Известия вузов. Математика
2016, № 3, с. 38–47

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

С.А. ЕПИСКОПОСЯН, Ю. МЮЛЛЕР

О ПОТОЧЕЧНОЙ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЕ УОЛША

Аннотация. Рассматриваются вопросы поточечной универсальности и топологической транзитивности частичных сумм рядов Фурье по обобщенной системе Уолша.

Ключевые слова: обобщенная система Уолша, поточечная универсальность, топологическая транзитивность.

УДК: 517.51

Введение

Идея универсальности является одним из фундаментальных объектов рассмотрения в одном из бурно развивающемся разделе математики — теории хаоса и динамических систем, которые в последние годы являются одним из самых плодотворных подходов к исследованию рынка. В этой теории универсальность тесно связана с понятием топологической транзитивности семейства отображений. Формулируются эти понятия следующим образом ([1], с. 23).

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — метрические пространства, а $\mathcal{T}_n : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $n \in \Lambda \subset \mathcal{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — непрерывные отображения.

Определение 1 (универсальный элемент)**.** Скажем, что элемент $x_0 \in \mathcal{X}$ универсален в $\mathcal{Y}$ относительно $\mathcal{T}_n$, если множество $\{\mathcal{T}_n x_0 : n \in \Lambda\}$ всюду плотно в $\mathcal{Y}$.

Определение 2 (топологическая транзитивность)**.** Скажем, что отображение $\mathcal{T}_n$ топологически транзитивно, если для любых непустых, открытых множеств $U \subset \mathcal{X}$ и $V \subset \mathcal{Y}$ существует некоторое число $n \geq 0$ такое, что $\mathcal{T}_n(U) \cap V \neq \varnothing$.

Первый тип универсальности был рассмотрен еще в 1914 г. М. Фекете [2].

Теорема (М. Фекете)**.** *Существует вещественный степенной ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in [-1, 1],$$

который не только расходится в каждой точке $x \neq 0$, но делает это наихудшим способом, а именно, для любой функции $g(x)$, непрерывной на $[-1, 1]$ с $g(0) = 0$, существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такая, что последовательность частичных сумм ряда $S_{n_k}(x)$ равномерно сходится к $g(x)$ при $k \to \infty$.

Поступила 30.07.2014

Работа выполнена при финансовой поддержке DAAD (German Academic Exchange Service), Grant № A/13/03763.

Далее по сути первый тип универсальной функции был рассмотрен в 1929 г. Дж. Биркхофом [3].

Теорема (Дж. Биркхоф). *Существует целая функция $f(z)$, которая универсальна относительно сдвигов, т. е. для любой целой функции $g(z)$ существует последовательность комплексных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $a_n \to \infty$ такая, что $f(z+a_n) \to g(z)$ локально на $\mathcal{C}$.*

В 1935 г. Ж. Марцинкевич [4] не только доказал существование, как он назвал "универсальной первообразной", но был первым, кто применил термин *универсальная* в этом контексте и показал, что множество универсальных элементов является остаточным в смысле Бэра.

Теорема (Ж. Марцинкевич). *Пусть $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел с $h_n \to 0$. Тогда существует $f(x) \in C[0,1]$ такая, что для любой функции $g(x)$ измеримой на $[0,1]$ можно найти возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой*

$$\frac{f(x+h_{n_k})-f(x)}{h_{n_k}} \to g(x) \quad \text{почти всюду на} \quad [0,1],$$

при этом множество таких функций $f(x)$ является остаточным в $C[0,1]$.

В 1952 г. в [5] доказана

Теорема (Дж. Маклейн). *Существует целая функция $f(z)$, обладающая универсальными производными, т. е. для любой целой функции $g(z)$ можно найти последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что производные соответствующих порядков локально равномерно сходятся к $g(z)$ в $\mathcal{C}$ (пространство комплексных чисел), т. е.*

$$f^{(n_k)}(z) \to g(z) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Д.Е. Меньшов в [6] доказал существование такого ряда по тригонометрической системе $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, что любая измеримая 2π-периодическая функция является пределом (в смысле сходимости почти всюду) некоторой последовательности частичной суммы этого ряда.

Результат Д.Е. Меньшова фактически является первым результатом о существовании универсального ряда по некоторой ортогональной системе.

В дальнейшем было получено много фундаментальных результатов о существовании рядов по разным ортогональным системам, универсальных (в обычном смысле, относительно перестановок, подрядов, знаков и т. д.) в разных классах функций.

Обозначим множество всех элементов, универсальных для некоторого класса, через $\mathcal{U}$ (в частности, приведенные выше). Наиболее естественная проблема, когда некоторое семейство отображений обладает универсальным элементом, пока еще не решена. С другой стороны, многие результаты, полученные в этом направлении, показывают, что множество $\mathcal{U}$ или пустое, или очень большое, а именно, остаточное в смысле категории Бэра (содержащее плотное G_δ-подмножество).

В теории хаоса и динамических систем одним из фундаментальных результатов является теорема транзитивности Дж. Биркхофа [3]. Перенеся этот результат на абстрактную теорию универсальных рядов, в 1987 г. К.-Г. Гроссе-Эрдман сформулировал так называемый принцип универсальности [7].

Теорема (принцип универсальности). *Пусть $\mathcal{X}$ — полное метрическое пространство, $\mathcal{Y}$ — сепарабельное метрическое пространство, а $\mathcal{T}_n : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $n \in \mathcal{N}_0$, — непрерывное отображение. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *множество* $\mathcal{U}$ *является остаточным в* $\mathcal{X}$,
(ii) *множество* $\mathcal{U}$ *плотно в* $\mathcal{X}$,
(iii) $\{\mathcal{T}_n\}$ *топологически транзитивно для пар* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Так как это утверждение играет важную роль в дальнейших рассуждениях, то в разделе 3 приведем доказательство некоторой ее модификации (см. лемму 1).

В дальнейшем вместо отображения $\mathcal{T}_n$ рассмотрим оператор частичных сумм ряда Фурье по обобщенной системе Уолша функций класса $\mathcal{C}_a[0,1)$.

Далее напомним определение обобщенной системы Уолша [8]. Пусть $a \geq 2$ — фиксированное целое число и $\omega_a = e^{\frac{2\pi i}{a}}$.

Определение 3 (обобщенной системы Радемахера)**.** Возьмем

$$\varphi_0(x) = \omega_a^k \ \text{ при } \ x \in \left[\frac{k}{a}, \frac{k+1}{a}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, a-1,$$

и для $n \geq 0$ положим

$$\varphi_n(x+1) = \varphi_n(x) = \varphi_0(a^n x).$$

Определение 4 (обобщенной системы Уолша)**.** Положим $\psi_0(x) = 1$. Если $n = \alpha_1 a^{n_1} + \cdots + \alpha_s a^{n_s}$, $n_1 > \cdots > n_s$, $s = 1, 2, \ldots$, где $0 \leq \alpha_j < a$, $j = 1, 2, \ldots, s$, то

$$\psi_n(x) = \varphi_{n_1}^{\alpha_1}(x) \cdot \ldots \cdot \varphi_{n_s}^{\alpha_s}(x).$$

Отметим, что Ψ_2 является классической системой Уолша, а система Ψ_a является частным случаем системы Виленкина.

Замечание. Система Ψ_a, $a \geq 2$, является полной ортонормированной системой в $L^2[0,1)$ (см. [8]).

Основные свойства системы Ψ_a доказаны Г. Кристенсоном, Р. Пели, Ж. Файном, К. Ватари, Н. Виленкиным и др. математиками [8]–[13].

Так как для любого фиксированного $a \geq 2$ функции системы Ψ_a не являются непрерывными на $[0,1)$, то для дальнейших рассуждений заменим пространство $C[0,1)$ на пространство $\mathcal{C}_a[0,1)$ — класс всех функций, определенных на отрезке $[0,1)$, непрерывных во всех точках $[0,1) \setminus \mathcal{Q}_a$ и непрерывных справа в точках $\mathcal{Q}_a = \{\frac{m}{a^k}, 0 \leq m \leq a^k - 1, k = 0, 1, 2, \ldots\}$. При этих обозначениях имеем $\psi_n(x) \in \mathcal{C}_a[0,1)$ для всех $n = 0, 1, \ldots$.

Норму в этом пространстве определим как обыкновенную равномерную норму:

$$\|f\|_{\mathcal{C}_a} = \sup_{x \in [0,1)} |f(x)|, \quad f(x) \in \mathcal{C}_a[0,1).$$

Далее, пусть $E \subset [0,1)$ — счетное множество, а $\Lambda \subset \mathbb{N}$ — множество индексов. Обозначим через $\mathcal{C}^E$ множество всех функций $h(x)$, определенных на E и принимающих комплексные значения: $h(x_k) = y_k \in \mathcal{C}$, $k = 1, 2, \ldots$, а через $\{S_n(f)\}$ — последовательность частичных сумм ряда Фурье функции $f(x) \in \mathcal{C}_a[0,1)$ по обобщенной системе Уолша.

Определение 5. Скажем, что последовательность частичных сумм ряда Фурье функции $f(x) \in \mathcal{C}_a[0,1)$ поточечно универсальна в $\mathcal{C}^E$, если для любой функции $h \in \mathcal{C}^E$ существует такое $n_k \in \Lambda$, что

$$S_{n_k}(f)(x_j) \to h(x_j) \ \text{ при } \ k \to \infty \ \text{ для всех } \ j = 1, 2, \ldots .$$

Вопросы поточечной универсальности для тригонометрической системы рассматривались в работах [14], [15].

Основным результатом настоящей работы является

Теорема. *Для любого счетного множества $E \subset [0,1)$ существует плотное G_δ-множество $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}_a[0,1)$, обладающее следующим свойством: последовательность частичных сумм ряда Фурье любой функции из $\mathcal{M}$ является поточечно универсальной в $\mathcal{C}^E$.*

1. Определения и вспомогательные утверждения

Приведем некоторые свойства системы Уолша и некоторые вспомогательные утверждения, которые будут использоваться в дальнейших рассуждениях.

Свойство A. Обобщенная система Уолша Ψ_a, $a \geq 2$, является полной ортонормированной системой в $L^2[0,1)$ и базисом в $L^p[0,1]$, $p > 1$ (см. [8]).

Свойство B. Из определения 4 в частности, следует

$$\psi_{a^k+j}(x) = \psi_{a^k}(x) \cdot \psi_j(x) \quad \text{при} \quad 0 \leq j \leq a^k - 1.$$

Свойство C. Последовательность частичных сумм $\{S_{a^k}(f)\}$ ряда Фурье по системе Ψ_a, $a \geq 2$, любой функции $f(x) \in \mathcal{C}_a[0,1)$ равномерно сходится к этой функции, и, как следствие, для любой функции $f \in \mathcal{C}_a[0,1)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует полином по системе Уолша P такой, что $\|f - P\|_{\mathcal{C}_a} < \varepsilon$ (см. [8]).

Свойство D. Обозначим через

$$L_k = \int_0^1 |D_k(t)| dt$$

константы Лебега системы Ψ_a, где $D_m(x) = \sum\limits_{j=0}^{m-1} \psi_j(x)$ — ядро Дирихле.

Константы Лебега системы Ψ_a, $a \geq 2$, удовлетворяют следующим условиям:

(i) $L_{a^k} = 1$, $k = 0, 1, \ldots$;

(ii) $L_k = O(\log_a k)$, где O зависит от a;

(iii) существует последовательность натуральных чисел $\Lambda = \{m_k\}_{k=1}^\infty$ с $a^{k-1} \leq m_k < a^k$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$L_{n_k} = \int_0^1 |D_{n_k}(t)| dt > \frac{1}{2a} \cdot \log_a n_k, \quad k \geq 1, \tag{1}$$

т. е. L_{n_k} имеет тот же порядок роста, что и $\log_a n_k$ ([8], [15]).

По аналогии с классической системой Уолша ([16], сс. 22, 57), можно доказать, что обобщенная система Уолша удовлетворяет следующим условиям.

Свойство E. Любая функция $P(x)$, постоянная на каждом двоичном интервале $\Delta_m^{(k)} = \left[\frac{m}{a^k}, \frac{m+1}{a^k}\right)$, $k = 0, \ldots, a^k - 1$, $k = 1, 2, \ldots$, представима в виде

$$P(x) = \sum_{i=0}^{a^k-1} a_i \psi_i(x),$$

т. е. является полиномом по системе Ψ_a, $a \geq 2$, у которого ненулевые коэффициенты имеют номера, не превосходящие $a^k - 1$. При этом такое представление единственное.

Свойство F (принцип локализации). Если две интегрируемые на $[0,1)$ функции совпадают на некотором двоичном интервале Δ, то их ряды Фурье по системе Ψ_a являются равномерно равносходящимися на Δ, т. е. разность этих рядов равномерно на Δ сходится к нулю.

Теорема Бэра (см. [17], с. 184)**.** *Пусть $\mathcal{X}$ — полное метрическое пространство, а $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное число плотных G_δ-множеств в $\mathcal{X}$. Тогда $G = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} G_i$ — плотное G_δ-множество в пространстве $\mathcal{X}$.*

2. Доказательство основных лемм

Основным аппаратом при доказательстве теоремы, сформулированной выше, является следующее утверждение, которое по сути является модификацией принципа универсальности (см. введение).

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{X}$ — полное метрическое пространство, $\mathcal{Y}$ — сепарабельное метрическое пространство, а $\mathcal{T}_n : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $n \in \mathcal{N}_0$, — некоторая последовательность непрерывных отображений. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *$\mathcal{T}_n$ топологически транзитивно для $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$*;

(ii) *существует плотное множество элементов $x \in \mathcal{X}$, каждый из которых универсален в $\mathcal{Y}$.*

Если одно из этих утверждений выполняется, то множество универсальных точек $\mathcal{U}$ является плотным G_δ-подмножеством $\mathcal{X}$.

Доказательство. Сначала покажем, что (ii)⇒(i). Допустим, что существует множество элементов

$$\mathcal{U} = \big\{x \in \mathcal{X} : \{\mathcal{T}_n x : n \in \mathcal{N}\} \text{ плотно в } \mathcal{Y}\big\}, \tag{2}$$

которое плотно в $\mathcal{X}$ и пусть $U \in \mathcal{X}$, $V \in \mathcal{Y}$ — любые открытые непустые множества.

Поскольку множество $\mathcal{U}$ плотно в $\mathcal{X}$, то $\mathcal{U} \cap U \neq \varnothing$, следовательно, существует точка $x_0 \in \mathcal{U}$ такая, что $x_0 \in U$. С другой стороны, согласно (2) существует натуральное число k такое, что $\mathcal{T}_k x_0 \in V$. Отсюда $x_0 \in \mathcal{T}_k(U) \cap V$, т. е. $\mathcal{T}_k(U) \cap V \neq \varnothing$, и, следовательно, $\mathcal{T}_n$ топологически транзитивно для $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (см. определение 2), т. е. имеет место утверждение (i).

Теперь покажем, что (i)⇒(ii). Допустим, имеет место утверждение (i), т. е. $\mathcal{T}_n$ топологически транзитивно для $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Значит, согласно определению 2 для любых непустых открытых множеств $U \subset \mathcal{X}$ и $V \subset \mathcal{Y}$ существует некоторое число $n \geq 0$ такое, что $\mathcal{T}_n(U) \cap V \neq \varnothing$. Для любого открытого множества $U \subset \mathcal{X}$ отсюда имеем $U \cap \mathcal{T}_n^{(-)}(V) \neq \varnothing$, где

$$\mathcal{T}_n^{(-)}(V) = \{x \in \mathcal{X} : \mathcal{T}_n x \in V\} \tag{3}$$

— прообраз множества V относительно $\mathcal{T}_n$.

Следовательно, для любого открытого множества $U \subset \mathcal{X}$ получим

$$U \bigcap \bigcup_{s=1}^{\infty} \mathcal{T}_s^{(-)}(V) \neq \varnothing,$$

т. е. множество $\Theta^{(-)}(V) = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} \mathcal{T}_s^{(-)}(V)$ плотно в $\mathcal{X}$.

С другой стороны, множество $\Theta^{(-)}(V)$ открытое. Действительно, пусть дана любая точка $x_0 \in \mathcal{T}_n^{(-)}(V)$. Тогда $y_0 = \mathcal{T}_n x_0 \in V$. Поскольку $\mathcal{T}_n$ — непрерывное отображение, то для любой окружности $\mathcal{B}_\varepsilon(y_0) \subset V$ существует окрестность $\mathcal{B}_\delta(x_0)$ такая, что $\mathcal{T}_n\left(\mathcal{B}_\delta(x_0)\right) \subset \mathcal{B}_\varepsilon(y_0)$. Отсюда $\mathcal{T}_n\left(\mathcal{B}_\delta(x_0)\right) \subset V$. Таким образом, для любой точки $x \in \mathcal{B}_\delta(x_0)$ имеем $\mathcal{T}_n x \in V$, т. е. $x \in \mathcal{T}_n^{(-)}(V)$. Следовательно, множество $\mathcal{T}_n^{(-)}(V)$ открыто, и, значит, множество $\Theta^{(-)}(V)$ также открыто.

Таким образом, для любого открытого множества $V \subset \mathcal{Y}$ множество $\Theta^{(-)}(V)$ открыто и плотно в $U \subset \mathcal{X}$.

Далее возьмем счетный базис открытых множеств $\{V_j\}_{j=1}^{\infty}$, $V_j \subset \mathcal{Y}$, со свойством: для любого открытого множества $V \subset \mathcal{Y}$ существует $j \geq 1$ такое, что $V_j \subset V$.

Согласно доказанному выше $\{\Theta^{(-)}(V_j)\}_{j=1}^{\infty}$ — открытые и плотные в $\mathcal{X}$ множества. Применяя теорему Бэра, получим, что множество $\Omega = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \Theta^{(-)}(V_j)$ также плотно в $\mathcal{X}$. Возьмем любую точку $x_0 \in \Omega$. Тогда имеем $x_0 \in \Theta^{(-)}(V_j) = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} \mathcal{T}_s^{(-)}(V_j)$ для всех $j = 1, 2, \ldots$. Отсюда и из (3) вытекает, что для любого $j \geq 1$ существует $s \geq 1$ такое, что $\mathcal{T}_s x_0 \in V_j$. Следовательно,

$$V_j \bigcap \bigcup_{s=1}^{\infty} \mathcal{T}_s x_0 \neq \varnothing, \quad j \geq 1. \tag{4}$$

Теперь пусть дано любое открытое множество $V \subset \mathcal{Y}$. Тогда существует V_j такое, что $V_j \subset V$. Отсюда и из (4) имеем, что $V \cap \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} \mathcal{T}_s x_0 \neq \varnothing$, т. е. множество $\bigcup\limits_{s=1}^{\infty} \mathcal{T}_s x_0$ плотно в $\mathcal{Y}$.

Таким образом, множество $\{\mathcal{T}_n x_0 : n \in \mathcal{N}\}$ плотно в $\mathcal{Y}$, т. е. точка x_0 универсальна в $\mathcal{Y}$ и, значит, $x_0 \in \mathcal{U}$ (см. (2)).

С другой стороны, множество Ω является пересечением счетного числа открытых, плотных в $\mathcal{X}$ множеств, следовательно, Ω — плотное G_δ-множество. □

Везде далее через Λ будем обозначать фиксированную последовательность целых чисел m_k, для которых $L_{m_k} \to \infty$ при $k \to \infty$ (см. (1)).

Лемма 2. *Для любого $x_0 \in [0,1)$ и последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Lambda$ последовательность операторов $T_{n_k} : \mathcal{C}_a[0,1) \to \mathcal{C}$, определенная в виде*

$$T_{n_k} f := S_{n_k}(f)(x_0), \quad f \in \mathcal{C}_a,$$

топологически транзитивна для пары $(\mathcal{C}_a[0,1), \mathcal{C})$, т. е. для любых $g(x) \in \mathcal{C}_a[0,1)$, $\varepsilon > 0$ и $b \in \mathcal{C}$ существует функция $f(x) \in \mathcal{C}_a[0,1)$ и число $k_0 \in \mathcal{N}$ такие, что

$$\|f - g\|_{\mathcal{C}_a} < \varepsilon, \quad S_{n_{k_0}}(f)(x_0) = b.$$

Доказательство. Пусть даны $g(x) \in \mathcal{C}_a[0,1)$, $b \in \mathcal{C}$ и $\varepsilon > 0$.

Из свойства **B** следует, что существует полином Уолша $Q(x)$ такой, что

$$\|g(x) - Q(x)\|_{\mathcal{C}_a} < \varepsilon/2. \tag{5}$$

Более того из свойства **D** вытекает, что для $x_0 \in [0,1)$ и последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Lambda$ существует функция $H(x) \in \mathcal{C}_a[0,1)$ такая, что $S_{n_k}(H)(x_0) \to \infty$. Значит, можно найти число k_0, $n_{k_0} > \deg\{Q\}$, для которого

$$|S_{n_{k_0}}(H)(x_0)| > |b - Q(x_0)| \cdot \frac{2\|H\|_{\mathcal{C}_a}}{\varepsilon}. \tag{6}$$

Далее рассмотрим функцию

$$\widetilde{H}(x) = \frac{b - Q(x_0)}{S_{n_{k_0}}(H)(x_0)} \cdot H(x). \tag{7}$$

Из (6) и (7) имеем $\|\widetilde{H}(x)\|_{\mathcal{C}_a} < \varepsilon/2$ и

$$S_{n_{k_0}}(\widetilde{H})(x_0) = \frac{b - Q(x_0)}{S_{n_{k_0}}(H)(x_0)} \cdot S_{n_{k_0}}(H)(x_0) = b - Q(x_0).$$

Положим

$$f(x) = \widetilde{H}(x) + Q(x). \tag{8}$$

Очевидно, $f(x) \in \mathcal{C}_a[0,1)$. С другой стороны, для $g(x) \in \mathcal{C}_a[0,1)$ из (5) и (8) получаем

$$\|f(x) - g(x)\|_{\mathcal{C}_a} \le \|f(x) - Q(x)\|_{\mathcal{C}_a} + \|Q(x) - g(x)\|_{\mathcal{C}_a} \le \|\widetilde{H}(x)\|_{\mathcal{C}_a} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Учитывая, что $n_{k_0} > \deg\{Q\}$, и, следовательно, $S_{n_{k_0}}(Q)(x) = Q(x)$, из (8) получаем

$$S_{n_{k_0}}(f)(x_0) = S_{n_{k_0}}(\widetilde{H})(x_0) + Q(x_0) = b - Q(x_0) + Q(x_0) = b. \qquad \square$$

Из лемм 1 и 2 вытекает

Лемма 3. *Для любого $x_0 \in [0,1)$ и последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Lambda$ существует функция $f(x) \in \mathcal{C}_a[0,1)$ такая, что множество $\{S_n(f)(x_0) : n \in \{n_k\}_{k=1}^{\infty}\}$ плотно в $\mathcal{C}$, т. е. функция $f(x)$ универсальна в $\mathcal{C}$ относительно обобщенной системы Уолша.*

Лемма 4. *Для любого конечного множества*

$$E_N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}, \quad x_k \in [0,1), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad N \ge 1,$$

последовательность операторов $T_n : \mathcal{C}_a[0,1) \to \mathcal{C}^{E_N}$, определенная следующим образом:

$$T_n(f) := \{S_n(f)(x_i), \quad i = 1, 2, ..., N, \quad n \in \Lambda, \quad f \in \mathcal{C}_a\},$$

топологически транзитивна для пары $(\mathcal{C}_a[0,1), \mathcal{C}^{E_N})$, т. е. для любых $g(x) \in \mathcal{C}_a[0,1)$, $\varepsilon > 0$ и $h(x) \in \mathcal{C}^{E_N}$ существует функция $f(x) \in \mathcal{C}_a[0,1)$ и последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Lambda$ такие, что

$$\|f - g\|_{\mathcal{C}_a} < \varepsilon, \quad |S_{n_k}(f)(x_i) - h(x_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Доказательство проведем с помощью индукции по количеству точек N множества E.

Если множество E содержит одну точку x_0, т. е. $N = 1$, то доказательство следует из леммы 3 (при $E = \{x_0\}$).

Предположим, что утверждение леммы 4 справедливо для любого конечного множества $F = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, содержащего N точек. Докажем утверждение для множества $E = \{x_0\} \cup F = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, содержащего $N + 1$ точку.

Пусть даны функции $g \in \mathcal{C}_a[0,1)$, $h : E \to \mathcal{C}$, $h(x) \in \mathcal{C}^E$ и число $\varepsilon > 0$.

Согласно свойству **C** для функции $g \in \mathcal{C}_a[0,1)$ можно найти полином по обобщенной системе Уолша $Q(x)$ такой, что

$$\|g(x) - Q(x)\|_{\mathcal{C}_a} < \varepsilon/3. \tag{9}$$

Полагая $F = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, $g(x) = 0$ $(x \in [0,1))$, $h(x) - Q(x) \in \mathcal{C}^F$ и $\varepsilon > 0$, получим, что существуют функция $U(x) \in \mathcal{C}_a[0,1)$ и $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Lambda$ такие, что

$$\|U\|_{\mathcal{C}_a} < \varepsilon/3, \tag{10}$$

$$|S_{n_k}(U)(x_i) - (h(x_i) - Q(x_i))| < \varepsilon/3, \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{11}$$

Далее, применяя лемму 3 для последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и, соответственно, для числа $h(x_0) - Q(x_0) = b \in \mathcal{C}$, можем найти подпоследовательность $\{n_{k_j}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{n_k\}$ и функцию $V(x) \in \mathcal{C}_a[0,1)$,

$$\|V\|_{\mathcal{C}_a} < \varepsilon/3, \tag{12}$$

$$|S_{n_{k_j}}(V)(x_0) - (h(x_0) - Q(x_0))| < \varepsilon/3. \tag{13}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) \in C[0,1]$, удовлетворяющую условиям

$$0 \le \varphi(x) \le 1, \quad \varphi(x)|_{\mathcal{U}_{x_0}} = 0, \quad \varphi(x)|_{\mathcal{U}_{x_i}} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{14}$$

где $\mathcal{U}_{x_i}$ — некоторые открытые окрестности точек x_i, $i = 0, 1, \dots, N$.

В этом случае имеем

$$U\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathcal{U}_{x_0}; \\ U(x), & x \in \mathcal{U}_{x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \end{cases}$$

$$(1 - \varphi(x))V(x) = \begin{cases} V(x), & x \in \mathcal{U}_{x_0}; \\ 0, & x \in \mathcal{U}_{x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \end{cases}$$

Применяя принцип локализации (см. свойство **F**), для достаточно больших чисел n_{k_j} (в частности, $n_{k_j} > \deg\{Q\}$) получим неравенства

$$|S_{n_{k_j}}(U\varphi)(x_0)| < \varepsilon/3, \tag{15}$$

$$|S_{n_{k_j}}((1-\varphi)V)(x_0) - S_{n_{k_j}}(V)(x_0)| < \varepsilon/3, \tag{16}$$

$$|S_{n_{k_j}}(U\varphi)(x_i) - S_{n_{k_j}}(U)(x_i)| < \varepsilon/3, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{17}$$

$$|S_{n_{k_j}}((1-\varphi)V)(x_i)| < \varepsilon/3, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{18}$$

Определим функцию

$$f(x) = U(x)\varphi(x) + (1 - \varphi(x))V(x) + Q(x), \quad x \in [0, 1). \tag{19}$$

Из (9), (10), (12) и (14) следует, что $f(x) \in \mathcal{C}_a[0, 1)$ и

$$\|f(x) - g(x)\|_{\mathcal{C}_a} \le \|U(x)\|_{\mathcal{C}_a} + \|V(x)\|_{\mathcal{C}_a} + \|Q(x) - g(x)\|_{\mathcal{C}_a} < \varepsilon.$$

Учитывая, что $n_{k_j} > \deg\{Q\}$ (значит, $S_{n_{k_j}}(Q)(x) = Q(x)$), из соотношений (11), (17)–(19) получим

$$\begin{aligned} &|S_{n_{k_j}}(f)(x_i) - h(x_i)| \le \|S_{n_{k_j}}(U\varphi)(x_i) + S_{n_{k_j}}((1-\varphi)V)(x_i) + Q(x_i) - h(x_i)| \le \\ &\le |S_{n_{k_j}}(U\varphi)(x_i) - S_{n_{k_j}}(U)(x_i)| + |S_{n_k}(U)(x_i) - (h(x_i) - Q(x_i))| + |S_{n_{k_j}}((1-\varphi)V)(x_i)| < \varepsilon \end{aligned}$$

и, аналогично, из (13), (15), (16) и (19) имеем

$$\begin{aligned} |S_{n_{k_j}} f(x_0) - h(x_0)| \le |S_{n_{k_j}}(U\varphi)(x_0)| + |S_{n_{k_j}}((1-\varphi)V)(x_0) - S_{n_{k_j}}(V)(x_0)| + \\ + |S_{n_{k_j}}(V)(x_0) - (h(x_0) - Q(x_0))| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Из полученных неравенств следует

$$|S_{n_{k_j}}(f)(x_i) - h(x_i)| < \varepsilon, \quad i = 0, 1, \ldots, N. \qquad \square$$

Из лемм 1 и 4 непосредственно вытекает

Лемма 5. *Для любого конечного множества $E_j = \{x_1, x_2, \ldots, x_j\}$, $j \ge 1$, $x_i \in [0, 1)$, $i = 1, 2, \ldots, j$, множество всех функций из $\mathcal{C}_a[0, 1)$, универсальных в $\mathcal{C}^{E_j}$, т. е.*

$$\mathcal{F}_j = \left\{ f(x) \in \mathcal{C}_a[0, 1) : \{S_n(f)(x_i) : n \in \Lambda,\ x_i \in E_j\} \text{ всюду плотно в } \mathcal{C}^{E_j} \right\},$$

является плотным G_δ-множеством в $\mathcal{C}_a[0, 1)$.

3. Доказательство теоремы

Пусть дано любое счетное множество $E = \{x_1, x_2, \dots\}$. Представим

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, \quad E_j = \{x_1, x_2, \dots, x_j\}, \quad j = 1, 2, \dots .$$

Тогда согласно лемме 5 для любого $j \geq 1$ множество

$$\mathcal{F}_j = \left\{ f \in \mathcal{C}_a[0,1) : \{S_n(f)(x) : n \in \Lambda,\ x \in E_j\} \text{ плотно в } \mathcal{C}^{E_j} \right\}$$

является плотным G_δ-множеством в $\mathcal{C}_a[0,1)$. В силу теоремы Бэра $\mathcal{U} = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j \neq \varnothing$ также является плотным G_δ-множеством в $\mathcal{C}_a[0,1)$.

Возьмем любую функцию $\widetilde{f} \in \mathcal{U}$. Отсюда имеем $\widetilde{f} \in \mathcal{F}_j$ для всех $j \geq 1$.

Пусть теперь дана любая функция $h \in \mathcal{R}^E$. Тогда существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что для любого x_i, $i = 1, 2, \dots, j$,

$$|S_{n_k^{(j)}}(\widetilde{f})(x_i) - h(x_i)| < \frac{1}{k}.$$

Возьмем последовательность $m_j = n_j^{(j)}$ при $j = 1, 2, \dots$. Тогда для любого $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_j\}$ имеем

$$|S_{m_j}(\widetilde{f})(x) - h(x)| < \frac{1}{j}. \tag{20}$$

Для любой точки $\overline{x} \in E$ можно найти число $k_0 \geq 1$ такое, что $\overline{x} = x_{k_0}$.

Теперь пусть дано произвольное положительное число ε. Положим $j_0 = k_0 + \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тогда для любого $j \geq j_0$ имеем $x_{k_0} \in E_j = \{x_1, x_2, \dots, x_j\}$ и, следовательно, из (20) получим

$$|S_{m_j}(\widetilde{f})(\overline{x}) - h(\overline{x})| = |S_{m_j}(\widetilde{f})(x_{k_0}) - h(x_{k_0})| < \frac{1}{j} < \varepsilon,$$

откуда $S_{m_j}(\widetilde{f})(\overline{x}) \to h(\overline{x})$ при $j \to \infty$ для любой точки $\overline{x} \in E$. Теорема доказана.

Литература

[1] Grosse-Erdmann K.-G., Peris M.A. *Linear chaos* (Springer, London, 2011).

[2] Fekete M. *Untersuchungen über absolut Reihen, mit Anwendung auf dirichletsche und Fouriersche Reihen*, Math. És. Termész. Ért. **32**, 389–425 (1914).

[3] Birkhoff G.D., *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris **189**, 473–475 (1929).

[4] Marcinkiewicz J. *Sur les nombres dérivés*, Fund. Math. **24**, 305–308 (1935).

[5] MacLane G.R. *Sequences of derivatives and normal families*, J. Anal. Math. **2**, 72–87 (1952).

[6] Меньшов Д.Е. *Об универсальных тригонометрических рядах*, ДАН СССР **49** (2), 79–82 (1945).

[7] Grosse-Erdmann K.-G., *Holomorphe Monster und universelle Funktionen*, Dissertation, University of Trier (Trier, 1987).

[8] Chrestenson H.E. *A class of generalized Walsh functions*, Pacific J. Math. **5** (1), 17–31 (1955).

[9] Pely R. *A remarkable systems of orthogonal functions*, Proc. London Math. Soc. **34** (1), 241–279 (1932).

[10] Fine J. *The generalized Walsh functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **69**, 66–77 (1950).

[11] Watari C. *On generalized Walsh–Fourier series,* Tohoku Math. J. **10** (3), 211–241 (1958).

[12] Vilenkin N. *On a class of complete orthonormal systems*, AMS Transl. **28**, 1–35 (1963).

[13] Young W. *Mean convergence of generalized Walsh–Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. **218**, 311–320 (1976).

[14] Müller J. *Continuous functions with universally divergent Fourier series on small subsets of the circle*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **348** (21–22), 1155–1158 (2010).

[15] Shkarin S. *Pointwise universal trigonometric series*, J. Math. Anal. Appl. **360** (2), 754–758 (2009).

[16] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша, теория и применения* (Москва, 1987).
[17] Davidson K.R., Donsig A.P. *Real analysis and applications*: *theory in practice* (Springer, N. Y., 2010).

С.А. Епископосян

факультет прикладной математики,
Государственный инженерный университет Армении,
ул. Теряна, д. 105, г. Ереван, 0009, Армения,

e-mail: sergoep@ysu.am

Ю. Мюллер

Университет Трира,
D-54286, Трир, Германия,

e-mail: jmueller@uni-trier.de

S.A. Episkoposyan and J. Müller

On the pointwise universality of the partial sums of Fourier series by the generalized Walsh system

Abstract. We consider the problems of pointwise universality and topological transitivity of the partial sums of Fourier series of generalized Walsh system.

Keywords: generalized Walsh system, pointwise universality, topological transitivity.

S.A. Episkoposyan

Faculty of Applied Mathematics,
State Engineering University of Armenia,
105 Teryan str., Yerevan, 0009 Armenia,

e-mail: sergoep@ysu.am

J. Müller

University of Trier,
D-54286, Trier, Germany,

e-mail: jmueller@uni-trier.de