ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 10 (533)

УДК 517.911:514.83

В.В. КАРТАК

РАСШИРЕНИЯ ТОЧЕЧНО-ИНВАРИАНТНЫХ КЛАССОВ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

1. Введение

Изучается класс обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, разрешенных относительно старшей производной

$$y''' = f(x, y, y', y''), \tag{1}$$

у которых правая часть f принадлежит некоторому заданному семейству функций $\mathbf{F}$ ($f \in \mathbf{F}$).

Точечные преобразования общего вида

$$\widetilde{x} = \widetilde{x}(x, y), \quad \widetilde{y} = \widetilde{y}(x, y) \tag{2}$$

переводят уравнение (1) в новое уравнение

$$\widetilde{y}''' = g(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{y}', \widetilde{y}''). \tag{3}$$

Если для любой функции $f \in \mathbf{F}$ правая часть преобразованного уравнения (3) также содержится в $\mathbf{F} : g \in \mathbf{F}$, то этот класс уравнений называется *точечно-инвариантным* или *замкнутым* классом относительно преобразований (2).

Как правило, интерес вызывают специальные классы уравнений (1), правая часть которых представляет собой полином или рациональную функцию от производных y' и y''.

Наиболее изученный замкнутый класс обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка имеет вид

$$y'' = P(x, y) + 3Q(x, y)y' + 3R(x, y)y'^2 + S(x, y)y'^3. \tag{4}$$

Его изучение восходит к работам классиков конца XIX – начала XX веков. Замкнутость класса уравнений (4) позволяет строить дифференциальные инварианты и псевдоинварианты, исследовать допускаемые ими группы преобразований.

В конце XX века возродился интерес к таким уравнениям. Это связано и с развитием методов группового анализа, и с приложениями уравнений такого вида в теории динамических систем, и с актуальностью исследования уравнений Пенлеве. Современное состояние вычислительной техники позволило построить полную классификацию уравнений (4) относительно точечных преобразований, которую нельзя было построить ранее из-за сложных и громоздких вычислений.

Работа выполнена при поддержке INTAS (код проекта 03-51-5007), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 05-01-00515, 05-01-97914) и Федерального агентства по науке и инновациям (грант № РИ-111/001/027).

Точечно-инвариантный класс обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка был найден в [1]. Для того чтобы следующие дифференциальные уравнения

$$y''' = [B(x,y)y''^2 + [P(x,y)y'^2 + Q(x,y)y' + R(x,y)]y'' + S(x,y)y'^5 + \\ + L(x,y)y'^4 + K(x,y)y'^3 + M(x,y)y'^2 + N(x,y)y' + T(x,y)]/[Y(x,y) - X(x,y)y'] \quad (5)$$

под действием невырожденных точечных преобразований (2) сохраняли свой вид, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$B(x,y) = -3X(x,y).$$

Назовем класс (5) *минимальным замкнутым классом* обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. Этот класс уравнений замечателен также тем, что ему принадлежат все тринадцать уравнений Пенлеве третьего порядка, известных как уравнения Шази.

Однако оказалось, что уравнение, возникающее при исследовании точных решений нелинейного уравнения Шредингера [2]–[4],

$$y''' = \frac{y''^2}{2y'} - 2\frac{y'^2}{x^2} + \frac{1}{C^2}\left(C_1 y' - \frac{x}{4C^2}(xy' - y)\right) + \frac{(xy' - y)^2}{8C^4 y'} \quad (6)$$

не принадлежит классу (5). В связи с этим появилась необходимость в расширении минимального класса уравнений.

2. Формулы преобразования производных

Обозначим $(i+j)$-ю производную функции $\Phi(x,y)$ через $\Phi_{i.j} = \partial^{i+j}\Phi/\partial x^i \partial y^j$. Тогда прямая и обратная матрицы преобразования плоскости (2) примут вид

$$S = \begin{pmatrix} x_{1.0} & x_{0.1} \\ y_{1.0} & y_{0.1} \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_{1.0} & \widetilde{x}_{0.1} \\ \widetilde{y}_{1.0} & \widetilde{y}_{0.1} \end{pmatrix},$$

причем $\det S \neq 0$.

Законы преобразования производных y', y'' y''' под действием точечных преобразований (2) запишутся следующим образом:

$$y' = \frac{y_{1.0} + y_{0.1}\,\widetilde{y}'}{x_{1.0} + x_{0.1}\,\widetilde{y}'}, \quad (7)$$

$$y'' = \frac{b_0\widetilde{y}'' + b_1\widetilde{y}'^3 + b_2\widetilde{y}'^2 + b_3\widetilde{y}' + b_4}{(x_{1.0} + x_{0.1}\,\widetilde{y}')^3}, \quad (8)$$

где $b_0 = \det S$, $b_1 = x_{0.1}y_{0.2} - y_{0.1}x_{0.2}$, $b_2 = x_{1.0}y_{0.2} - y_{1.0}x_{0.2} + 2x_{0.1}y_{1.1} - 2x_{1.1}y_{0.1}$, $b_3 = x_{0.1}y_{2.0} - x_{2.0}y_{0.1} + 2x_{1.0}y_{1.1} - 2x_{1.1}y_{1.0}$, $b_4 = x_{1.0}y_{2.0} - y_{1.0}x_{2.0}$,

$$y''' = [a_0\widetilde{y}'''\widetilde{y}' + a_1\widetilde{y}''' + a_2\widetilde{y}''^2 + a_3\widetilde{y}''\widetilde{y}'^2 + a_4\widetilde{y}''\,\widetilde{y}' + a_5\widetilde{y}'' + \\ + a_6\widetilde{y}'^5 + a_7\widetilde{y}'^4 + a_8\widetilde{y}'^3 + a_9\widetilde{y}'^2 + a_{10}\widetilde{y}' + a_{11}]/[(x_{1.0} + x_{0.1}\,\widetilde{y}')^5], \quad (9)$$

где $a_0 = x_{0.1} \cdot \det S$, $a_1 = x_{1.0} \cdot \det S$, коэффициенты $a_0, \ldots, a_{11}$ не зависят от y', y''.

3. Первое расширение минимального замкнутого класса дифференциальных уравнений

Будем искать класс уравнений, замкнутый относительно преобразований (2), который содержит в себе уравнение (6). Для этого добавим в числитель уравнения (5) старший член $U(x,y)y''^2y'$. Преобразуем полученное уравнение, используя формулы (7)–(9):

$$y''' = \{[U(x,y)y' + B(x,y)]y''^2 + [W(x,y)y'^3 + P(x,y)y'^2 + \\ + Q(x,y)y' + R(x,y)]y'' + V(x,y)y'^6 + S(x,y)y'^5 + L(x,y)y'^4 + K(x,y)y'^3 + \\ + M(x,y)y'^2 + N(x,y)y' + T(x,y)\}/[Y(x,y) + X(x,y)y' + Z(x,y)y'^2]. \quad (10)$$

Преобразуем теперь уравнение (10) с учетом формул (7)–(9):

$$\widetilde{y}''' = \{[\widetilde{U}_1\widetilde{y}'^2 + \widetilde{U}\widetilde{y}' + \widetilde{B}]\widetilde{y}''^2 + [\widetilde{W}_1\widetilde{y}'^4 + \widetilde{W}\widetilde{y}'^3 + \widetilde{P}\widetilde{y}'^2 + \widetilde{Q}\widetilde{y}' + \widetilde{R}]\widetilde{y}'' + \\ +\widetilde{V}_1\widetilde{y}'^7 + \widetilde{V}\widetilde{y}'^6 + \widetilde{S}\widetilde{y}'^5 + \widetilde{L}\widetilde{y}'^4 + \widetilde{K}\widetilde{y}'^3 + \widetilde{M}\widetilde{y}'^2 + \widetilde{N}\widetilde{y}' + \widetilde{T}\}/[(\widetilde{Y} + \widetilde{X}\widetilde{y}' + \widetilde{Z}\widetilde{y}'^2)(x_{1.0} + x_{0.1}\widetilde{y}')]. \quad (11)$$

Введем три функции, ассоциированные с уравнением (11),

$$f(z) = \frac{\widetilde{U}_1 z^2 + \widetilde{U}z + \widetilde{B}}{x_{1.0} + x_{0.1}z}, \quad (12)$$

$$g(z) = \frac{\widetilde{W}_1 z^4 + \widetilde{W}z^3 + \widetilde{P}z^2 + \widetilde{Q}z + \widetilde{R}}{x_{1.0} + x_{0.1}z}, \quad (13)$$

$$h(z) = \frac{\widetilde{V}_1 z^7 + \widetilde{V}z^6 + \widetilde{S}z^5 + \widetilde{L}z^4 + \widetilde{K}z^3 + \widetilde{M}z^2 + \widetilde{N}z + \widetilde{T}}{x_{1.0} + x_{0.1}z}. \quad (14)$$

Они имеют полюсы первого порядка в точке $z_0 = -x_{1.0}/x_{0.1}$. Для того чтобы класс уравнений (10) был замкнут относительно преобразований (2), необходимо и достаточно, чтобы вычеты функций $f(z)$, $g(z)$ и $h(z)$ в точке z_0 были равны нулю [1]. Непосредственным подсчетом найдем эти вычеты

$$\operatorname{Re} z_{z=z_0} f(z) = (\det S)^3(U - 3Z)/x_{0.1}^2,$$
$$\operatorname{Re} z_{z=z_0} g(z) = 2(\det S)^3(U - 3Z)(x_{2.0}x_{0.1}^2 - 2x_{1.1}x_{1.0}x_{0.1} + x_{0.2}x_{1.0}^2)/x_{0.1}^5,$$
$$\operatorname{Re} z_{z=z_0} h(z) = (\det S)^3(U - 3Z)(x_{2.0}x_{0.1}^2 - 2x_{1.1}x_{1.0}x_{0.1} + x_{0.2}x_{1.0}^2)^2/x_{0.1}^8.$$

Для того чтобы все три вычета функций $f(z)$, $g(z)$ и $h(z)$ в точке z_0 были равны нулю, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$U(x,y) = 3Z(x,y).$$

Таким образом, доказана

Теорема. *Следующий класс обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$y''' = [y''^2(q_0 + 3k_2y') + y''(r_0 + r_1y' + r_2y'^2 + r_3y'^3) + \\ +p_0 + p_1y' + p_2y'^2 + p_3y'^3 + p_4y'^4 + p_5y'^5 + p_6y'^6]/[k_0 + k_1y' + k_2y'^2] \quad (15)$$

где коэффициенты q_0, r_0, r_1, r_2, $p_0, p_1, \ldots, p_6$, k_0, k_1, k_2 зависят от x, y и не зависят от y', y'', замкнут относительно точечных преобразований (2).

Назовем замкнутый класс дифференциальных уравнений (15) *первым расширением класса* (5). Уравнение (6) принадлежит классу (15).

Автор благодарит профессоров В.Л. Верещагина и В.Ю. Новокшенова за обсуждения и ценные замечания.

Литература

1. Дмитриева В.В. *Точечно-инвариантные классы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка* // Матем. заметки. – 2001. – Т. 70. – № 2. – С. 195–200.
2. Овчинников Ю.Н. *Слабый коллапс в нелинейном уравнении Шредингера* // Письма в ЖЭТФ. – 1999. – Т. 60. – Вып. 5. – С. 387–390.
3. Овчинников Ю.Н., Верещагин В.Л. *Свойства слабо коллапсирующих решений нелинейного уравнения Шредингера при больших значениях свободных параметров* // ЖЭТФ. – 2001. – Т. 120. – Вып. 6. – С. 1509–1516.
4. Овчинников Ю.Н., Верещагин В.Л. *Асимптотика слабо коллапсирующих решений нелинейного уравнения Шредингера* // Письма в ЖЭТФ. – 2001. – Т. 74. – Вып. 1, 2. – С. 76–80.

Башкирский государственный университет

Поступила 15.11.2004