ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 8 (531)

УДК 517.983

В.П. ДЕРЕВЕНСКИЙ

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НАД БАНАХОВОЙ АЛГЕБРОЙ

В статье устанавливаются формулы дифференцирования гиперболических функций над неабелевой банаховой алгеброй и виды обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (ОДУ.1), решениями которых являются эти функции.

1. Постановка задачи. Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра с единицей E над действительным числовым полем R, т.е. полное метрическое пространство над R, являющееся ассоциативной алгеброй, произведение элементов которой непрерывно по каждому из сомножителей ([1], с. 346), L_N — N-мерная алгебра Ли над $\mathcal{A}$ с базисными элементами E_α и структурными константами $C^\gamma_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,N})$. Рассмотрим гиперболические функции из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$:

$$\operatorname{sh} Q=(e^Q-e^{-Q})/2, \qquad \operatorname{ch} Q=(e^Q+e^{-Q})/2, \tag{1}$$

$$\operatorname{th} Q=\operatorname{sh} Q\operatorname{ch}^{-1} Q, \qquad \operatorname{cth} Q=\operatorname{ch} Q\operatorname{sh}^{-1} Q, \tag{2}$$

где $Q=Q(t)$ — непрерывная функция из R в $\mathcal{A}$, функции (2) определяются в точках существования функций, обратных к функциям (1), а $e^Q=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}Q^n$.

Ставится задача об определении

1) правил дифференцирования функций (1), (2),

2) вида нелинейных ОДУ.1, решениями которых эти функции могут быть,

3) условий разрешимости в квадратурах таких уравнений.

2. Простейшие свойства гиперболических функций устанавливаются на основе их определений. Отметим равномерную сходимость по норме рядов, определяющих $\operatorname{ch} Q$ и $\operatorname{sh} Q$, которая следует из сходимости задающих их экспонент ([2], с. 92).

Предложение 1. *Все гиперболические функции* (1), (2) *коммутируют между собой.*

Доказательство. Так как $\mathcal{A}$ есть алгебра над R, то из определения экспоненциальной функции в виде ряда следует $\operatorname{ch} Q=\sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l)!}Q^{2l}$, а $\operatorname{sh} Q=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}Q^{2k+1}$. Следовательно,

$$[\operatorname{sh} Q,\operatorname{ch} Q]\equiv\operatorname{sh} Q\operatorname{ch} Q-\operatorname{ch} Q\operatorname{sh} Q=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l)!}[Q^{2k+1},Q^{2l}]\equiv 0.$$

В силу импликации $([\mathcal{A},B]=0)\Rightarrow\{([\mathcal{A},B^{-1}]=0)\wedge([\mathcal{A}^{-1},B^{-1}]=0)\}$ из перестановочности функций (1) вытекает как перестановочность их с функциями (2), так и перестановочность последних между собой. □

Доказанное свойство предопределяет наличие у гиперболических функций над $\mathcal{A}$ взаимосвязей, аналогичных тем, что существуют в скалярном случае.

Предложение 2. *Функции* (1), (2) *удовлетворяют соотношениям*

$$\operatorname{ch}^2 Q - \operatorname{sh}^2 Q = E, \tag{3}$$

$$\begin{gathered} 2\operatorname{sh} Q \operatorname{ch} Q = \operatorname{sh} 2Q, \quad \operatorname{ch}^2 Q + \operatorname{sh}^2 Q = \operatorname{ch} 2Q, \\ \operatorname{th}^2 Q = E - \operatorname{ch}^{-2} Q, \quad \operatorname{cth}^2 Q = E + \operatorname{sh}^{-2} Q, \\ \operatorname{ch}(-Q) = \operatorname{ch} Q, \quad \operatorname{sh}(-Q) = -\operatorname{sh} Q. \end{gathered} \tag{4}$$

Доказательство этого утверждения производится как в скалярной теории с учетом предложения 1 и свойств экспоненты над ассоциативной алгеброй $(e^Q)^n = e^{nQ}$, $e^Q e^{-Q} = E$.

Предложение 3. *Основные гиперболические и тригонометрические функции связаны соотношениями* $\operatorname{sh} Q = -i\sin(iQ)$, $\operatorname{ch} Q = \cos(iQ)$, *где* $i = \sqrt{-1}$,

$$\sin S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} S^{2k+1}, \quad \cos S = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{(2l)!} S^{2l}.$$

Доказательство. Рассмотрим комплексное расширение $\mathcal{A}$, т. е. банахову алгебру $\mathcal{B}$ над комплексным числовым полем C, привычно обозначая $X = \operatorname{Re} Z$ и $Y = \operatorname{Im} Z$ для $Z = X + iY$, где $Z \in \mathcal{B}$, $(X, Y) \subset \mathcal{A}$. Так как $\mathcal{B}$ является алгеброй, то для ее элементов справедлива формула Эйлера $\exp(iQ) = \cos Q + i \sin Q$. Подставляя $S = iQ$ в ряды, определяющие $\sin S$ и $\cos S$, получаем ряды, задающие функции (1).

3. Формулы дифференцирования гиперболических функций над $\mathcal{A}$ могут быть установлены с помощью правил дифференцирования экспонент над ассоциативной алгеброй. Определяет их

Теорема 1. *Если* $Q(t)$ *— непрерывно дифференцируемый по* t *элемент* $\mathcal{A}$, *то гиперболические функции* (1), (2) *имеют следующие производные*:

$$\operatorname{sh}' Q = \operatorname{ch} QU - \operatorname{sh} QV, \tag{5}$$

$$\operatorname{ch}' Q = \operatorname{sh} QU - \operatorname{ch} QV, \tag{6}$$

$$\operatorname{th}' Q = \operatorname{ch}^{-1} QU \operatorname{ch}^{-1} Q, \tag{7}$$

$$\operatorname{cth}' Q = -\operatorname{sh}^{-1} QU \operatorname{sh}^{-1} Q, \tag{8}$$

где

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \operatorname{ad}_Q^{2n} Q', \quad V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \operatorname{ad}_Q^{2n-1} Q'; \tag{9}$$

$Q' \equiv \frac{d}{dt} Q$, ad_Q *— оператор присоединенного отображения,* $\operatorname{ad}_Q^k Q' = [Q, [Q, \ldots, [Q, Q'\underbrace{], \ldots]}_{k}$.

Доказательство. Воспользуемся формулой дифференцирования экспоненты над ассоциативной алгеброй ([3], с. 964)

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} e^{-\beta H} = -\int_0^{\beta} e^{-(\beta - u)H} \frac{\partial H}{\partial \lambda} e^{-uH} du,$$

где $H = H(\lambda)$ — зависящий от числового параметра λ элемент алгебры, а β и u — постоянные числа. При $\beta = 1$ и $H = Q(t)$ эта формула принимает вид

$$\frac{d}{dt} e^{-Q} = -e^{-Q} \int_0^1 e^{uQ} Q' e^{-uQ} dt.$$

Если под знаком интеграла правой части полученного равенства воспользоваться формулой Бейкера–Хаусдорфа ([4], с. 655)

$$\exp AB\exp(-A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \operatorname{ad}_A^n B,$$

а затем проинтегрировать полученный ряд, то оно запишется как

$$\frac{d}{dt}e^{-Q} = -e^{-Q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \operatorname{ad}_Q^n Q'.$$

После замены $Q \to -Q$ получаем

$$\frac{d}{dt}e^{Q} = e^{Q} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} \operatorname{ad}_Q^n Q'.$$

Следовательно, из определения гиперболических функций (1) вытекает

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}' Q = \frac{1}{2}\Big\{ e^{Q} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} \operatorname{ad}_Q^n Q' - e^{-Q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \operatorname{ad}_Q^n Q' \Big\} = \\ = \operatorname{sh} Q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \operatorname{ad}_Q^{2k} Q' - \operatorname{ch} Q \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} \operatorname{ad}_Q^{2l-1} Q' \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{sh} QU - \operatorname{ch} QV\end{aligned}$$

и

$$\operatorname{sh}' Q = \frac{1}{2}\Big\{ e^{Q} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} \operatorname{ad}_Q^n Q' + e^{-Q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \operatorname{ad}_Q^n Q' \Big\} = \operatorname{ch} QU - \operatorname{sh} QV,$$

что и указано в (5) и (6).

Формула (7) доказывается непосредственным дифференцированием первого из равенств (2):

$$\begin{aligned}\operatorname{th}' Q = (\operatorname{sh} Q \operatorname{ch}^{-1} Q)' = \operatorname{sh}' Q \operatorname{ch}^{-1} Q - \operatorname{sh} Q \operatorname{ch}^{-1} Q \operatorname{ch}' Q \operatorname{ch}^{-1} Q = \\ = (\operatorname{ch} QU - \operatorname{sh} QV) \operatorname{ch}^{-1} Q - \operatorname{sh} Q \operatorname{ch}^{-1} Q (\operatorname{sh} QU - \operatorname{ch} QV) \operatorname{ch}^{-1} Q \equiv \operatorname{ch} QU \operatorname{ch}^{-1} Q - \\ - \operatorname{sh} Q \operatorname{ch}^{-1} Q (\operatorname{sh} QU - \operatorname{ch} QV) \operatorname{ch}^{-1} Q \equiv \operatorname{ch}^{-1} Q (\operatorname{ch}^2 Q - \operatorname{ch} Q \operatorname{sh} Q \operatorname{ch}^{-1} Q \operatorname{sh} Q) U \operatorname{ch}^{-1} Q.\end{aligned}$$

В силу предложения 1 вычитаемое в скобках равно $\operatorname{sh}^2 Q$. Следовательно, согласно предложению 2 эта разность равна единице $\mathcal{A}$, что и дает правую часть формулы (7).

Производная же $\operatorname{cth} Q$ легко получается либо аналогичным дифференцированием второй функции (2), либо из тождества $\operatorname{cth} Q \equiv (\operatorname{th} Q)^{-1}$, из которого следует

$$\operatorname{cth}' Q = -\operatorname{th}^{-1} Q \operatorname{th}' Q \operatorname{th}^{-1} Q = -\operatorname{ch} Q \operatorname{sh}^{-1} Q \operatorname{ch}^{-1} QU \operatorname{ch}^{-1} Q \operatorname{ch} Q \operatorname{sh}^{-1} Q \equiv -\operatorname{sh}^{-1} QU \operatorname{sh}^{-1} Q.$$

Чтобы связать формулы дифференцирования гиперболических функций с алгебраической структурой $\mathcal{A}$, рассмотрим над ней N-мерную алгебру Ли L_N с умножением, задаваемым коммутатором элементов $\mathcal{A}$. Пусть E_α — ее базисные элементы, а $C^\gamma_{\alpha\beta}$ – структурные константы: $[E_\alpha, E_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} E_\gamma$, где $E_\alpha \in L_N$, $C^\gamma_{\alpha\beta} \in R$, $\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, N}$, а по повторяющимся верхним и нижним индексам, как обычно, производится тензорное суммирование. В этом случае коммутационные ряды (9), определяющие производные гиперболических функций (5)–(8), могут быть выражены через матричные степенные ряды, пользоваться которыми значительно проще. Устанавливает правила дифференцирования функций (1), (2) над L_N

Теорема 2. *Если аргументом гиперболических функций* (1), (2) *является* $Q = q^\alpha(t)E_\alpha$, *где* E_α *— постоянные элементы базиса* L_N *над* $\mathcal{A}$, *а* $q^\alpha(t)$ *— непрерывно дифференцируемые функции над* R, *то их производные имеют вид* (5)–(8), *где*

$$U = (q^\alpha)' I_\alpha^\beta E_\beta : I \equiv (I_\alpha^\beta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\mathcal{D}^{2n}, \quad \mathcal{D} \equiv (\mathcal{D}_\alpha^\beta) \equiv (q^\gamma C_{\gamma\alpha}^\beta), \tag{10}$$

$$V = (q^\alpha)' J_\alpha^\beta E_\beta : J \equiv (J_\alpha^\beta) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\mathcal{D}^{2n-1}, \tag{11}$$

причем матричные ряды сходятся по норме над множеством $N \times N$*-матриц* M_N *для любых* q^α, *для которых* $\|\mathcal{D}\| < \infty$.

Доказательство. Подставим Q указанного вида в первую из формул (9), тогда

$$U = (q^\alpha)'E_\alpha + \frac{1}{3!}[q^\alpha E_\alpha, [q^\beta E_\beta, (q^\gamma)'E_\gamma]] + \dots = (q^\alpha)'E_\alpha + \frac{1}{3!} q^\alpha q^\beta (q^\gamma)' C_{\alpha\delta}^\varepsilon C_{\beta\gamma}^\delta E_\varepsilon + \dots =$$
$$= (q^\alpha)'E_\alpha + \frac{1}{3!}(q^\gamma)'(q^\alpha C_{\alpha\delta}^\varepsilon)(q^\beta C_{\beta\delta}^\delta)E_\varepsilon + \dots = (q^\alpha)'\{\delta_\alpha^\beta + \tfrac{1}{3!}\mathcal{D}_\alpha^\gamma \mathcal{D}_\gamma^\beta + \dots\}E_\beta \equiv (q^\alpha)' I_\alpha^\beta E_\beta,$$

где δ_α^β — дельта Кронекера, т. е. тензорная форма матричной единицы $E \equiv (\delta_\alpha^\beta) \in M_N$. Аналогично получается V в виде (11).

Сходимость матричных рядов, определяющих I_α^β и J_α^β, следует из того, что каждый из них состоит из половины числа членов экспоненциального ряда, во-первых, и каждое слагаемое уменьшено в $n+1$ раз, во-вторых. Матричная же экспонента сходится для любого ограниченного по норме аргумента.

Замечание. Очевидно, если L_N является коммутативной алгеброй, то теоремы 1 и 2 вырождаются в известные правила дифференцирования гиперболических функций, т. к. в этом случае $U = Q'$, а $V = 0$. Если же L_N является нильпотентной алгеброй индекса r, то матрица $\mathcal{D} = (q^\alpha C_{\alpha\beta}^\gamma)$, задающая Q в присоединенном матричном представлении L_N, будет нильпотентной ([5], с. 46). При этом $\mathcal{D}^r = 0$, что обращает ряды I и J в полиномы порядков $< r$.

4. Нелинейные ОДУ.1, решениями которых являются гиперболические функции, могут быть получены путем замены в формулах (5)–(8) U и V на некоторые параметризующие эти уравнения элементы A и B алгебры $\mathcal{A}$. При этом необходимо использовать связи между гиперболическими функциями, установленные соотношениями (3), (4). Так как все они квадратичные, то на алгебру $\mathcal{A}$ накладывается дополнительное условие существования в ней некоторого элемента $\sqrt{A}$, являющегося решением уравнения $X^2 = A$, во-первых, и обладающего свойством $\sqrt{A}\sqrt{B} = \sqrt{AB}$, во-вторых. Тогда явное выражение одних гиперболических функций через другие задается известными из скалярной теории соотношениями.

Делая указанные замены в формулах (5)–(8), получаем следующие виды нелинейных ОДУ.1 над $\mathcal{A}$:

$$X_1' = \sqrt{X_1^2 + E}\,A + X_1 B, \tag{12}$$

$$X_2' = \sqrt{X_2^2 - E}\,A + X_2 B_2, \tag{13}$$

$$X_3' = \sqrt{E - X_3^2}\,A\sqrt{E - X_3^2}, \tag{14}$$

$$X_4' = -\sqrt{X_4^2 - E}\,A\sqrt{X_4^2 - E}, \tag{15}$$

где $(A, B, X_s) \subset \mathcal{A}$, $s = \overline{1,4}$.

Так как U и V в (5), (6) — взаимосвязанные элементы $\mathcal{A}$, то уравнения (12) и (13) содержат лишь один независимый параметр. При этом явного выражения ни одной из этих величин через другую найти невозможно. Однако A и B могут задаваться в параметрической форме с помощью

Q, т. е. с помощью равенств (9), где U и V заменены на A и B соответственно. Это позволяет сформулировать следующие утверждения.

Предложение 4. *Если в уравнениях* (12) *и* (13)

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \operatorname{ad}_Q^{2n} Q', \tag{16}$$

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \operatorname{ad}_Q^{2n-1} Q', \tag{17}$$

где Q — непрерывно дифференцируемый элемент $\mathcal{A}$, то $X_1 = \operatorname{sh} Q$ и $X_2 = \operatorname{ch} Q$ являются решениями уравнений (12) *и* (13) *соответственно.*

Предложение 5. *Если в уравнениях* (14) *и* (15) *параметр A имеет вид* (16)*, то $X_3 = \operatorname{th} Q$ и $X_4 = \operatorname{cth} Q$ являются решениями уравнений* (13) *и* (14) *соответственно.*

Так как практически задавать параметры A и B уравнений (12)–(15) в видах (16), (17) очень сложно, то для более эффективного использования предложений 4, 5 необходимо параметры уравнений задавать в базисе L_N. Тогда, определяя $Q = q^\alpha(t)E_\alpha$, можно связать между собой проекции A, B и Q на базисные элементы L_N.

Пусть в равенствах (16) и (17) $A = a^\alpha(t)E_\alpha$, $B = b^\alpha(t)E_\alpha$, $Q = q^\alpha(t)E_\alpha$. Тогда, учитывая соотношения (10) и (11), можно приравнять коэффициенты при одинаковых базисных элементах в левых и правых частях этих равенств. Это дает

$$(q^\alpha)' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (\mathcal{D}_\alpha^\beta)^{2n} = a^\beta, \tag{18}$$

$$(q^\alpha)' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (\mathcal{D}_\alpha^\beta)^{2n-1} = b^\beta. \tag{19}$$

В точках невырожденности матрицы $I = (I_\alpha^\beta)$ система (18) может быть приведена к нормальной форме $(q^\alpha)' = (I^{-1})_\beta^\alpha a^\beta$, после чего q^α могут использоваться для определения b^β согласно формуле (19). Это и позволяет определить B через A при задании уравнений (12) и (13).

Вопрос о нормализуемости системы (18) не тривиален. Существуют как глобально, так и локально нормализуемые системы. К глобально нормализуемым относится случай системы (18), заданной для абелевой L_N, когда $(C_{\alpha\beta}^\gamma = 0) \Rightarrow (I_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta) \Rightarrow (I^{-1} = I = E)$. Более существенный случай определяет

Предложение 6. *Для нильпотентной L_N система* (18) *всегда может быть приведена к нормальной форме.*

Доказательство. Выше отмечалось, что для нильпотентной алгебры Ли матрица $\mathcal{D}$ является нильпотентной. Это означает, что в M_N всегда существует невырожденная матрица S, которая приводит $\mathcal{D}$, а, значит, и $I-E$, к нильтреугольному виду. Следовательно, $\det I = \det(SIS^{-1}) = 1$, что и обеспечивает разрешимость системы (18) относительно $(q^\alpha)'$ для любых q^α.

Так как абелева и нильпотентная алгебры относятся к классу разрешимых L_N, то целесообразно обратиться к неразрешимым алгебрам. Как следует из критерия Ли–Энгеля ([6], с. 223) неразрешимости групп, неразрешимая алгебра должна содержать простую L_3. Но над $\mathcal{A}$ существуют две неизоморфные простые трехмерные алгебры $L_3(\mathrm{VIII})$ и $L_3(\mathrm{IX})$ по классификации Л. Бианки ([7], с. 83).

Предложение 7. *Для простой трехмерной алгебры $L_3(\mathrm{VIII})$, обладающей структурой базисных элементов*

$$[E_1, E_2] = E_1, \quad [E_2, E_3] = E_3, \quad [E_1, E_3] = 2E_2, \tag{20}$$

систему (18) *можно привести к нормальному виду, если*

1) $(q^2)^2 \geq 4q^1q^3$,

2) $0 > (q^2)^2 - 4q^1q^3 \neq -\pi^2n^2$, *где* n *— целое число, не равное нулю.*

Доказательство. Ненулевыми существенными структурными константами $L_3(\mathrm{VIII})$ согласно (20) являются $C_{12}^1 = C_{23}^3 = \frac{1}{2}C_{13}^2 = 1$. Следовательно,

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} -q^2 & -2q^3 & 0 \\ q^1 & 0 & -q^3 \\ 0 & 2q^1 & q^2 \end{pmatrix}.$$

Непосредственным перемножением легко убедиться в том, что $\mathcal{D}^2 = rE + T_1$, где $r = (q^2)^2 - 4q^1q^3$, а

$$T_1 = \begin{pmatrix} 2q^1q^3 & 2q^2q^3 & 2(q^3)^2 \\ -q^1q^2 & -(q^2)^2 & -q^2q^3 \\ 2(q^1)^2 & 2q^1q^2 & 2q^1q^3 \end{pmatrix}.$$

При этом $T_1^2 = -rT_1$. Таким образом, для $n \geq 1$ $\mathcal{D}^{2n} = r^{n-1}(rE + T_1)$, что позволяет записать матрицу

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{(2n+1)!}\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{(2n+1)!}T_1. \tag{21}$$

Рассмотрим 3 случая.

1) Если $r = 0$, т. е. $(q^2)^2 = 4q^1q^3$, то соответствующая этому случаю матрица I записывается как $I_1 = E + \frac{1}{6}T_1$. Для нее $\det I_1 = 1$, значит, $\exists I_1^{-1}\ \forall t$.

2) Если $r > 0$, т. е. $(q^2)^2 > 4q^1q^3$, то r можно представить в виде $r = \varphi^2$. Тогда соответствующая матрица I из (21) $I_2 = \frac{\operatorname{sh}\varphi}{\varphi}\varepsilon + \frac{\operatorname{sh}\varphi - \varphi}{\varphi^3}T_1$. Для нее $\det I_2 = \frac{\operatorname{sh}^2\varphi}{\varphi^2} \neq 0$, что говорит об обратимости I_2 $\forall t$.

3) Если $r < 0$, т. е. $(q^2)^2 < 4q^1q^3$, то r можно представить как $r = -\varphi^2$, что позволяет записать третий вариант матрицы I: $I_3 = \frac{\sin\varphi}{\varphi}E - \frac{\sin\varphi - \varphi}{\varphi^3}T_1$. Для нее $\det I_3 = \frac{\sin^2\varphi}{\varphi^2}$. Следовательно, $(\det I_3 \neq 0) \Rightarrow (\varphi \neq \pi n)$, что и указано в предложении 7.

Вопрос о нормализуемости системы (18) для алгебры $L_3(\mathrm{IX})$ решает

Предложение 8. *Для простой компактной трехмерной алгебры Ли* $L_3(\mathrm{IX})$, *обладающей структурой базисных элементов*

$$[E_\alpha, E_\beta] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}E_\gamma, \quad \alpha,\beta,\gamma = \overline{1,3}, \tag{22}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ *— полностью кососимметрический единичный тензор, система* (18) *приводится к нормальной форме, если* $\sum\limits_{\alpha=1}^{3}(q^\alpha)^2 \neq \pi^2n^2$ *для любого целого* $n \neq 0$.

Доказательство. Матрица $\mathcal{D}$ для $L_3(\mathrm{IX})$ со структурой (22) имеет вид

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & q^3 & -q^2 \\ -q^3 & 0 & q^1 \\ q^2 & -q^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нее $\mathcal{D}^2 = -r^2\varepsilon + T_2$, где $r^2 = \sum\limits_{\alpha=1}^{3}(q^\alpha)^2$, а

$$T_2 = \begin{pmatrix} (q^1)^2 & q^1q^2 & q^1q^3 \\ q^1q^2 & (q^2)^2 & q^2q^3 \\ q^1q^3 & q^2q^3 & (q^3)^2 \end{pmatrix}.$$

Так как $T_2^2 = r^2 T_2$, то $\mathcal{D}^{2n} = (-1)^n r^{2(n-1)}(r^2 E - T_2) \quad \forall n \geq 1$, т. е.

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{2n}}{(2n+1)!} E - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{2(n-1)}}{(2n+1)!} T_2.$$

Очевидно, $(r^2 = 0) \Leftrightarrow (q^\alpha = 0)$, что ведет к вырождению всех уравнений (12)–(15) в тривиальные тождества $0 \equiv 0$. Полагая $r \neq 0$, матрицу I представим в виде

$$I = \frac{\sin r}{r} \varepsilon + \frac{r - \sin r}{r^3} T_2. \tag{23}$$

Определитель этой матрицы $\det I = \frac{\sin^2 r}{r^2} \neq 0$, если $r \neq \pi n$, что и указано в предложении 8.

Из предложений 6–8 следует, что для алгебр различных структур существуют области значений переменной t, где система (18) может быть приведена к нормальному виду. Вслед за вопросом о нормализуемости ее встает вопрос о разрешимости в квадратурах. Ответ на него дают следующие утверждения.

Предложение 9. *В области существования и нормализуемости системы* (18) *ее можно проинтегрировать в квадратурах, если алгебра Ли L_N разрешима.*

Доказательство. Разрешимая L_N образуется ([5], с. 64) треугольным расширением абелевой алгебры. Следовательно, матрица $\mathcal{D}$ преобразованием подобия может быть приведена к блочно-треугольному виду. Один из ее диагональных блоков соответствует коммутативной подалгебре, а второй — ее треугольному расширению. Так как блочно-треугольные матрицы образуют подалгебру M_N, то нормализованная система (18) распадается на три подсистемы. Согласно правилам сложения и умножения блочных матриц, в каждой из подсистем образуются нелинейности функциями q^α с индексами либо большими, либо меньшими (в зависимости от вида треугольности) номера каждого из уравнений. Это дает возможность последовательно решать подсистемы, а, следовательно,и всю систему (18).

Для неразрешимых L_N ситуация значительно сложнее. Об этом говорит

Предложение 10. *Система* (18) *не интегрируется в квадратурах с произволом в N функций a^α, если L_N неразрешима.*

Доказательство этого утверждения сводится к изучению двух простых L_3, одна из которых, согласно упоминавшейся теореме Ли–Энгеля, должна содержаться в неразрешимой алгебре.

В случае $L_3(\mathrm{VIII})$ нормализуемость системы (18) определяется тремя типами соотношений q^α: 1) $(q^2)^2 - 4q^1q^3 = 0$, 2) $(q^2)^2 - 4q^1q^3 > 0$, 3) $0 > (q^2)^2 - 4q^1q^3 \neq -\pi^2 n^2$. Каждому из этих случаев соответствует один из трех видов матрицы I, $I_m = f_{1m}E + f_{2m}T_1$, где $m = \overline{1,3}$, $f_{11} = 1$, $f_{21} = \frac{1}{6}$, $f_{12} = \frac{\operatorname{sh}\varphi}{\varphi}$, $f_{22} = \frac{\operatorname{sh}\varphi - \varphi}{\varphi^3}$, $f_{13} = \frac{\sin\varphi}{\varphi}$, $f_{23} = \frac{\varphi - \sin\varphi}{\varphi^3}$. Таким образом, в области нормализуемости системы (18) $\det I_m = f_{1m}^2$, т. е.

$$I_m^{-1} = \frac{1}{f_{1m}} E + \frac{f_{2m}}{f_{1m}} \begin{pmatrix} 2q^1q^3 & -2q^2q^3 & -2(q^3)^2 \\ q^1q^2 & (q^2)^2 & q^2q^3 \\ -2(q^1)^2 & -2q^1q^2 & 2q^1q^3 \end{pmatrix},$$

а сама она принимает три вида:

$$\begin{aligned}
(q^1)' &= f_{1m}^{-1}[a^1(1 + 2f_{2m}q^1q^3) + a^2 f_{2m}q^1q^2 - 2a^3 f_{2m}(q^1)^2], \\
(q^2)' &= f_{1m}^{-1}[-2a^1 f_{2m}q^2q^3 + a^2(1 + f_{2m}(q^2)^2) - 2a^3 f_{2m}q^1q^2], \\
(q^3)' &= f_{1m}^{-1}[-2a^1 f_{2m}(q^3)^2 + a^2 f_{2m}q^2q^3 + a^3(1 + 2f_{2m}q^1q^3)].
\end{aligned}$$

Так как функции a^α произвольны, то каждое из q^α является решением общего уравнения Риккати, которое, как известно, не интегрируется в квадратурах.

Обратимся ко второй простой L_3, для которой I задается равенством (23). В области нормализуемости системы (18) $\sum\limits_{\alpha=1}^{3}(q^\alpha)^2 \neq \pi^2 n^2$. При этом, если ввести обозначения $\varphi_1 = \frac{\sin r}{r}$, $\varphi_2 = \frac{r - \sin r}{r^3}$, то I^{-1} можно записать как $I^{-1} = \frac{1}{\varphi_1}E - \frac{\varphi_2}{\varphi_1}T_2$. Следовательно, нормальная форма системы (18) для $L_3(\mathrm{IX})$ записывается как

$$(q^\alpha)' = a^\alpha(1 - \varphi_2(q^\alpha)^2) - \varphi_2(a^{\overline{\alpha}_1}q^{\overline{\alpha}_1} + a^{\overline{\alpha}_2}q^{\overline{\alpha}_2})q^\alpha, \quad \alpha \neq \overline{\alpha}_{1,2} = \overline{1,3}.$$

Так как в каждом уравнении этой системы коэффициенты при всех степенях q^α задаются с помощью трех произвольных функций a^α, то все они являются общими уравнениями Риккати.

Таким образом, в случае обеих простых L_3 для интегрирования в квадратурах системы (18) необходимо накладывать на a^α дополнительные условия. Примеры их можно найти в [8].

Последние утверждения суммирует

Теорема 3. *Если в уравнениях* (12) *и* (13) $A = a^\alpha(t)E_\alpha$ *и* $B = b^\alpha(t)E_\alpha$, *где* (E_α) — *базис некоторой алгебры Ли над* $\mathcal{A}$ *со структурными константами* $C^\gamma_{\alpha\beta}$, $b^\beta = (q^\alpha)' \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(q^\gamma C^\beta_{\gamma\alpha})^{2n-1}$, *а* q^α *находятся из системы* (18), *то решением первого из них является* $X_1 = \mathrm{sh}(q^\alpha E_\alpha)$, *а второго —* $X_2 = \mathrm{ch}(q^\alpha E_\alpha)$. *При этом, если* L_N *разрешима, то* q^α *всегда находятся в квадратурах в области существования и нормализуемости системы* (18), *а при неразрешимости алгебры — лишь для частных видов* a^α.

Теорема 4. *Если в уравнениях* (14) *и* (15) $A = a^\alpha(t)E_\alpha \in L_N \subset \mathcal{A}$, *то их решениями соответственно являются* $X_3 = \mathrm{th}(q^\alpha E_\alpha)$ *и* $X_4 = \mathrm{cth}(q^\alpha E_\alpha)$, *где* q^α *находятся из системы* (18). *При этом, если* L_N — *разрешимая алгебра Ли, то* q^α *всегда находятся в квадратурах в области существования и нормализуемости системы* (18), *а при неразрешимости* L_N — *лишь для частных видов* a^α.

Чтобы расширить диапазон применения приведенных теорем и упростить процедуру их использования, полезно сформулировать

Предложение 11. *Уравнения* (12)–(15) *инвариантны относительно одновременного преобразования подобия* X_i, A *и* B *постоянным обратимым элементом* $S \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (12). Обозначим $SRS^{-1} = \widetilde{R} : \forall R \in \mathcal{A}$. Очевидно, указанное преобразование переводит это уравнение в уравнение $\widetilde{X}_1' = S\sqrt{S^{-1}(\widetilde{X}_1^2 + E)S}S^{-1}\widetilde{A} + \widetilde{X}_1\widetilde{B}$. Так как $(S\sqrt{S^{-1}(\widetilde{X}_1^2 + E)S}\,S^{-1})^2 = \widetilde{X}_1^2 + E$, то $S\sqrt{S^{-1}(\widetilde{X}_1^2 + E)S}\,S^{-1} = \sqrt{\widetilde{X}_1^2 + E}$. Следовательно, первое из четырех рассматриваемых уравнений не меняет своего вида при преобразовании подобия всех входящих в него элементов $\mathcal{A}$. Аналогично доказывается инвариантность уравнений (13)–(15).

5. Уравнения (12)–(15) над M_2 характеризуются конкретными структурами L_N, имеющими представления в множестве 2×2-матриц.

Простейшим, очевидно, является случай одномерной алгебры, базисным элементом которой может служить любая постоянная матрица E_1. Эта L_1 является абелевой и любой ее элемент представим в виде $A = aE_1$, где $a = a(t)$. Из определения элемента B следует, что эта матрица равна нулю. Таким образом, для данного случая справедливо

Предложение 12. *Если в уравнениях* (12)–(15) $A = aE_1$, *где* $a = a(t)$ — *непрерывная* *функция, то они и их решения принимают соответственно следующий вид*:

$$\begin{aligned}
X_1' &= a\sqrt{X_1^2+E}\,E_1, & X_1 &= \operatorname{sh}\Big(\int a\,dt\,E_1\Big),\\
X_2' &= a\sqrt{X_2^2-E}\,E_1, & X_2 &= \operatorname{ch}\Big(\int a\,dt\,E_1\Big),\\
X_3' &= a\sqrt{E-X_3^2}\,E_1\sqrt{E-X_3^2}, & X_3 &= \operatorname{th}\Big(\int a\,dt\,E_1\Big),\\
X_4' &= a\sqrt{X_4^2-E}\,E_1\sqrt{X_4^2-E}, & X_4 &= \operatorname{cth}\Big(\int a\,dt\,E_1\Big).
\end{aligned}$$

Доказательство сводится к подстановке в (12) и (13) $B=0$ и интегрированию тривиального уравнения $(q^1)'=a$, в которое вырождается система (18) при $N=1$ и $C^\gamma_{\alpha\beta}=0$.

Разумеется, предложение 12 справедливо для уравнений (12)–(15) с заданным видом параметра $\mathcal{A}$ над любой алгеброй $\mathcal{A}$.

Естественным обобщением L_1 является абелева L_2, для которой уравнения (12)–(15) и их решения также имеют простой вид. Так как представление этой алгебры в M_2 имеет некоторый практический интерес, то сформулируем

Предложение 13. *Если в уравнениях* (12)–(15) $A=a^\alpha E_\alpha$ $(\alpha=1,2)$, *где* $a^\alpha=a^\alpha(t)$ — *непрерывные функции, а матрицами* E_α *являются* $E_{\alpha m}$ $(m=\overline{1,3})$:

$$\begin{aligned}
E_{11} &= \begin{pmatrix} s_1 & s_2\\ \frac{r_3}{r_2}s_2 & s_1+\frac{s_2}{r_2}(r_4-r_1)\end{pmatrix}, & E_{21} &= \begin{pmatrix} r_1 & r_2\\ r_3 & r_4\end{pmatrix} \quad (r_2\neq 0),\\
E_{12} &= \begin{pmatrix} s_1 & 0\\ s_2 & s_1+\frac{s_2}{r_2}(r_3-r_1)\end{pmatrix}, & E_{22} &= \begin{pmatrix} r_1 & 0\\ r_2 & r_3\end{pmatrix},\\
E_{13} &= \begin{pmatrix} s_1 & 0\\ 0 & s_2\end{pmatrix}, & E_{23} &= \begin{pmatrix} r_1 & 0\\ 0 & r_2\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

то эти уравнения и их решения могут быть записаны как

$$\begin{aligned}
X_{1m}' &= \sqrt{X_{1m}^2+E}(a^\alpha E_{\alpha m}), & X_{1m} &= \operatorname{sh}\Big(\int a^\alpha\,dt\,E_\alpha\Big),\\
X_{2m}' &= \sqrt{X_{2m}^2-E}(a^\alpha E_{\alpha m}), & X_{2m} &= \operatorname{ch}\Big(\int a^\alpha\,dt\,E_\alpha\Big),\\
X_{3m}' &= \sqrt{E-X_{3m}^2}(a^\alpha E_{\alpha m})\sqrt{E-X_{3m}^2}, & X_{3m} &= \operatorname{th}\Big(\int a^\alpha\,dt\,E_{\alpha m}\Big),\\
X_{4m}' &= \sqrt{X_{4m}^2-E}(a^\alpha E_{\alpha m})\sqrt{X_{4m}^2-E}, & X_{4m} &= \operatorname{cth}\Big(\int a^\alpha\,dt\,E_{\alpha m}\Big).
\end{aligned}$$

Доказательство. Записанные пары матриц являются тремя вариантами решения алгебраического уравнения $[S',R]=0$ над M_2 [9]. Следовательно, $E_{\alpha m}$ образуют базис различных представлений в M_2 абелевой L_2. Для нее, во-первых, $B=0$, а во-вторых, $(q^\alpha)'=a^\alpha$, что и дает указанную конкретизацию уравнений (12)–(15) и их решений.

Рассмотрим неабелевы разрешимые L_N. В [9] приведен наиболее общий вид квадратной двумерной матрицы, линейной по базису разрешимой $L_3=L_2(\mathrm{II})\oplus L_1$:

$$A=\begin{pmatrix} f^1 & f^2\\ f^3 & f^1+kf^2-\frac{1}{k}f^2\end{pmatrix}, \quad k'=0\neq k, \quad f^\alpha=f^\alpha(t). \tag{24}$$

Так как другие трехмерные разрешимые алгебры в M_2 не реализуются, то матрица (24) представляет наиболее общий вид элемента M_2, принадлежащего разрешимой алгебре Ли. Так что наиболее общий вид уравнений (12)–(15), интегрируемых в квадратурах, определяется именно этим видом матричного параметра.

Уравнения (12), (13) и (14), (15) сходны между собой. Поэтому из четырех уравнений целесообразно рассмотреть лишь два существенно различных, (12) и (14), предварительно преобразовав их в соответствии с предложением 11.

Очевидно, $A = f^\alpha E_\alpha$, где $E_1 = E$, $E_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)$, $E_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k^{-1} \end{smallmatrix}\right)$. Структура L_3 с базисом (E_α) определяется коммутационными соотношениями $[E_1, E_r] = 0$ $(r = 2, 3)$, $[E_2, E_3] = E_1 - \frac{1}{k}E_2 + kE_3$. Упростить вид матриц A и E_α, а также структуру L_3 можно с помощью преобразования подобия изучаемых уравнений. Матрица (24) триангулируется преобразованием $SAS^{-1} = \widetilde{A} = a^\alpha \widetilde{E}_\alpha \in \widetilde{M}_2 \subset M_2$, где

$$S = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a^1 & 0 \\ a^2 & a^3 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$a^1 = f^1 - \frac{1}{k}f^3$, $a^2 = -f^2$, $a^3 = f^1 + kf^2$, $\widetilde{M}_2$ — множество нижнетреугольных матриц. При этом структура $\widetilde{L}_3$ $((\widetilde{E}_\alpha) \subset \widetilde{L}_3)$ задается следующими коммутаторами базисных элементов: $[\widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2] = -\widetilde{E}_2$, $[\widetilde{E}_1, \widetilde{E}_3] = 0$, $[\widetilde{E}_2, \widetilde{E}_3] = -\widetilde{E}_2$. Поэтому существенными структурными константами $\widetilde{L}_3$ являются $C^2_{12} = C^2_{23} = -1$. При этом $\widetilde{M}_2$ образует подалгебру M_2. Следовательно, решения уравнений (12) и (14) принадлежат $\widetilde{M}_2$, что заметно упрощает их интегрирование.

Таким образом, воспользуемся предложением 11 для приведения изучаемых уравнений к виду

$$\widetilde{X}_1' = \sqrt{\widetilde{X}_1^2 + E}\,\widetilde{A} + \widetilde{X}_1 \widetilde{B}, \tag{26}$$

$$\widetilde{X}_3' = \sqrt{E - \widetilde{X}_3^2}\,\widetilde{A}\sqrt{E - \widetilde{X}_3^2}, \tag{27}$$

где матрица $\widetilde{B}$ подлежит доопределению в соответствии с видом $\widetilde{A}$. Найдем ее. Для этого зададим $\widetilde{B}$ как элемент $\widetilde{M}_2$: $\widetilde{B} = b^\alpha \widetilde{E}_\alpha$, где $b^\alpha = b^\alpha(t)$ определяются по формуле (19), в которой q^α находятся из (18), $\alpha = \overline{1, 3}$, а $C^\gamma_{\alpha\beta}$ заданы выше коммутационными соотношениями матриц $\widetilde{E}_\alpha$. Матрица $\mathcal{D}$ для данной структуры $\widetilde{L}_3$ имеет вид элемента

$$\mathcal{D} = (\mathcal{D}^\beta_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & q^2 & 0 \\ 0 & q^3 - q^1 & 0 \\ 0 & -q^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться непосредственным перемножением в том, что $\mathcal{D}^k = \mu^{k-1}\mathcal{D}$, $\mu = q^3 - q^1$. Таким образом, если $q^3 \neq q^1$ (в противном случае $\widetilde{L}_3$ вырождается в абелеву L_2), то согласно (10)

$$I = E + \varphi\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & \varphi q^2 & 0 \\ 0 & 1 + \varphi\mu & 0 \\ 0 & -\varphi q^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \psi\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \psi q^2 & 0 \\ 0 & \psi\mu & 0 \\ 0 & -\psi q^2 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\varphi = (\operatorname{sh}\mu - \mu)\mu^{-2}$, $\psi = (\operatorname{ch}\mu - 1)\mu^{-2}$. Следовательно, равенство $(q^\alpha)' I^\beta_\alpha \widetilde{E}_\beta = a^\alpha \widetilde{E}_\alpha$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} (q^1)' = a^1, \\ (q^1)'\varphi q^2 + (q^2)'(1 + \varphi(q^3 - q^1)) - (q^3)'\varphi q^2 = a^2, \\ (q^3)' = a^3, \end{cases}$$

из которой вытекает

$$q^1 = \int a^1 dt, \quad q^2 = \mu \operatorname{cth}\frac{\mu}{2} \int \frac{a^2 dt}{1 + \operatorname{ch}\mu}, \quad q^3 = \int a^3 dt, \quad \mu = \int (a^3 - a^1) dt. \tag{28}$$

Полученные значения q^α позволяют определить матрицу

$$\widetilde{B} = (q^\alpha)' J^\beta_\alpha \widetilde{E}_\beta = (q^\alpha)' J^2_\alpha \widetilde{E}_2 = ((q^1)'\psi q^2 + (q^2)'\psi\mu - (q^3)'\psi q^2)E_2,$$

т. е.

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \frac{\operatorname{ch}\mu - 1}{\mu \operatorname{sh}\mu}(\mu a^2 - (a^3 - a^1)q^2), \tag{29}$$

где q^α заданы соотношениями (28).

Так как $\widetilde{B} = SBS^{-1}$, то, используя матрицу S из (25), найдем второй параметр в уравнении (12), $B = S^{-1}\widetilde{B}S$:

$$B = b\begin{pmatrix} k & -1 \\ k^2 & -k \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Таким образом, объединяет, конкретизирует и иллюстрирует некоторые предшествующие результаты

Теорема 5. *Если в уравнениях* (12) *и* (14) *над* M_2 *параметры* A *и* B *имеют вид* (24) *и* (30), *где* f^α *— непрерывно дифференцируемые функции,* $k \neq 0 = k'$, *то решением первого из них является* $X_1 = S^{-1}\operatorname{sh}(q^\alpha E_\alpha)S$, *т. е. для* $q^1 \neq q^3$

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{kq^2}{q^3-q^1}(\operatorname{sh} q^3 - \operatorname{sh} q^1) + \operatorname{sh} q^3 & \frac{q^2}{q^3-q^1}(\operatorname{sh} q^1 - \operatorname{sh} q^3) \\ k(\frac{kq^2}{q^3-q^1} + 1)(\operatorname{sh} q^3 - \operatorname{sh} q^1) & \frac{kq^2}{q^3-q^1}(\operatorname{sh} q^1 - \operatorname{sh} q^3) \end{pmatrix}, \tag{31}$$

а решением второго — $X_3 = S^{-1}\operatorname{th}(q^\alpha \widetilde{E}_\alpha)S$, *т. е. при* $q^1 \neq q^3$

$$X_3 = \begin{pmatrix} \frac{kq^2}{q^3-q^1}(\operatorname{th} q^3 - \operatorname{th} q^1) + \operatorname{th} q^3 & \frac{q^2}{q^3-q^1}(\operatorname{th} q^1 - \operatorname{th} q^3) \\ k(\frac{kq^2}{q^3-q^1} + 1)(\operatorname{th} q^3 - \operatorname{th} q^1) & \frac{kq^2}{q^3-q^1}(\operatorname{th} q^1 - \operatorname{th} q^3) \end{pmatrix}, \tag{32}$$

где q^α *связаны с* a^α *соотношениями* (28).

Доказательство. Так как матрицы A и B преобразованием подобия приводятся к видам $\widetilde{A} = SAS^{-1} = a^\alpha \widetilde{E}_\alpha$ и $\widetilde{B} = SBS^{-1} = b\widetilde{E}_2$, где $\widetilde{A}$, $\widetilde{E}_\alpha$, a^α и S даны в (25), а $\widetilde{B}$ и b — в (29), то, пользуясь предложением 11, преобразуем уравнения (12) и (14) к (26) и (27) с треугольными параметрами $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$. Тогда согласно теоремам 3 и 4 $\widetilde{X}_1 = \operatorname{sh}\widetilde{Q}$ и $\widetilde{X}_3 = \operatorname{th}\widetilde{Q}$, где $\widetilde{Q} = q^\alpha \widetilde{E}_\alpha$, а q^α уже найдены выше из системы (18) и приведены в (28). Так как

$$\widetilde{Q}^k = \begin{pmatrix} (q^1)^k & 0 \\ q^2 \sum\limits_{i=0}^{k-1} (q^1)^i (q^3)^{k-i-1} & (q^3)^k \end{pmatrix},$$

то при $q^1 \neq q^3$

$$\widetilde{Q}^k = \begin{pmatrix} (q^1)^k & 0 \\ \frac{q^2}{q^1-q^3}((q^1)^k - (q^3)^k) & (q^3)^k \end{pmatrix},$$

что позволяет любую задаваемую в виде ряда функцию $F(\widetilde{Q})$ записывать в форме

$$F(\widetilde{Q}) = \begin{pmatrix} F(q^1) & 0 \\ \frac{q^2}{q^1-q^3}(F(q^1) - F(q^3)) & F(q^3) \end{pmatrix}. \tag{33}$$

При этом формула (33) справедлива и для обратных к $F(\widetilde{Q})$ функций (в точках, где $F(q^1)F(q^3)\neq 0$), и для произведений. Таким образом,

$$\operatorname{sh}\widetilde{Q}=\begin{pmatrix}\operatorname{sh}q^1 & 0\\ \frac{q^2}{q^1-q^3}(\operatorname{sh}q^1-\operatorname{sh}q^3) & \operatorname{sh}q^3\end{pmatrix},\quad \operatorname{ch}\widetilde{Q}=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}q^1 & 0\\ \frac{q^2}{q^1-q^3}(\operatorname{ch}q^1-\operatorname{ch}q^3) & \operatorname{ch}q^3\end{pmatrix},\tag{34}$$

$$\operatorname{ch}^{-1}\widetilde{Q}=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}^{-1}q^1 & 0\\ \frac{q^2}{q^1-q^3}(\operatorname{ch}^{-1}q^1-\operatorname{ch}^{-1}q^3) & \operatorname{ch}^{-1}q^3\end{pmatrix},\tag{35}$$

$$\operatorname{th}\widetilde{Q}=\begin{pmatrix}\operatorname{th}q^1 & 0\\ \frac{q^2}{q^1-q^3}(\operatorname{th}q^1-\operatorname{th}q^3) & \operatorname{th}q^3\end{pmatrix}.\tag{36}$$

Непосредственным вычислением легко убедиться в справедливости равенства $\operatorname{sh}^2\widetilde{Q}+E=\operatorname{ch}^2\widetilde{Q}$, что, во-первых, соответствует формуле (3), а, во-вторых, определяет радикал $\sqrt{\operatorname{sh}^2\widetilde{Q}+E}=\operatorname{ch}\widetilde{Q}$. Аналогично убеждаемся в том, что $\sqrt{E-\operatorname{th}^2\widetilde{Q}}=\operatorname{ch}^{-1}\widetilde{Q}$. Беря $\operatorname{ch}\widetilde{Q}$ и $\operatorname{ch}^{-1}\widetilde{Q}$ из (34) и (35), находим правые части уравнений (26) и (27):

$$\sqrt{\widetilde{X}_1^2+E}\,\widetilde{A}+\widetilde{X}_1\widetilde{B}_1=\operatorname{ch}\widetilde{Q}\widetilde{A}+\operatorname{sh}\widetilde{Q}\widetilde{B}=$$
$$=\begin{pmatrix}a^1\operatorname{ch}q^1 & 0\\ \frac{a^1q^2}{q^1-q^3}(\operatorname{ch}q^1-\operatorname{ch}q^3)+a^2\operatorname{ch}q^3+b\operatorname{sh}q^3 & a^3\operatorname{cth}q^3\end{pmatrix},$$
$$\sqrt{E-\widetilde{X}_3^2}\widetilde{A}\sqrt{E-\widetilde{X}_3^2}=\operatorname{ch}^{-1}\widetilde{Q}\widetilde{A}\operatorname{ch}^{-1}\widetilde{Q}=$$
$$=\begin{pmatrix}a^1\operatorname{ch}^{-2}q^1 & 0\\ \frac{q^2}{q^1-q^3}(\operatorname{ch}^{-1}q^1-\operatorname{ch}^{-1}q^3)(a^1\operatorname{ch}^{-1}q^1+a^3\operatorname{ch}^{-1}q^3)+a^2\operatorname{ch}^{-1}q^1\operatorname{ch}^{-1}q^3 & a^3\operatorname{ch}^{-2}q^3\end{pmatrix}.$$

Таким образом, если продифференцировать функции $\operatorname{sh}\widetilde{Q}$ из (34) и $\operatorname{th}\widetilde{Q}$ из (36), то, учитывая значения $(q^\alpha)'$, можно убедиться в том, что $\widetilde{X}_1=\operatorname{sh}\widetilde{Q}$ и $\widetilde{X}_3=\operatorname{th}\widetilde{Q}$ являются решениями уравнений (26) и (27). Следовательно, решения уравнений (12) и (14) имеют вид $X_1=S^{-1}\widetilde{X}_1S$ и $X_3=S^{-1}\widetilde{X}_3S$, что и записано в (31) и (32). $\square$

Литература

1. Крейн С.Г. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1972. – 554 с.
2. Арнольд В.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1971. – 240 с.
3. Wilcox R.M. *Exponential operators and parameter differentiation in quantum physics* // J. Math. Phys. – 1967. – V. 8. – № 4. – P. 962–982.
4. Magnus W. *On the exponential solution of differential equations for a linear operator* // Commun. on pure appl. math. – 1954. – V. VII. – P. 649–673.
5. Джекобсон Н. *Алгебры Ли.* – М.: Мир, 1964. – 355 с.
6. Эйзенхарт Л.П. *Непрерывные группы преобразований.* – М.: Ин. лит., 1947. – 359 с.
7. Петров А.З. *Пространства Эйнштейна.* – М.: ГИФМЛ, 1961. – 463 с.
8. Деревенский В.П. *Интегрируемость уравнения Риккати и линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 5. – С. 33–40.
9. Деревенский В.П. *Матричные линейные дифференциальные уравнения высших порядков* // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 4. – С. 711–714.

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Поступила 07.04.2004