ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 5 (492)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.9:517.6

А.Ф. ГАЛИМЯНОВ

О СВОЙСТВАХ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА С ЛОГАРИФМИЧЕСКИ ОСЛАБЛЕННЫМ ЯДРОМ ГИЛЬБЕРТА

Рассматривается интегральный оператор B, $s(t)=Bx$, где

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau-t}{2}|}d\tau, \tag{1}$$

$x(t)$ — непрерывная 2π периодическая функция, $c>\pi/2$. Следует отметить, что результаты работы сохраняются и при $c>1$, но вычисления будут более громоздкими.

Теорема 1. *Для функции* (1) *справедливы оценки*

$$\omega(s,h)\le\frac{8}{\pi}\int_0^h\frac{\omega(x,\tau)}{\tau}\ln^{-m}\frac{c}{\tau}d\tau+\pi h\int_h^{\pi/2}\frac{\omega(x,\tau)}{\tau^2}\ln^{-m}\frac{c}{\tau}d\tau+$$
$$+\pi hm\int_h^{\pi/2}\frac{\omega(x,\tau)}{\tau^2}\ln^{-1-m}\frac{c}{\tau}d\tau+\frac{\omega(x,h)}{2}\ln^{-m}\frac{c}{h},\quad 0<h\le\frac{\pi}{2}, \tag{2}$$

$$\|s\|\le\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\omega(x,\tau)}{\tau}\ln^{-m}\frac{c}{\tau}d\tau,\quad 0<h\le\frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Доказательство. Учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau-t}{2}|}d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau-t}{2}|}d\tau,$$

а также равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau-t}{2}|}d\tau=0,$$

при любом $0<h<\pi$ находим

$$s(t+h)-s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[x(t+\tau)-x(t+h)]\operatorname{ctg}\frac{\tau-h}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau-h}{2}|}d\tau-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[x(t+\tau)-x(t)]\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau}{2}|}d\tau=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-2h}^{2h}[x(t+\tau)-x(t+h)]\operatorname{ctg}\frac{\tau-h}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau-h}{2}|}d\tau-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-2h}^{2h}[x(t+\tau)-x(t)]\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau}{2}|}d\tau+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-2h}[x(t+\tau)-x(t+h)]\operatorname{ctg}\frac{\tau-h}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau-h}{2}|}d\tau+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{2h}^{\pi}[x(t+\tau)-x(t+h)]\operatorname{ctg}\frac{\tau-h}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau-h}{2}|}d\tau-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-2h}[x(t+\tau)-x(t)]\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau}{2}|}d\tau -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{2h}^{\pi}[x(t+\tau)-x(t)]\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau}{2}|}d\tau = \sum_{k=1}^{4} J_k,$$

где

$$J_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-2h}^{2h}[x(t+\tau)-x(t+h)]\operatorname{ctg}\frac{\tau-h}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau-h}{2}|}d\tau,$$

$$J_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-2h}^{2h}[x(t+\tau)-x(t)]\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau}{2}|}d\tau,$$

$$J_3 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-2h}+\int_{2h}^{\pi}\right)[x(t+\tau)-x(t)]\times$$

$$\times\left[\operatorname{ctg}\frac{\tau-h}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau-h}{2}|}-\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau}{2}|}\right]d\tau \equiv J_3' + J_3'',$$

$$J_4 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-2h}[x(t)-x(t+h)]\operatorname{ctg}\frac{\tau-h}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin(\tau-h)/2|}d\tau +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{2h}^{\pi}[x(t)-x(t+h)]\operatorname{ctg}\frac{\tau-h}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin(\tau-h)/2|}d\tau =$$

$$= \frac{[x(t+h)-x(t)]}{2\pi}\int_{2h}^{\pi}\left[-\operatorname{ctg}\frac{\tau-h}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau-h}{2}|}+\operatorname{ctg}\frac{\tau+h}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau+h}{2}|}\right]d\tau.$$

Оценим интеграл J_1:

$$|J_1| \le \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-2h}^{0}[x(t+\tau)-x(t)]\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau}{2}|}d\tau\right| +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left|\int_{0}^{2h}[x(t+\tau)-x(t)]\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau}{2}|}d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}\left|\int_{0}^{h}[x(t+2\tau)-x(t)]\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau}{2}|}d\tau\right| \le \frac{4}{\pi}\int_0^h\frac{\omega(x,\tau)}{\tau}\ln^{-m}\frac{c}{\tau}d\tau. \quad (4)$$

Аналогично

$$|J_2| \le \frac{4}{\pi}\int_0^h\frac{\omega(x,\tau)}{\tau}\ln^{-m}\frac{c}{\tau}d\tau. \quad (4')$$

Оценим теперь $|J_3|$, $J_3 = J_3' + J_3''$,

$$|J_3'| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{-2h}[x(t+\tau)-x(t)]\left[\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau}{2}|}-\operatorname{tg}\frac{\tau-h}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau-h}{2}|}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\operatorname{ctg}\frac{\tau-h}{2}\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau-h}{2}|}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau}{2}|}d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-2h}|x(t+\tau)-x(t)|\left|\left[\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}-\operatorname{tg}\frac{\tau-h}{2}\right]\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau}{2}|}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{tg}\frac{\tau-h}{2}\left[\ln^{m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau}{2}|}-\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau-h}{2}|}\right]\right|\times$$

$$\times\left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-h}{2}\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau-h}{2}|}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau}{2}|}d\tau\right| \le$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{2h}^{\pi}\omega(x,\tau)\left|\frac{\sin(h/2)}{\sin((\tau+h)/2)\sin(\tau/2)}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau-h}{2}|}\right|d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{2h}^{\pi}\omega(x,\tau)\left|\frac{mh\cos(\tau/2+\theta h/2)}{\sin(\tau/2+\theta h/2)}\right|\times$$

$$\times\left|\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau+h}{2}|}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau}{2}|}\ln^{m-1}\frac{c}{\sin((\tau+\theta h)/2)}d\tau\right|\leq$$

$$\leq\frac{\pi h}{2}\int_{h}^{\pi/2}\frac{\omega(x,\tau)}{\tau^2}\ln^{-m}\frac{c}{\tau}d\tau+\frac{\pi hm}{2}\times\int_{h}^{\pi/2}\frac{\omega(x,\tau)}{\tau^2}\ln^{m+1}\frac{c}{\tau}d\tau. \quad (5)$$

Интеграл J_3'' оценивается аналогично.

Оценим J_4:

$$|J_4|=\frac{|x(t+h)-x(t)|}{2\pi}\left|\int_{2h}^{\pi}\left[\operatorname{ctg}\frac{\tau-h}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau-h}{2}|}-\operatorname{ctg}\frac{\tau+h}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau+h}{2}|}\right]d\tau\right|\leq$$

$$\leq\frac{\omega(x,h)}{2\pi(1-m)}\left|\ln^{1-m}\frac{c}{|\sin((\tau-h)/2)|}\Big|_{2h}^{\pi}-\ln^{1-m}\frac{c}{|\sin((\tau+h)/2)|}\Big|_{2h}^{\pi}\right|\leq$$

$$\leq\frac{\omega(x,h)}{2}\ln^{-m}\frac{c}{h}. \quad (6)$$

Так как

$$|s(t+h)-s(t)|\leq\sum_{k=1}^{4}|J_k|, \quad (7)$$

то из оценок (4)–(6), учитывая, что функция

$$f(x)=\int_0^x\frac{\omega(x,\tau)}{\tau}\ln^{-m}\frac{c}{\tau}d\tau+x\int_x^{\pi/2}\frac{\omega(x,\tau)}{\tau^2}\ln^{-m}\frac{c}{\tau}d\tau+x\int_x^{\pi/2}\frac{\omega(x,\tau)}{\tau^2}\ln^{-m-1}\frac{c}{\tau}d\tau$$

является возрастающей, переходя в (7) к точным верхним граням, получаем требуемое неравенство (2).

Неравенство (3) доказывается аналогично неравенству (6):

$$|s(t)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau-t}{2}|}d\tau\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[x(t)-x(\tau)]\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\ln^{-m}\frac{c}{|\sin\frac{\tau-t}{2}|}d\tau\right|\leq$$

$$\leq\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\omega(x,\tau)}{\tau}\ln^{-m}\frac{c}{\tau}d\tau. \quad \square$$

Введем множество Φ положительных возрастающих функций φ, удовлетворяющих условиям

а) $\lim\limits_{\delta\to 0}\varphi(\delta)=0$, в) $\sup\limits_{\sigma>0}\frac{1}{\varphi(\sigma)}\int_0^{\sigma}\frac{\varphi(t)}{t}dt<\infty$,

б) $\varphi(\delta)$ почти возрастает, г) $\sup\limits_{\sigma>0}\frac{\sigma}{\varphi(\sigma)}\int_{\sigma}^{\pi/2}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt<\infty$.

На $[0,\pi/2]$ введем функцию

$$f(\varphi,\delta)=\int_0^{\delta}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}\ln^{-m}\frac{c}{\tau}d\tau+\delta\int_{\delta}^{\pi/2}\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}\ln^{-m}\frac{c}{\tau}d\tau+\delta\int_{\delta}^{\pi/2}\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}\ln^{-m-1}\frac{c}{\tau}d\tau. \quad (8)$$

Лемма. *Пусть функция $\varphi \in \Phi$ такова, что*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} \ln^{-m} \frac{c}{\tau} d\tau < \infty.$$

Тогда

1. $f(\varphi, \delta)$ *возрастает;*
2. $\lim\limits_{\delta \to 0} f(\varphi, \delta) = 0;$
3. $\frac{f(\varphi,\delta)}{\delta}$ *убывает;*
4. *если* $\varphi_1 = o(\varphi_2)$, *то* $f(\varphi_1, \delta) = o(f(\varphi_2, \delta))$;
5. *если* $\varphi_1 \sim \varphi_2$, *то* $f(\varphi_1, \delta) \sim f(\varphi_2, \delta)$;
6. *если* $\varphi_1 = O(\varphi_2)$, *то* $f(\varphi_1, \delta) = O(f(\varphi_2, \delta))$.

Доказательство леммы проводится аналогично [1]. Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет условию*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} \ln^{-m} \frac{c}{\tau} d\tau < \infty. \tag{9}$$

Тогда оператор B ограничен и переводит H_φ в $H_{f(\varphi,\delta)}$, где $f(\varphi, \delta)$ определяется равенством (8).

Обозначим через ΦH множество всех $\varphi(\delta) \in \Phi$, для которых выполняются условия (9) и

$$f(\varphi, \delta) = O\left(\varphi(\delta) \ln^{-m} \frac{c}{\delta}\right), \quad \delta \in (0, \pi/2).$$

Тогда из теоремы 2 непосредственно вытекает

Теорема 3. *Если $\varphi \in \Phi H$ и*

$$\psi(\delta) = \varphi(\delta) \ln^{-m} \frac{c}{\delta}, \quad 0 < \delta < 1,$$

то оператор B действует из H_φ в H_ψ и ограничен.

Из этой теоремы следует, что оператор B действует в обобщенных гёльдеровых пространствах и вполне непрерывен в этих пространствах.

Литература

1. Раджабов Б.Х., Салаев В.В. *О полной непрерывности одного сингулярного оператора* // ДАН Тадж. ССР. – 1973. – Т. 16. – № 12. – С. 7–11.

Казанский государственный университет

Поступила 11.02.2002