

Приближение к решению ищется в виде лагранжевых сплайнов первой степени. Отметим, что этот сплайн разрывен при переходе через интерфейс.

При формировании матрицы системы используется стандартная технология сборки матрицы по элементам ([11], с. 75–94).

При вычислении правых частей применяются формулы численного интегрирования Гаусса ([12], с. 202–204).

Для решения полученной системы используются стандартные процедуры пакета MATLAB.

Приведем некоторые результаты численных экспериментов. Счет велся для задач с известным точным решением. В качестве точного решения выбирались функции $u = x^2 + y^2 + 1$, $u = x + 1/(y + 1)$, $u = \sin x + \cos y + 1$, $u = \exp(xy)$ и другие.

Погрешности вычислялись в норме $H_{\Omega_1}^1 \times H_{\Omega_2}^1$, максимум-норме, евклидовой норме и поточечно. Качественная картина поведения относительных погрешностей в зависимости от шага и штрафа для всех норм одна и та же. При фиксированном шаге и увеличении штрафа относительная погрешность сначала довольно быстро уменьшается (это происходит в промежутке значений σ от 2 до 10^2 – 10^4). Затем погрешность остается малой и почти постоянной (промежуток примерно от 10^4 до 10^{11} – 10^{14}), затем погрешность начинает расти. Это связано с ростом числа обусловленности матрицы системы за счет роста σ . Поэтому выбор штрафа σ не представляет большого труда, так как промежуток для σ , при котором погрешность мала и практически постоянна, достаточно велик.

Наибольшая поточечная погрешность достигается на интерфейсе.

Аналогично ведет себя погрешность для фиксированного σ при уменьшении h .

На рис. 3 и 4 приведены графики зависимости относительной погрешности в норме $H_{\Omega_1}^1 \times H_{\Omega_2}^1$ от числа $n = 1/(2h)$, которое можно назвать густотой сетки. При этом в первом случае мы положили $\sigma = 4n^2$, а во втором $\sigma = 2n$. Согласно оценкам раздела 3 скорость сходимости в норме $H_{\Omega_1}^1 \times H_{\Omega_2}^1$ в первом случае равна $O(h)$, а во втором $O(\sqrt{h})$. Приведенные графики согласуются с этими оценками.

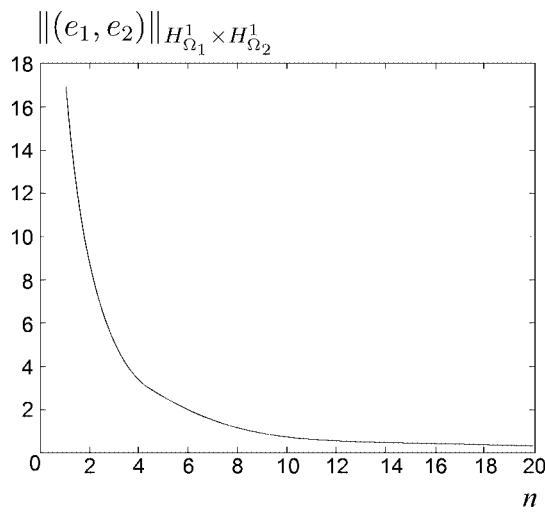


Рис. 3. График зависимости от n относительной погрешности в процентах в норме $H_{\Omega_1}^1 \times H_{\Omega_2}^1$ при густоте сетки $n = 1:20$ и штрафе $\sigma = 4n^2$.

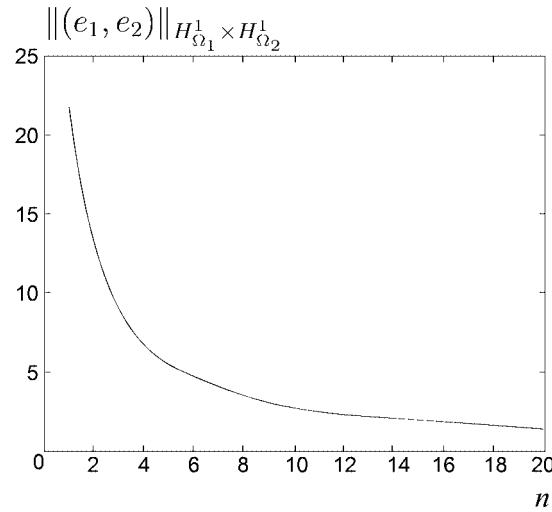


Рис. 4. График зависимости от n относительной погрешности в процентах в норме $H_{\Omega_1}^1 \times H_{\Omega_2}^1$ при густоте сетки $n = 1:20$ и штрафе $\sigma = 2n$.

Проведенные теоретические и численные исследования позволяют сделать вывод, что метод штрафа является эффективным методомстыковки сеток. Он может быть использован при решении многих задач методом конечных элементов.

Литература

1. Babuska I. *The finite element method with Lagrangian multipliers* // Numer. Math. – 1972. – V. 20. – № 3. – P. 179–192.
2. Nitsche J.A. *Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind* // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1971. – V. 36. – P. 9–15.
3. Le Tallec P., Sassi T. *Domain decomposition with nonmatching grids: augmented Lagrangian approach* // Math. Comp. – 1995. – V. 64. – P. 1367–1396.
4. Becker R., Hansbo P., Stenberg R. *A finite element method for domain decomposition with non-matching grids* // Math. Model. Numer. Anal. – 2003. – V. 37. – P. 209–225.
5. Babuska I. *The finite element method with penalty* // Math. Comp. – 1972. – V. 27. – № 122. – P. 221–228.
6. Aubin J.P. *Approximation des problèmes aux limites non homogènes et régularité de la convergence* // Calcolo. – 1969. – V. 6. – P. 117–139.
7. Кондратьев В.А. *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1967. – Т. 16. – С. 209–292.
8. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ*. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
9. Съярле Ф. *Метод конечных элементов для эллиптических задач*. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
10. Nitsche J.A. *Convergence of nonconforming methods* // Math. aspects of finite elements in partial differential equations. – New York: Academic Press, 1974. – P. 15–53.
11. Норри Д., де Фриз Ж. *Введение в метод конечных элементов*. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
12. Зенкевич О., Морган К. *Конечные элементы и аппроксимация*. – М.: Мир, 1986. – 320 с.