ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 7 (506)

УДК 539.375

В.В. СИЛЬВЕСТРОВ

МЕТОД РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЗАДАЧЕ О МЕЖФАЗНЫХ ТРЕЩИНАХ И ВКЛЮЧЕНИЯХ ПРИ НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ

Одним из первых исследователей, обративших внимание на перспективы использования римановых поверхностей для решения задач теории упругости, была Л.И. Чибрикова. В работе [1] путем сведения к краевой задаче Римана на римановой поверхности изучаются основные задачи теории упругости для областей, ограниченных алгебраическими кривыми. В [2] метод римановых поверхностей применяется для решения ряда плоских краевых задач теории аналитических функций и сингулярных интегральных уравнений, к которым сводятся многие прикладные задачи. В [3], [4] указанным методом решены основные задачи теории упругости для плоскости с конечным числом коллинеарных разрезов, включая наиболее сложную и наиболее интересную для приложений смешанную задачу при произвольном расположении точек смены типа граничных условий на берегах разрезов. Различные случаи последней задачи тем же методом изучаются в [5], [6]. Метод сведения ряда контактных задач теории упругости для системы полуплоскостей к краевой задаче Римана на римановой поверхности описан в [7]. В [8]–[11] риманова поверхность используется для решения основных задач теории упругости непосредственно на римановых поверхностях с разрезами и для изучения различных моделей упругой винтовой поверхности. Во всех перечисленных работах рассматриваются задачи для однородных упругих сред. В случаях неоднородных сред и конструкций метод римановых поверхностей для решения различных задач теории упругости применяется в [12]–[14]. Приложения данного метода для решения других задач механики и физики описаны в [15] и [16].

В данной работе методом римановых поверхностей решается плоская задача теории упругости о напряженном состоянии кусочно-однородной плоскости с системой межфазных трещин и полностью отслоившихся от среды тонких жестких остроугольных межфазных включений под действием заданных на бесконечности напряжений и конечного числа сосредоточенных сил и пар сил, расположенных как в самих средах, так и на линии раздела сред. Предполагается, что на продолжениях трещин (всех или некоторых) имеются линии скольжения неизвестных заранее длин. С помощью видоизмененных формул Колосова–Мусхелишвили задача сводится к двум отдельным краевым задачам Римана на двулистных, вообще говоря, разных римановых поверхностях. Решения как этих задач, так и комплексные потенциалы составной упругой плоскости выражаются явно через основные функционалы поверхностей и через решение вещественного аналога проблемы Якоби обращения абелевых интегралов первого рода на одной из поверхностей. Находятся асимптотические представления комплексных потенциалов в окрестностях вершин трещин, включений и концов линий скольжения, на основании которых выводятся уравнения для определения длин линий скольжения и аналитические формулы для коэффициентов интенсивности напряжений.

Различные модели межфазной трещины и их системы были предметом исследований многих авторов, основные результаты которых отражены в [17]–[19]. Полностью отслоившееся от среды отдельное тонкое жесткое межфазное включение рассматривается в ([20], с. 216–218). Различные

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 04-01-00160.

частные случаи поставленной в данной работе задачи решены методом римановых поверхностей в [21]–[24]. Задача о межфазных линейных сингулярностях различной природы при отсутствии сосредоточенных сил иным методом решена в [25].

1. Постановка механической задачи

Пусть в кусочно-однородной плоскости, составленной из разных по упругим свойствам верхней и нижней полуплоскостей, на линии раздела сред $\operatorname{Im} z = 0$ расположены трещины $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$, и полностью отслоившиеся от среды тонкие жесткие остроугольные включения $[c_k, d_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Верхняя полуплоскость имеет модуль сдвига μ_1 и коэффициент Пуассона ν_1, нижняя — μ_2 и ν_2 соответственно. В составной плоскости, вне трещин и включений, в точках z_k, $k = 1, 2, \ldots, l$, действуют сосредоточенные силы $X_k + iY_k$ и пары сил с моментами M_k относительно точек z_k. Трещины и включения расположены друг относительно друга произвольно. Расположение точек z_k также может быть любым, причем часть из них может быть расположена на линии раздела сред.

Поскольку модель классической межфазной трещины при любых видах нагрузок приводит к физическому противоречию — перехлесту берегов трещины в окрестностях ее вершин [26], [27], то, следуя [28], для устранения этого противоречия будем полагать наличие на продолжениях трещин линий скольжения $[a_k - l'_k, a_k]$ и $[b_k, b_k + l''_k]$ с неизвестными заранее длинами l'_k и l''_k, которые находятся после решения задачи из условий ограниченности напряжений в точках a_k, b_k. В некоторых случаях, исходя из физической сути задачи, часть чисел l'_k, l''_k можно заранее брать равными нулю. Будем считать, что все числа l'_k, l''_k известны, и отрезки $[a_k - l'_k, b_k + l''_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$ и $[c_k, d_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, между собой общих точек не имеют.

На берегах трещин считаем заданными значения нормального σ_y и касательного τ_{xy} напряжений

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})^{\pm}(t) = p^{\pm}(t), \quad t \in L_1, \quad L_1 = \bigcup_{k=1}^{m} (a_k, b_k); \tag{1.1}$$

на сторонах включений — значения касательного напряжения и производной $\partial v/\partial x$ от нормальной компоненты вектора смещения

$$\tau_{xy}^{\pm}(t) = q^{\pm}(t), \quad (\partial v/\partial x)^{\pm}(t) = s^{\pm}(t), \quad t \in L_2, \quad L_2 = \bigcup_{k=1}^{n} (c_k, d_k); \tag{1.2}$$

на линиях скольжения — значения касательного напряжения и предполагаем непрерывность нормального напряжения и нормальной компоненты вектора смещения

$$\tau_{xy}^{\pm}(t) = q^{\pm}(t), \quad \sigma_y^{+}(t) = \sigma_y^{-}(t), \quad v^{+}(t) = v^{-}(t), \quad t \in L_3, \quad L_3 = \bigcup_{k=1}^{m} ((a_k - l'_k, a) \cup (b_k, b_k + l''_k)). \tag{1.3}$$

Вне линии $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ полуплоскости жестко соединены друг с другом, что выражается в непрерывности вектора смещений и вектора напряжений. На бесконечности составной плоскости считаем заданными значения нормальных σ_x, σ_y, касательного τ_{xy} напряжений и вращения ε:

$$\sigma_{x1}^{\infty} = \sigma_1, \quad \sigma_{x2}^{\infty} = \sigma_2, \quad \sigma_{y1}^{\infty} = \sigma_{y2}^{\infty} = \sigma, \quad \tau_{xy1}^{\infty} = \tau_{xy2}^{\infty} = \tau, \quad \varepsilon_1^{\infty} = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2^{\infty} = \varepsilon_2,$$

подчиненные условиям неразрывности смещений на бесконечности [29]

$$\mu_2(1 + \varkappa_1)\sigma_1 - \mu_1(1 + \varkappa_2)\sigma_2 = [\mu_1\varkappa_2 - \mu_2\varkappa_1 + 3(\mu_2 - \mu_1)]\sigma,$$
$$2\mu_1\mu_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = (\mu_1 - \mu_2)\tau.$$

Индекс “1” здесь и далее соответствует верхней полуплоскости, индекс “2” — нижней, и $\varkappa_j = 3 - 4\nu_j$, $j = 1, 2$. Кроме того, считаем заданными значения нормальных компонент N_k главных векторов внешних сил, действующих на включения $[c_k, d_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Требуется найти функции (комплексные потенциалы), через которые выражаются механические параметры составной упругой плоскости (напряжения, вращение, смещения), и исследовать их поведение вблизи вершин трещин, включений и концов линий скольжения.

2. Краевая задача для комплексных потенциалов

Для нахождения механических параметров воспользуемся предложенными Г.П. Черепановым ([30], с. 37–38) видоизменениями известных формул Колосова–Мусхелишвили. Согласно им напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} вращение ε и частная производная по x от вектора смещения $u+iv$ в точке $z=x+iy$ составной плоскости находятся по следующим формулам:

в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$

$$\begin{gathered}\sigma_x+\sigma_y=4\operatorname{Re}\Phi(z),\quad 2\mu_1\varepsilon=(1+\varkappa_1)\operatorname{Im}\Phi(z),\\ \sigma_y-i\tau_{xy}=\Phi(z)+\Omega(\overline{z})+(z-\overline{z})\overline{\Phi'(z)},\\ 2\mu_1(u+iv)'_x=\varkappa_1\Phi(z)-\Omega(\overline{z})-(z-\overline{z})\overline{\Phi'(z)};\end{gathered}\tag{2.1}$$

в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z<0$

$$\begin{gathered}\sigma_x+\sigma_y=4\operatorname{Re}F(z),\quad 2\mu_2\varepsilon=(1+\varkappa_2)\operatorname{Im}F(z),\\ \sigma_y-i\tau_{xy}=F(z)+\alpha_3\Omega(\overline{z})+\alpha_4\Phi(\overline{z})+(z-\overline{z})\overline{F'(z)},\\ 2\mu_2(u+iv)'_x=\varkappa_2F(z)-\alpha_3\Omega(\overline{z})-\alpha_4\Phi(\overline{z})-(z-\overline{z})\overline{F'(z)},\\ F(z)=\alpha_1\Phi(z)+\alpha_2\Omega(z),\\ \alpha_1=\frac{\mu_1+\mu_2\varkappa_1}{\mu_1(1+\varkappa_2)},\quad \alpha_2=\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1(1+\varkappa_2)},\quad \alpha_3=\frac{\mu_2+\mu_1\varkappa_2}{\mu_1(1+\varkappa_2)},\quad \alpha_4=\frac{\mu_1\varkappa_2-\mu_2\varkappa_1}{\mu_1(1+\varkappa_2)},\end{gathered}\tag{2.2}$$

где $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ — искомые кусочно-голоморфные функции класса $h_0(L)$ ([31], с. 256) с линией разрыва L. Эти функции и будем брать в качестве комплексных потенциалов составной упругой плоскости.

Из (1.1)–(1.3) на основании формул (2.1), (2.2) при условиях

$$\lim_{z\to t\pm i0}(z-\overline{z})\Phi'(z)=0,\quad \lim_{z\to t\pm i0}(z-\overline{z})\Omega'(z)=0,\quad t\in L,\tag{2.3}$$

получим краевые условия

$$\begin{aligned}&\Phi^+(t)+\Omega^-(t)=p^+(t),\\ &\alpha_1\Phi^-(t)+\alpha_2\Omega^-(t)+\alpha_3\Omega^+(t)+\alpha_4\Phi^+(t)=p^-(t),\quad t\in L_1;\\ &\operatorname{Im}[\varkappa_1\Phi^+(t)-\Omega^-(t)]=2\mu_1s^+(t),\\ &\operatorname{Im}[\varkappa_2\alpha_1\Phi^-(t)+\varkappa_2\alpha_2\Omega^-(t)-\alpha_3\Omega^+(t)-\alpha_4\Phi^+(t)]=2\mu_2s^-(t),\quad t\in L_2;\\ &\operatorname{Re}[\Phi^+(t)+\Omega^-(t)]=\operatorname{Re}[\alpha_1\Phi^-(t)+\alpha_2\Omega^-(t)+\alpha_3\Omega^+(t)+\alpha_4\Phi^+(t)],\\ &\mu_2\operatorname{Im}[\varkappa_1\Phi^+(t)-\Omega^-(t)]=\mu_1\operatorname{Im}[\varkappa_2\alpha_1\Phi^-(t)+\varkappa_2\alpha_2\Omega^-(t)-\alpha_3\Omega^+(t)-\alpha_4\Phi^+(t)],\quad t\in L_3;\\ &\operatorname{Im}[\Phi^+(t)+\Omega^-(t)]=-q^+(t),\\ &\operatorname{Im}[\alpha_1\Phi^-(t)+\alpha_2\Omega^-(t)+\alpha_3\Omega^+(t)+\alpha_4\Phi^+(t)]=-q^-(t),\quad t\in L_2\cup L_3.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ выражаются через соответствующие верхней и нижней полуплоскостям комплексные потенциалы Мусхелишвили $\Phi_1(z)$, $\Psi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$, $\Psi_2(z)$ по формулам [30]: при $\operatorname{Im} z>0$

$$\Phi(z)=\Phi_1(z),\quad \Omega(z)=\frac{1}{\alpha_3}[\overline{\Phi_2(\overline{z})}+z\overline{\Phi_2'(\overline{z})}+\overline{\Psi_2(\overline{z})}]-\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\Phi_1(z)$$

и при $\operatorname{Im} z < 0$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\alpha_1}\Phi_2(z) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}[\overline{\Phi_1(\overline{z})} + z\overline{\Phi_1'(\overline{z})} + \overline{\Psi_1(\overline{z})}], \quad \Omega(z) = \overline{\Phi_1(\overline{z})} + z\overline{\Phi_1'(\overline{z})} + \overline{\Psi_1(\overline{z})}.$$

Из этих формул и известных представлений комплексных потенциалов Мусхелишвили в окрестностях точек приложения сосредоточенных сил и пар сил ([32], с. 195–200) получаются следующие представления функций $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ вблизи точек z_k и $\overline{z}_k$.

Если $\operatorname{Im} z_k > 0$, то

$$\Phi(z) = -\frac{X_k + iY_k}{2\pi(1+\varkappa_1)(z-z_k)} + O(1), \quad \Omega(z) \sim -\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\Phi(z) \ \text{ при } \ z \to z_k, \tag{2.5}$$
$$\Omega(z) = \frac{\varkappa_1(X_k + iY_k)}{2\pi(1+\varkappa_1)(z-\overline{z}_k)} + \frac{(\overline{z}_k - z_k)(X_k - iY_k) + i(1+\varkappa_1)M_k}{2\pi(1+\varkappa_1)(z-\overline{z}_k)^2} + O(1),$$
$$\Phi(z) \sim -(\alpha_2/\alpha_1)\Omega(z) \ \text{ при } \ z \to \overline{z}_k.$$

Если $\operatorname{Im} z_k < 0$, то

$$\Phi(z) = -\frac{X_k + iY_k}{2\pi\alpha_1(1+\varkappa_2)(z-z_k)} + O(1), \quad \Omega(z) \text{ ограничена при } z \to z_k, \tag{2.6}$$
$$\Omega(z) = \frac{\varkappa_2(X_k + iY_k)}{2\pi\alpha_3(1+\varkappa_2)(z-\overline{z}_k)} + \frac{(\overline{z}_k - z_k)(X_k - iY_k) + i(1+\varkappa_2)M_k}{2\pi\alpha_3(1+\varkappa_2)(z-\overline{z}_k)^2} + O(1),$$
$$\Phi(z) \ \text{ ограничена при } z \to \overline{z}_k.$$

Если $\operatorname{Im} z_k = 0$, то

$$\Phi(z) = -\frac{X_k + iY_k}{2\pi\alpha_1(1+\varkappa_2)(z-z_k)} + O(1), \tag{2.7}$$
$$\Omega(z) = \frac{\varkappa_2(X_k + iY_k)}{2\pi\alpha_3(1+\varkappa_2)(z-z_k)} + \frac{i(M_k - z_kY_k)}{2\pi\alpha_3(z-z_k)^2} + O(1) \ \text{ при } \ z \to z_k.$$

Представления (2.5), (2.6) получены при условии, что точка $\overline{z}_k$ не совпадает ни с одной из остальных точек z_j $(j \neq k)$. Если какие-то две точки $\overline{z}_k$ и z_j совпадают, то в точках $z_k = \overline{z}_j$ и $z_j = \overline{z}_k$ происходит наложение особенностей функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, что выражается в суммировании соответствующих представлений этих функций при $z \to z_k$ и $z \to \overline{z}_k$.

В окрестности бесконечности имеют место представления

$$\Phi(z) = \Gamma_1 + \Gamma_3 z^{-1} + O(z^{-2}), \quad \Omega(z) = \Gamma_2 + \Gamma_4 z^{-1} + O(z^{-2}), \tag{2.8}$$
$$\Gamma_1 = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma) + 2i\mu_1(1+\varkappa_1)^{-1}\varepsilon_1, \quad \Gamma_2 = \sigma - i\tau - \Gamma_1,$$
$$\Gamma_3 = -\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2\varkappa_1}\frac{X+iY}{2\pi}, \quad \Gamma_4 = \frac{\mu_1\varkappa_2}{\mu_2 + \mu_1\varkappa_2}\frac{X+iY}{2\pi},$$

где

$$X + iY = i\int_{L_1}[p^+(t) - p^-(t)]dt + \int_{L_2}[q^+(t) - q^-(t)]dt + \sum_{k=1}^{m} N_k + \sum_{k=1}^{l}(X_k + iY_k)$$

— главный вектор внешних сил, действующих на трещинах, включениях и в точках z_k.

Таким образом, для нахождения комплексных потенциалов $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ составной упругой плоскости имеем краевую задачу (2.4) в классе функций $h_0(L)$, имеющих в окрестностях точек z_k, $\overline{z}_k$, $k = 1, 2, \ldots, l$, и бесконечности представления (2.5)–(2.8).

3. Переход на риманову поверхность

Из условий (2.4) путем несложных арифметических действий для нахождения новых неизвестных функций

$$F_1(z) = \alpha_1 \Phi(z) - \alpha_3 \Omega(z), \quad F_2(z) = \Phi(z) + \Omega(z) \tag{3.1}$$

получим две отдельные краевые задачи

$$F_1^+(t) - F_1^-(t) = 2g_1(t), \quad t \in L_1 \cup L_3, \tag{3.2}$$
$$\operatorname{Im} F_1^{\pm}(t) = h_1^{\pm}(t), \quad t \in L_2,$$
$$2g_1(t) = \begin{cases} p^+(t) - p^-(t), & t \in L_1; \\ i[q^-(t) - q^+(t)], & t \in L_3, \end{cases}$$
$$h_1^+(t) = [2\mu_1 s^+(t) - q^+(t)](1+\varkappa_1)^{-1} + [2\mu_2 s^-(t) + \varkappa_2 q^-(t)](1+\varkappa_2)^{-1},$$
$$h_1^-(t) = [2\mu_1 s^+(t) + \varkappa_1 q^+(t)](1+\varkappa_1)^{-1} + [2\mu_2 s^-(t) - q^-(t)](1+\varkappa_2)^{-1}, \quad t \in L_2,$$

и

$$F_2^+(t) + \alpha F_2^-(t) = 2g_2(t), \quad \alpha = \alpha_1/\alpha_3, \quad t \in L_1, \tag{3.3}$$
$$\operatorname{Im} F_2^{\pm}(t) = h_2^{\pm}(t), \quad t \in L_2 \cup L_3,$$
$$2g_2(t) = [\mu_2(1+\varkappa_1)p^+(t) + \mu_1(1+\varkappa_2)p^-(t)](\mu_2 + \mu_1\varkappa_2)^{-1}, \quad t \in L_1,$$
$$h_2^+(t) = \begin{cases} [2\mu_1\mu_2(s^+(t) - s^-(t)) - \mu_2 q^+(t) - \mu_1\varkappa_2 q^-(t)](\mu_2 + \mu_1\varkappa_2)^{-1}, & t \in L_2; \\ -[\mu_2 q^+(t) + \mu_1\varkappa_2 q^-(t)](\mu_2 + \mu_1\varkappa_2)^{-1}, & t \in L_3, \end{cases}$$
$$h_2^-(t) = \begin{cases} [2\mu_1\mu_2(s^-(t) - s^+(t)) - \mu_2\varkappa_1 q^+(t) - \mu_1 q^-(t)](\mu_1 + \mu_2\varkappa_1)^{-1}, & t \in L_2; \\ -[\mu_2\varkappa_1 q^+(t) + \mu_1 q^-(t)](\mu_1 + \mu_2\varkappa_1)^{-1}, & t \in L_3, \end{cases}$$

в классе функций h_0. В окрестностях точек ∞ и z_k, $\overline{z}_k$ функции $F_1(z)$, $F_2(z)$ согласно (2.5)–(2.8) при $\operatorname{Im} z_k > 0$ должны иметь представления

$$F_1(z) = \alpha_1\Gamma_1 - \alpha_3\Gamma_2 - \frac{X+iY}{2\pi z} + O(z^{-2}), \quad F_2(z) = \sigma - i\tau + \alpha_5\frac{X+iY}{2\pi z} + O(z^{-2}), \quad z \to \infty, \tag{3.4}$$
$$\alpha_5 = \mu_1\mu_2(\varkappa_1\varkappa_2 - 1)[(\mu_1 + \mu_2\varkappa_1)(\mu_2 + \mu_1\varkappa_2)]^{-1}$$

и

$$F_1(z) = -\frac{X_k + iY_k}{2\pi(1+\varkappa_1)(z - z_k)} + O(1), \quad F_2(z) \sim \frac{\alpha_3 - \alpha_4}{\alpha_3}F_1(z), \quad z \to z_k, \tag{3.5}$$
$$F_1(z) = -\frac{\varkappa_1(X_k + iY_k)}{2\pi(1+\varkappa_1)(z - \overline{z}_k)} + \frac{(z_k - \overline{z}_k)(X_k - iY_k) - i(1+\varkappa_1)M_k}{2\pi(1+\varkappa_1)(z - \overline{z}_k)^2} + O(1),$$
$$F_2(z) \sim (\alpha_1^{-1}\alpha_2 - 1)F_1(z), \quad z \to \overline{z}_k;$$

при $\operatorname{Im} z_k < 0$

$$F_1(z) = -\frac{X_k + iY_k}{2\pi(1+\varkappa_2)(z - z_k)} + O(1), \quad F_2(z) \sim \frac{1}{\alpha_1}F_1(z), \quad z \to z_k, \tag{3.6}$$
$$F_1(z) = -\frac{\varkappa_2(X_k + iY_k)}{2\pi(1+\varkappa_2)(z - \overline{z}_k)} + \frac{(z_k - \overline{z}_k)(X_k - iY_k) - i(1+\varkappa_2)M_k}{2\pi(1+\varkappa_2)(z - \overline{z}_k)^2} + O(1),$$
$$F_2(z) \sim -\alpha_3^{-1}F_1(z), \quad z \to \overline{z}_k;$$

при $\operatorname{Im} z_k = 0$

$$F_1(z) = -\frac{X_k + iY_k}{2\pi(z - z_k)} + \frac{i(z_k Y_k - M_k)}{2\pi(z - z_k)^2} + O(1), \tag{3.7}$$

$$F_2(z) = \alpha_5 \frac{X_k + iY_k}{2\pi(z - z_k)} + \frac{i(M_k - z_k Y_k)}{2\pi\alpha_3(z - z_k)^2} + O(1), \quad z \to z_k.$$

Обе задачи (3.2) и (3.3) представляют собой комбинацию краевой задачи Римана и частного случая краевой задачи Гильберта — задачи Шварца. Их решения будем строить методом симметрии путем сведения их к краевой задаче Римана на двулистной римановой поверхности [3]. Иные методы решения этих задач имеются в [25], [33].

Рассмотрим сначала задачу (3.3). Обозначим концы линий L_2, L_3, расположенные в порядке их возрастания, единообразно через $r_0, r_1, \dots, r_{2\rho+1}$, где $\rho + 1$ $(n - 1 \leq \rho \leq 2m + n - 1)$ есть общее число включений и линий скольжения. Заметим, что число $\rho - n + 1$ линий скольжения не обязательно равно $2m$. На продолжениях некоторых трещин их может и не быть. Некоторые из концов линии L_1 совпадают с концами линии L_3. Число таких совпадений равно $\rho - n + 1$. Обозначим все эти концы через $r'_1, r'_2, \dots, r'_{\rho-n+1}$. Остальные концы линий L_2, L_3 (их число равно $\rho + n + 1$) обозначим через $r''_1, r''_2, \dots, r''_{\rho+n+1}$. Ясно, что $\{r'_j\}_{j=1}^{\rho-n+1} \cup \{r''_j\}_{j=1}^{\rho+n+1} = \{r_j\}_{j=0}^{2\rho+1}$.

Пусть $\mathcal{R}$ — двулистная риманова поверхность алгебраической функции $w = w(z)$, определяемой из уравнения

$$w^2 = f(z), \quad f(z) = (z - r_0)(z - r_1) \cdots (z - r_{2\rho+1}),$$

образованная из двух экземпляров $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ расширенной комплексной плоскости с разрезами вдоль линий L_2 и L_3 ($L_2 \cup L_3 = \bigcup\limits_{j=0}^{\rho} [r_{2j}, r_{2j+1}]$) путем склеивания берегов разрезов “крест-накрест”. На этой поверхности

$$w(z) = \begin{cases} \sqrt{f(z)}, & z \in \mathbf{C}_1; \\ -\sqrt{f(z)}, & z \in \mathbf{C}_2, \end{cases} \tag{3.8}$$

где однозначная в $\mathbf{C} \setminus (L_2 \cup L_3)$ ветвь функции $\sqrt{f(z)}$ фиксируется условием $\sqrt{f(z)} \sim z^{\rho+1}$ при $z \to \infty$.

На поверхности $\mathcal{R}$ введем функцию

$$\mathcal{F}(z, w) = \begin{cases} F_2(z), & (z, w) \in \mathbf{C}_1; \\ \overline{F_2(\overline{z})}, & (z, w) \in \mathbf{C}_2, \end{cases} \tag{3.9}$$

удовлетворяющую условию симметрии

$$\overline{\mathcal{F}(\overline{z}, -\overline{w})} = \mathcal{F}(z, w). \tag{3.10}$$

Тогда из краевых условий (3.3) получим следующую краевую задачу Римана на поверхности $\mathcal{R}$:

$$\begin{gathered} \mathcal{F}^+(t, \xi) + \alpha \mathcal{F}^-(t, \xi) = 2g(t, \xi), \quad (t, \xi) \in L_1, \quad L_1 \subset \mathbf{C}_1, \\ \mathcal{F}^+(t, \xi) + \alpha^{-1} \mathcal{F}^-(t, \xi) = 2\alpha^{-1} g(t, \xi), \quad (t, \xi) \in L_1^*, \quad L_1^* = L_1 \subset \mathbf{C}_2, \\ \mathcal{F}^+(t, \xi) - \mathcal{F}^-(t, \xi) = 2ih(t, \xi), \quad (t, \xi) \in \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = L_2^+ \cup L_3^+ \cup L_2^- \cup L_3^-, \end{gathered} \tag{3.11}$$

$$g(t, \xi) = g_2(t), \quad (t, \xi) \in L_1 \cup L_1^*, \quad h(t, \xi) = \begin{cases} h_2^+(t), & (t, \xi) \in L_2^+ \cup L_3^+; \\ h_2^-(t), & (t, \xi) \in L_2^- \cup L_3^-, \end{cases} \tag{3.12}$$

где через L_1^* обозначена линия L_1 на листе $\mathbf{C}_2$, а через $\mathcal{L}$ — линия соединения листов поверхности, состоящая из верхних и нижних берегов разрезов $[r_{2j}, r_{2j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, \rho$, обходимых так, что лист $\mathbf{C}_1$ остается слева. На концах указанных разрезов функция $\mathcal{F}(z, w)$ может иметь интегрируемые особенности, а в точках $(z_k, w_k) \in \mathbf{C}_1$, $(\overline{z}_k, \overline{w}_k) \in \mathbf{C}_1$ $(w_k = \sqrt{f(z_k)}$, $k = 1, 2, \dots, l)$

и симметричных им точках $(\overline{z}_k, \overline{w}_k) \in \mathbf{C}_2$, $(z_k, -w_k) \in \mathbf{C}_2$ имеет полюса, определяемые на основании равенств (3.5)–(3.7) и (3.9).

Краевая задача Римана–Гильберта (3.3) на плоскости и краевая задача Римана (3.10), (3.11) на поверхности $\mathcal{R}$ эквивалентны между собой в том смысле, что их решения связаны друг с другом равенством (3.9). Аналогично, задача (3.2) эквивалентна задаче Римана (3.10), (3.11) при $\alpha = -1$, $\mathcal{L} = L_2^+ \cup L_2^-$ и

$$g(t,\xi) = g_1(t), \quad t \in L_1 \cup L_3 \cup L_1^* \cup L_3^*, \quad h(t,\xi) = \begin{cases} h_1^+(t), & (t,\xi) \in L_2^+; \\ h_1^-(t), & (t,\xi) \in L_2^-, \end{cases} \tag{3.13}$$

которую, в отличие от первого случая, надо рассматривать на римановой поверхности функции

$$\omega(z) = \sqrt{(z-c_1)(z-d_1)(z-c_2)(z-d_2)\cdots(z-c_n)(z-d_n)} \tag{3.14}$$

с линиями склеивания листов по берегам разрезов $[c_k, d_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Однозначная ветвь функции $\omega(z)$ на листе $\mathbf{C}_1$ с разрезами по указанным отрезкам фиксируется условием $\omega(z) \sim z^n$ при $z \to \infty$. Заметим, что функции $w(z)$ и $\omega(z)$ совпадают лишь в случае отсутствия линий скольжения, т. е. когда $L_3 = \emptyset$.

4. Решение задачи

С целью удовлетворения условию симметрии (3.10) возьмем каноническую функцию однородной задачи, соответствующей задаче (3.11), в виде

$$\mathrm{X}(z,w) = (z-r_0)^\rho \left(\prod_{k=1}^m (z-b_k) \right)^{-1} \eta(z) \mathrm{X}_0(z,w) \overline{\mathrm{X}_0(\overline{z}, -\overline{w})}, \tag{4.1}$$

где $\eta(z) = 1$ при $2\rho \le m$, $\eta(z) = \prod\limits_{j=1}^{2\rho-m} (z-\delta_j)^{-1}$ при $2\rho > m$, δ_j — произвольно фиксированные точки действительной оси, не лежащие на линиях L_1, L_2, L_3 и $\mathrm{X}_0(z,w)$ — частное решение "половинной" однородной задачи

$$\mathrm{X}_0^+(t,\xi) + \alpha \mathrm{X}_0^-(t,\xi) = 0, \quad (t,\xi) \in L_1 \subset \mathbf{C}_1, \tag{4.2}$$

определяемое формулой

$$\mathrm{X}_0(z,w) = \exp\left[\frac{\ln(-\alpha)}{2\pi i} \int_{L_1} dW + \sum_{j=1}^{\rho} \left(\int_{(r_0,0)}^{(s_j,\zeta_j)} dW + m_j \oint_{\mathbf{a}_j} dW + n_j \oint_{\mathbf{b}_j} dW \right) \right], \tag{4.3}$$

$$dW = \frac{w+\xi}{2\xi} \frac{dt}{t-z}, \quad w = w(z), \quad \xi = w(t), \tag{4.4}$$

с неизвестными пока точками $(s_j, \zeta_j) \in \mathcal{R}$ ($\zeta_j = w(s_j)$, $j = 1, 2, \ldots, \rho$) и целыми числами m_j, n_j, $j = 1, 2, \ldots, \rho$. В формуле (4.3) через $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{b}_j$ обозначены канонические сечения поверхности $\mathcal{R}$, выбранные как в [3], и интеграл от $(r_0, 0)$ до (s_j, ζ_j) берется по любому пути, не пересекающему эти сечения. Заметим, что сечение $\mathbf{a}_j$ состоит из берегов разреза $[r_{2j}, r_{2j+1}] \subset \mathbf{C}_1$, обходимых против часовой стрелки. Множитель $\eta(t)$ в (4.1) взят для достижения "нужного" убывания функции $\mathrm{X}(z,w)$ при $z \to \infty$.

В силу своей структуры функция $\mathrm{X}(z,w)$ удовлетворяет условию (3.10) и является решением однородной задачи (3.11). Действительно, функция $\mathrm{X}_1(z,w) = \overline{\mathrm{X}_0(\overline{z}, -\overline{w})}$ в силу равенств $\mathrm{X}_1^\pm(t,\xi) = \overline{\mathrm{X}_0^\mp(t,-\xi)}$, $(t,\xi) \in L_1^*$, $(t,-\xi) \in L_1$, и (4.2) удовлетворяет краевому условию $\mathrm{X}_1^+(t,\xi) + \alpha^{-1}\mathrm{X}_1^-(t,\xi) = 0$, $(t,\xi) \in L_1^*$. Поэтому $\mathrm{X}(z,w)$ удовлетворяет краевым условиям (3.11) при $g(t,\xi) = 0$, $h(t,\xi) = 0$.

Из формул (4.1), (4.3) с учетом положительности коэффициента α и равенства $w^-(t) = -w^+(t)$, $t \in [r_{2j}, r_{2j+1}] \subset \mathbf{C}_1$ получим

$$\mathrm{X}(z,w) = \Big(\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}} \prod_{j=1}^{\rho} \sqrt{(z-s_j)(z-\overline{s}_j)}\Big)\eta(z)e^{w(z)\chi(z)}, \tag{4.5}$$

$$\chi(z) = -i\beta \int\limits_{L_1} \frac{dt}{w(t)(t-z)} + \sum_{j=1}^{\rho}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{(\overline{s}_j,\overline{\zeta}_j)}^{(s_j,\zeta_j)} \frac{dt}{w(t)(t-z)} + 2m_j \int\limits_{r_{2j}}^{r_{2j+1}} \frac{dt}{w^+(t)(t-z)}\right), \quad \beta = \frac{\ln(\alpha)}{2\pi},$$

где интеграл от $(\overline{s}_j, \overline{\zeta}_j)$ до (s_j, ζ_j) берется по произвольно фиксированному гладкому пути, расположенному симметрично относительно действительной оси на $\mathbf{C}_1 \setminus [r_0, r_{2\rho+1}]$; у функции $\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}$ берется ветвь, однозначная в плоскости с разрезом по отрезку $[a_k, b_k]$, а у функции $\sqrt{(z-s_j)(z-\overline{s}_j)}$ — ветвь, однозначная в плоскости с разрезом по тому пути, по которому берется интеграл. Обе функции эквивалентны z при $z \to \infty$. Анализ функции $w(z)\chi(z)$ при $z \to \infty$ показывает, что для ее ограниченности на бесконечности, а значит, и ограниченности функции $\mathrm{X}(z,w)$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{j=1}^{\rho} \int\limits_{(r_0,0)}^{(s_j,\zeta_j)} \frac{t^{k-1}dt}{w(t)} + 2m_j \int\limits_{r_{2j}}^{r_{2j+1}} \frac{t^{k-1}dt}{w^+(t)}\right) = \beta \int\limits_{L_1} \frac{t^{k-1}dt}{w(t)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \rho, \tag{4.6}$$

представляющих собой вещественный аналог проблемы Якоби обращения абелевых интегралов первого рода на поверхности $\mathcal{R}$. В силу равенства

$$\mathrm{Im} \int\limits_{(r_0,0)}^{(s_j,\zeta_j)} \frac{t^{k-1}dt}{w(t)} = \mathrm{Im} \int\limits_{(r_0,0)}^{(\overline{s}_j,-\overline{\zeta}_j)} \frac{t^{k-1}dt}{w(t)}$$

замена точки (s_j, ζ_j) на точку $(\overline{s}_j, -\overline{\zeta}_j)$ проблему (4.6) не меняет, поэтому для решения проблемы можно принять следующую схему.

Заменим проблему (4.6) классической проблемой Якоби ([34], с. 309; [35], с. 314–320)

$$\sum_{j=1}^{\rho} \int\limits_{(r_0,0)}^{(s_j,\zeta_j)} \frac{t^{k-1}dt}{w(t)} + m_j \oint\limits_{\mathbf{a}_j} \frac{t^{k-1}dt}{w(t)} + n_j \oint\limits_{\mathbf{b}_j} \frac{t^{k-1}dt}{w(t)} = \beta_k + i\beta \int\limits_{L_1} \frac{t^{k-1}dt}{w(t)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \rho, \tag{4.7}$$

с произвольно фиксированными действительными числами β_k, и найдем ее решение (т. е. точки $(s_j, \zeta_j) \in \mathcal{R}$ и целые числа m_j, n_j) для каких-нибудь значений β_k, например, методами, описанными в ([3]; [34], с. 309-322; [36]). Если при этом какая-нибудь точка (s_j, ζ_j) лежит в $\mathbf{C}_2$, то заменим ее точкой $(\overline{s}_j, -\overline{\zeta}_j) \in \mathbf{C}_1$. Хотя проблема (4.7) для каждого фиксированного набора чисел β_k разрешима единственным образом, тем не менее проблема (4.6) имеет бесконечное множество решений, зависящих от ρ действительных параметров β_k. Воспользуясь произволом этих параметров, добьемся, чтобы точки (s_j, ζ_j) лежали на $\mathbf{C}_1$ вне линии L_1 и вне отрезка $[r_0, r_{2\rho+1}]$.

Построенная функция $\mathrm{X}(z,w)$ на концах линии L_1 имеет особенности интегрируемого характера и ограничена на концах линий L_2 и L_3, не совпадающих с концами линии L_1. В точках $(s_j, \zeta_j) \in \mathbf{C}_1$ и $(\overline{s}_j, -\overline{\zeta}_j) \in \mathbf{C}_2$, $j = 1, 2, \ldots, \rho$, она имеет простые нули, а при $(z,w) \to (\infty, \pm\infty)$ убывает как функция $\pm z^{\rho-m}$ при $2\rho \le m$ и как $\pm z^{-\rho}$ при $2\rho > m$. Кроме того, при $2\rho > m$ она имеет еще простые полюса в точках с аффиксами δ_j, $j = 1, 2, \ldots, 2\rho - m$, на обоих листах поверхности. Во всех остальных точках поверхности $\mathcal{R}$ функция $\mathrm{X}(z,w)$ ограничена и отлична от нуля.

Используя функцию $\mathrm{X}(z,w)$, по описанной в ([37], с. 136–155) процедуре построения "симметричного" решения краевой задачи Римана найдем общее решение задачи (3.10), (3.11) с требуемыми полюсами и с интегрируемыми особенностями на концах линий L_1, L_2, L_3:

$$\mathcal{F}(z,w) = \mathrm{X}(z,w)[\phi(z,w) + \overline{\phi(\overline{z},-\overline{w})} + \psi(z,w) + P(z) - iw(z)Q(z)], \tag{4.8}$$

$$\phi(z,w) = \frac{1}{\pi i}\int_{L_1}\frac{g(t,\xi)}{\mathrm{X}^+(t,\xi)}dW, \quad \psi(z,w) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathcal{L}}\frac{h(t,\xi)}{\mathrm{X}^+(t,\xi)}dW,$$

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\lambda} A_j z^j + \sum_{j=1}^{\rho}\left(\frac{C_j\zeta_j}{z-s_j} + \frac{\overline{C}_j\overline{\zeta}_j}{z-\overline{s}_j}\right) + \sum_{j=1}^{l}\left(\frac{D_j}{z-z_j} + \frac{\overline{D}_j}{z-\overline{z}_j} + \frac{E_j}{(z-z_j)^2} + \frac{\overline{E}_j}{(z-\overline{z}_j)^2}\right),$$

$$Q(z) = \left(\prod_{k=1}^{\rho+n+1}(z-r''_k)\right)^{-1}\sum_{j=0}^{\lambda+n} B_j z^j + i\sum_{j=1}^{\rho}\left(\frac{C_j}{z-s_j} - \frac{\overline{C}_j}{z-\overline{s}_j}\right) +$$

$$+i\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{G_j}{z-z_j} - \frac{\overline{G}_j}{z-\overline{z}_j} + \frac{H_j}{(z-z_j)^2} - \frac{\overline{H}_j}{(z-\overline{z}_j)^2}\right),$$

где $\lambda = \max\{\rho, m-\rho\}$, $\zeta_j = w(s_j)$; функции $g(t,\xi)$, $h(t,\xi)$ и ядро Вейерштрасса dW даются формулами (3.12) и (4.4) соответственно; A_j, B_j — действительные и C_j, D_j, E_j, G_j, H_j — комплексные постоянные; r''_k — концы линий L_2 и L_3, не совпадающие с концами линии L_1. В случае $2\rho > m$, т.к. функция $\mathrm{X}(z,w)$ в точках поверхности с аффиксами δ_j имеет простые полюса, для ограниченности $\mathcal{F}(z,w)$ в этих точках должны выполняться $2\rho - m$ комплексных условий

$$\phi(\delta_j,\eta_j) + \overline{\phi(\delta_j,-\eta_j)} + \psi(\delta_j,\eta_j) + P(\delta_j) - i\eta_j Q(\delta_j) = 0, \quad \eta_j = \sqrt{f(\delta_j)}, \quad j = 1,2,\ldots,2\rho-m. \tag{4.9}$$

Теперь для нахождения функции $F_2(z)$ согласно (3.8), (3.9) надо в формулах (4.5), (4.8) положить $w = \sqrt{f(z)}$ $(z \in \mathbf{C}_1)$ и взять $F_2(z) = \mathcal{F}(z,w)$. Тогда получим

$$F_2(z) = \mathrm{X}_2(z)[F_{2*}(z) + P(z) - iw(z)Q(z)], \tag{4.10}$$

$$F_{2*}(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{L_1}\left(\operatorname{Im}\frac{g_2(t)}{\mathrm{X}_2^+(t)}\right)\frac{dt}{t-z} + \frac{w(z)}{\pi i}\int\limits_{L_1}\left(\operatorname{Re}\frac{g_2(t)}{\mathrm{X}_2^+(t)}\right)\frac{dt}{w(t)(t-z)} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_2\cup L_3}\left(\frac{h_2^+(t)}{\mathrm{X}_2^+(t)} - \frac{h_2^-(t)}{\mathrm{X}_2^-(t)}\right)\frac{dt}{t-z} + \frac{w(z)}{2\pi}\int\limits_{L_2\cup L_3}\left(\frac{h_2^+(t)}{\mathrm{X}_2^+(t)} + \frac{h_2^-(t)}{\mathrm{X}_2^-(t)}\right)\frac{dt}{w^+(t)(t-z)},$$

где $\mathrm{X}_2(z) = \mathrm{X}(z,w)$ с $w = \sqrt{f(z)}$. Для нахождения постоянных D_k, E_k, G_k, H_k разложим функцию $F_2(z)$ в ряды Лорана в окрестностях точек z_k, $\overline{z}_k$ и сравним их с представлениями (3.5)–(3.7). В результате при каждом конкретном значении $k = 1,2,\ldots,l$ получим четыре линейных уравнения относительно указанных постоянных. Например, в случае $\operatorname{Im} z_k > 0$ эти уравнения имеют вид

$$E_k + w_k H_k = 0,$$

$$\mathrm{X}_2(z_k)[D_k + w_k G_k + w'_k H_k] = \frac{(\alpha_4 - \alpha_3)(X_k + iY_k)}{2\pi\alpha_3(1+\varkappa_1)},$$

$$\overline{\mathrm{X}_2(\overline{z}_k)}[E_k - w_k H_k] = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)[(\overline{z}_k - z_k)(X_k + iY_k) + i(1+\varkappa_1)M_k]}{2\pi\alpha_1(1+\varkappa_1)},$$

$$\overline{\mathrm{X}_2(\overline{z}_k)}[D_k - w_k G_k - w'_k H_k] + \overline{\mathrm{X}'_2(\overline{z}_k)}[E_k - w_k H_k] = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\varkappa_1(X_k - iY_k)}{2\pi\alpha_1(1+\varkappa_1)},$$

где $w_k = w(z_k)$, $w'_k = w'(z_k)$. После нахождения постоянных D_k, E_k, G_k, H_k и удовлетворения условиям (4.9) функция $F_2(z)$ будет содержать $2m + n + 2$ неизвестных действительных постоянных A_j, B_j, $\operatorname{Re} C_j$, $\operatorname{Im} C_j$.

Для нахождения функции $F_1(z)$ с целью получения ограниченного на бесконечности решения в формулах (4.8) возьмем $\mathrm{X}(z, w) = [(z - \delta_1)(z - \delta_2 \cdots (z - \delta_{n-1})]^{-1}$, положим $\mathcal{L} = L_2^+ \cup L_2^-$, определим функции $g(t, \xi)$, $h(t, \xi)$ по формулам (3.13) и заменим $w(z)$ на функцию $\omega(z)$, определяемую формулой (3.14). Тогда получим

$$F_1(z) = \mathrm{X}_1(z)\left[F_{1*}(z) + R(z) - i\frac{S(z)}{\omega(z)}\right], \quad \mathrm{X}_1(z) = \prod_{j=1}^{n-1}(z - \delta_j)^{-1}, \tag{4.11}$$

$$F_{1*}(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{L_1 \cup L_3} \frac{\operatorname{Im} g_1(t)}{\mathrm{X}_1(t)}\frac{dt}{t - z} + \frac{\omega(z)}{\pi i}\int\limits_{L_1} \frac{\operatorname{Re} g_1(t)}{\mathrm{X}_1(t)}\frac{dt}{\omega(t)(t - z)} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_2} \frac{h_1^+(t) - h_1^-(t)}{\mathrm{X}_1(t)}\frac{dt}{t - z} + \frac{\omega(z)}{2\pi}\int\limits_{L_2} \frac{h_1^+(t) + h_1^-(t)}{\mathrm{X}_1(t)}\frac{dt}{\omega^+(t)(t - z)},$$

$$R(z) = \sum_{j=0}^{n-1} A'_j z^j + \sum_{j=1}^{l}\left(\frac{D'_j}{z - z_j} + \frac{\overline{D'_j}}{z - \overline{z}_j} + \frac{E'_j}{(z - z_j)^2} + \frac{\overline{E'_j}}{(z - \overline{z}_j)^2}\right),$$

$$S(z) = \sum_{j=0}^{2n-1} B'_j z^j + \sum_{j=1}^{l}\left(\frac{G'_j}{z - z_j} - \frac{\overline{G'_j}}{z - \overline{z}_j} + \frac{H'_j}{(z - z_j)^2} - \frac{\overline{H'_j}}{(z - \overline{z}_j)^2}\right),$$

где $\delta_j \in \mathbf{R}\backslash(L_1 \cup L_2 \cup L_3)$, а A'_j, B'_j — действительные и D'_j, E'_j, G'_j, H'_j — комплексные постоянные. Из-за полюсов δ_j функции $\mathrm{X}_1(z)$ для ограниченности $F_1(z)$ в точках δ_j должны выполняться $n - 1$ комплексных условий

$$F_{1*}(\delta_j) + R(\delta_j) - iS(\delta_j)/\omega(\delta_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n - 1. \tag{4.12}$$

В данном случае постоянные D'_j, E'_j, G'_j, H'_j, находятся так же, как в случае функции $F_2(z)$. После их нахождения и удовлетворения условиям (4.12) функция $F_1(z)$ будет содержать $n + 2$ произвольных действительных постоянных. В итоге функции $F_1(z)$, $F_2(z)$, следовательно, и комплексные потенциалы $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ содержат $2m + 2n + 4$ произвольных действительных постоянных. Для их нахождения имеем семь независимых действительных условий (3.4) на бесконечности, $m - 1$ комплексных условий однозначности смещений при обходе трещин вместе с линиями скольжения на их продолжениях, n действительных условий однозначности горизонтальных смещений при обходе включений и $n - 1$ действительных условий заданных значений нормальных компонент N_k внешних сил, действующих на включения. Тем самым число действительных условий также равно $2m+2n+4$. Их линейная независимость и однозначная разрешимость системы уравнений относительно неизвестных постоянных A_j, B_j, $\operatorname{Re} C_j$, $\operatorname{Im} C_j$, A'_j, B'_j доказывается аналогично [32].

Решения (4.10), (4.11) получены в предположении существования всех интегралов, через которые они записаны. Как данное предположение, так и предположение выполнения условий (2.3) имеют силу, например, если исходные граничные данные задачи $p^{\pm}(t)$, $q^{\pm}(t)$, $s^{\pm}(t)$ являются Н-непрерывными на соответствующих линиях, включая концы.

Зная функции $F_1(z)$, $F_2(z)$, на основании равенств (3.1) несложно выразить через них искомые комплексные потенциалы

$$\Phi(z) = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_3}F_1(z) + \frac{1}{1 + \alpha}F_2(z), \quad \Omega(z) = -\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_3}F_1(z) + \frac{\alpha}{1 + \alpha}F_2(z) \tag{4.13}$$

и затем на основании формул (2.1), (2.2) выразить механические параметры упругой среды непосредственно через $F_1(z)$, $F_2(z)$, которые можно принять в качестве новых комплексных потенциалов составной упругой плоскости.

Заметим, что для решения задач (3.2) и (3.3) могут использоваться и другие канонические функции $X_1(z)$, $X_2(z)$. Например, можно взять $X_1(z) \equiv 1$. Тогда условия (4.12) надо заменить на условия

$$\lim_{z\to\infty} z^k F_1(z) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

которые представляются нам менее удобными.

5. Поведение комплексных потенциалов

До сих пор мы предполагали известными длины всех линий скольжения, число которых равно $\rho - n + 1$. Для их нахождения потребуем ограниченности напряжений в точках перехода от трещин к линиям скольжения. Так как согласно (2.1), (2.2) напряжения выражаются через комплексные потенциалы $\Phi(z)$, $\Omega(z)$, то прежде изучим поведение комплексных потенциалов в окрестностях указанных точек и одновременно в окрестностях остальных концов трещин, включений и линий скольжения.

Пусть $r_* = a_k$ или $r_* = b_k$ — вершина трещины, на продолжении которой имеется линия скольжения, т. е. r_* — общий конец линий L_1 и L_3. В п. 3 такие точки мы обозначили $r'_1, r'_2, \ldots, r'_{\rho-n+1}$. Из формул (4.10), (4.11), где функции $g_{1,2}(t)$, $h^{\pm}_{1,2}(t)$ находятся по формулам (3.2), (3.3), следует, что функции $F_1(z)$, $F_2(z)$ в окрестности точки r_* имеют вид [31], [33]:

$$F_1(z) = A_* \ln|z - r_*| + O(1), \quad F_2(z) = B^{\pm}_*(z - r_*)^{-1/2} + O(1), \quad z \to r_* \pm i0, \tag{5.1}$$

$$A_* = \pm\frac{1}{2\pi}\big(i[p^+(r_*) - p^-(r_*)] - q^+(r_*) + q^-(r_*)\big),$$

$$B^{\pm}_* = N^{\pm}[F_{2*}(r_*) + P(r_*)], \quad N^{\pm} = \lim_{z\to r_*\pm i0}(z - r_*)^{1/2} X_2(z),$$

где у коэффициента A_* берется знак “+” в случае $r_* = a_k$ и знак “$-$” в случае $r_* = b_k$. Анализ напряжений на основе формул (2.1), (2.2), (4.13) показывает, что логарифмическая особенность функции $F_1(z)$ влияет только на неограниченность напряжения σ_x в точке $z = r_*$, причем только в случае, когда $\operatorname{Re} A_* \neq 0$. Поэтому при выполнении условия $\operatorname{Re} A_* = 0$ напряжения вблизи точки r_* будут иметь только особенность, определяемую степенной функцией $B^{\pm}_*(z - r_*)^{-1/2}$. Таким образом, для ограниченности напряжений в точке r_* необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Re} A_* = 0$, $B^{\pm}_* = 0$. Первое условие равносильно условию

$$\operatorname{Im}[p^+(r_*) - p^-(r_*)] + q^+(r_*) - q^-(r_*) = 0. \tag{5.2}$$

Будем считать, что оно выполнено априори. Действительно, исходя из физической сути задачи, естественно предположить непрерывность касательных напряжений τ_{xy} в точках $r_* \pm i0$, расположенных на берегах трещины и линии скольжения на их стыке. Это означает, что $\operatorname{Im} p^+(r_*) + q^+(r_*) = 0$, $\operatorname{Im} p^-(r_*) + q^-(r_*) = 0$, откуда следует равенство (5.2).

Несложно заметить, что у чисел $B^{\pm}_*$ первые множители $N^{\pm} \neq 0$, причем $N^+ = -\alpha N^-$, а второй множитель один и тот же, причем является действительным. Следовательно, условия $B^{\pm}_* = 0$ равносильны одному действительному условию $F_{2*}(r_*) + P(r_*) = 0$. Тем самым для нахождения $\rho - n + 1$ длин линий скольжения имеем $\rho - n + 1$ действительных трансцендентных уравнений

$$F_{2*}(r'_j) + P(r'_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \rho - n + 1.$$

Исследование этой системы в планы данной статьи не входит.

Если концы некоторых линий скольжения известны заранее и требуется найти комплексные потенциалы, допускающие интегрируемые особенности в некоторых точках $r_* = r'_j$ перехода от трещин к линиям скольжения, то их поведение вблизи этих точек определяется на основе формул (4.13), где функции $F_1(z)$, $F_2(z)$ имеют представления (5.1). Отсюда находим

$$\Phi(z)=\frac{K_I^{\pm}-iK_{II}^{\pm}}{2\sqrt{2\pi\alpha}}(\lambda(r_j')(z-r_j'))^{-1/2}+O(\ln|z-r_*|),\quad z\to r_j'\pm 0,$$
$$K_I^{+}-iK_{II}^{+}=[F_{2*}(r_j')+P(r_j')]\lim_{z\to r_j'\pm 0}(\lambda(r_j')(z-r_j'))^{1/2}\mathrm{X}_2(z),\quad K_I^{-}-iK_{II}^{-}=-\alpha^{-1}(K_I^{+}-iK_{II}^{+}),$$

где $\lambda(r_j')=-1$, если r_j' — начало некоторой трещины, и $\lambda(r_j')=1$, если r_j' — конец трещины. У функции $(\lambda(r_j')(z-r_j'))^{1/2}$ берется ветвь, однозначная в плоскости с разрезом по лучу $[r_j,\infty]$, содержащему соответствующую трещину, и которая на продолжении этого луча вблизи точки r_j' принимает действительные значения. Множитель $2\sqrt{2\pi\alpha}$ в знаменателе взят для того, чтобы действительные числа $K_I^{\pm}$, $K_{II}^{\pm}$ в числителе совпали с принятыми в механике разрушения параметрами ([38], с. 17; [39]), называемыми коэффициентами интенсивности напряжений (КИН). Заметим, что в верхней и нижней полуплоскостях вблизи точки r_j' комплексные потенциалы имеют, вообще говоря, разные представления. В верхней полуплоскости их поведение вблизи точки r_j' определяется коэффициентами K_I^{+}, K_{II}^{+}, а в нижней — коэффициентами K_I^{-}, K_{II}^{-}. Так как $F_{2*}(r_j')+P(r_j')$ — действительное число, то $\frac{K_I^{+}}{K_{II}^{+}}=\frac{K_I^{-}}{K_{II}^{+}}=\frac{N_I^{+}}{N_{II}^{+}}$, где $N_I^{+}-iN_{II}^{+}=N^{+}$. Следовательно, все КИН $K_I^{\pm}$, $K_{II}^{\pm}$ выражаются через один из них (напр., K_I^{+}) линейно с коэффициентами, зависящими только от геометрических параметров и упругих постоянных среды, и не зависящими от механических параметров задачи.

Если $r_*=a_k$ или $r_*=b_k$ — вершина трещины, на продолжении которой нет линии скольжения, то $F_1(z)$ снова имеет в точке r_* лишь логарифмическую особенность, а $F_2(z)$ — степенную особенность. В данном случае

$$\Phi(z)=\frac{K_I-iK_{II}}{2\sqrt{2\pi\alpha}}(\mp(z-r_*))^{-\frac{1}{2}\pm i\beta}+O(\ln|z-r_*|),\quad z\to r_*,$$
$$K_I-iK_{II}=\frac{2\sqrt{2\pi\alpha}}{1+\alpha}[F_{2*}(r_*)+P(r_*)-iw(r_*)Q(r_*)]\lim_{z\to r_*}(\mp(z-r_*))^{\frac{1}{2}\mp i\beta}\mathrm{X}_2(z),$$

где все верхние знаки берутся в случае $r_*=a_k$, а нижние — в случае $r_*=b_k$.

Если $r_*=a_k-l_k'$ или $r_*=b_k+l_k''$ — конец линии скольжения, т. е. совпадает с одной из точек r_j'', $j=1,2,\dots,\rho+n-1$, то

$$\Phi(z)=-\frac{iK_{II}}{(1+\alpha)\sqrt{2\pi}}(\mp(z-r_*))^{-1/2}+O(\ln|z-r_*|),\quad z\to r_*,\qquad (5.3)$$
$$K_{II}=\sqrt{2\pi}\mathrm{X}_2(z)\lim_{z\to r_*}(\mp(z-r_*))^{1/2}w(z)Q(z),$$

где верхние знаки “$-$” берутся в случае $r_*=a_k-l_k'$, а нижние “$+$” — в случае $r_*=b_k+l_k''$. Так как $\mathrm{X}_2(r_*)$ — действительное число, то число K_{II}, называемое КИН [30], — также действительное число. Аналогично, если $r_*=c_k$ или $r_*=d_k$ — вершина включения, то в ее окрестности справедливо представление (5.3) с новым действительным КИН

$$K_{II}=\sqrt{2\pi}\mathrm{X}_1(r_*)\lim_{z\to r_*}(\mp(z-r_*))^{1/2}\frac{S(z)}{\omega(z)}+\sqrt{2\pi}\mathrm{X}_2(r_*)\lim_{z\to r_*}(\mp(z-r_*))^{1/2}w(z)Q(z),$$

где снова верхние знаки “$-$” берутся в случае $r_*=c_k$, а нижние “$+$” — в случае $r_*=d_k$.

Согласно (4.13) во всех случаях $\Omega(z)\sim\alpha\Phi(z)$ при $z\to r_*$.

Литература

1. Чибрикова Л.И. *О методе симметрии в теории упругости* // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 10. – С. 102–112.

2. Чибрикова Л.И. *О применении римановых поверхностей при исследовании плоских краевых задач и сингулярных интегральных уравнений* // Тр. семин. по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1970. – Вып. 7. – С. 28–44.
3. Зверович Э.И. *Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях* // УМН. – 1971. – Т. 26. – Вып. 1. – С. 113–179.
4. Зверович Э.И. *Смешанная задача теории упругости для плоскости с разрезами, лежащими на вещественной оси* // Тр. симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа. – Тбилиси: Мецниереба, 1973. – Т. 1. – С. 103–114.
5. Корзан Л.А. *Однородная смешанная задача теории упругости для полосы с разрезами, лежащими на вещественной оси* // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-матем. наук. – 1996. – № 4. – С. 44–49.
6. Корзан Л.А. *Явное решение одного частного случая смешанной задачи теории упругости для плоскости с разрезами, лежащими на вещественной оси* // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-матем. наук. – 1997. – № 1. – С. 61–67.
7. Нуллер Б.М. *Контактные задачи для системы упругих полуплоскостей* // ПММ. – 1990. – Т. 54. – Вып. 2. – С. 302–306.
8. Сильвестров В.В. *Первая и вторая основные задачи теории упругости на двулистной римановой поверхности* // Краевые задачи и их прилож. – Чебоксары: Изд-во Чувашск. ун-та, 1986. – С. 111–119.
9. Сильвестров В.В. *Основная смешанная задача теории упругости на двулистной римановой поверхности* // Краевые задачи и их прилож. – Чебоксары: Изд-во Чувашск. ун-та, 1989. – С. 104–109.
10. Сильвестров В.В. *Основные задачи теории упругости на многолистной римановой поверхности* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 2. – С. 89–92.
11. Сильвестров В.В. *Упругая слабоизогнутая винтовая поверхность* // Изв. национальной АНИ Чувашск. Республ. – 1996. – № 6. – С. 69–76.
12. Моисеев Н.Г., Попов Г.Я. *Точное решение задачи об изгибе полубесконечной пластины, полностью сцепленной с упругим полупространством* // Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. – 1990. – № 6. – С. 112–123.
13. Антипов Ю.А., Моисеев Н.Г. *Точное решение плоской задачи для составной плоскости с разрезом, пересекающим линию раздела сред* // ПММ. – 1991. – Т. 55. – Вып. 4. – С. 662–671.
14. Сильвестров В.В. *Напряженно-деформированное состояние многолистных пластинчатых конструкций* // Изв. РАН. Механ. твердого тела. – 1992. – № 2. – С. 124–135.
15. Чибрикова Л.И. *Граничные задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях* // Итоги науки и техн. Сер. матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1980. – Т. 18. – С. 3–66.
16. Rodin Yu.L. *The Riemann Boundary Problem on Riemann Surfaces.* – Dordrecht: Kluwer, 1988. – 199 p.
17. Дундурс Дж., Комниноу М. *Обзор и перспектива исследования межфазной трещины* // Механ. композиц. материалов. – 1979. – № 3. – С. 387–396.
18. Comninou M. *An overview of interface cracks* // Engineering Fracture Mech. – 1990. – V. 37. – № 1. – P. 197–208.
19. Raju I.S., Dattaguru B. *Review of methods for calculating fracture parameters for interface crack problems* // Comput. Mechanics'95. – Heidelberg: Springer-Verlag, 1995. – V. 2. – P. 2020–2026.
20. Попов Г.Я. *Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.* – М.: Наука, 1982. – 342 с.
21. Сильвестров В.В. *Система трещин на разделе упругих сред при наличии линий скольжения* // Тр. 10-й межвуз. конф. Матем. моделир. и краевые задачи. Ч. 1. – Самара: Изд-во Самарск. ун-та, 2000. – С. 153–157.
22. Сильвестров В.В., Ярдухин А.К. *Межфазная трещина и отслоившееся тонкое жесткое гладкое межфазное включение при сложном нагружении* // Пробл. механ. неупругих деформаций. – М.: Физматлит, 2001. – С. 301–313.

23. Ярдухин А.К. *Взаимодействие межфазной трещины с полубесконечным межфазным включением* // Актуальн. проблемы динамики и прочности в теоретич. и прикл. механ. – Минск: УП "Технопринт", 2001. – С. 510–514.
24. Ярдухин А.К. *Система трещин и отслоившееся включение на линии раздела сред* // Тр. 12-й межвуз. конф. Матем. моделир. и краевые задачи. Ч. 1. – Самара: Изд-во Самарск. ун-та, 2002. – С. 221–224.
25. Нахмейн Е.Л., Нуллер Б.М. *О дозвуковом стационарном движении штампов и гибких накладок по границе упругой полуплоскости и составной плоскости* // ПММ. – 1989. – Т. 53. – Вып. 2. – С. 134–144.
26. England A.H. *A crack between dissimilar media* // Trans. of ASME. J. Appl. Mech. – 1965. – V. 32. – № 2. – P. 400–402.
27. Malyshev B.M., Salganik R.L. *The strength of adhesive joints using the theory of cracks* // Intern. J. of Fracture. – 1965. – V. 1. – P. 114–118.
28. Comninou M. *The interface crack in shear field* // Trans. of ASME. J. Appl. Mech. – 1978. – V. 45. – № 2. – P. 287–290.
29. Rice J.R., Sih G.C. *Plane problem of cracks in dissimilar media* // Trans. of ASME. J. Appl. Mech. – 1965. – V. 32. – № 2. – P. 418–423.
30. Черепанов Г.П. *Механика разрушения композиционных материалов.* – М.: Наука, 1983. – 296 с.
31. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: Наука, 1968. – 511 с.
32. Мусхелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения, плоская теория упругости, кручение и изгиб.* – М.: Наука, 1966. – 707 с.
33. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
34. Чеботарев Н.Г. *Теория алгебраических функций.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 396 с.
35. Спрингер Дж. *Введение в теорию римановых поверхностей.* – М.: Ин. лит., 1960. – 343 с.
36. Antipov Y.A., Silvestrov V.V. *Factorization on a Riemann surface in scattering theory* // Quart. J. Mech. and Appl. Math. – 2002. – V. 55. – Pt. 4. – P. 607–654.
37. Чибрикова Л.И. *Основные граничные задачи для аналитических функций.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. – 303 с.
38. Саврук М.П. *Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами.* Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пос. в 4-х томах. Т. 2. – Киев: Наук. думка, 1988. – 566 с.
39. Rice J.R. *Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks* // Trans. of ASME. J. Appl. Mech. – 1988. – V. 55. – № 1. – P. 98–103.

Чувашский государственный
университет им. И.Н. Ульянова

Поступила
28.11.2002