ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 12 (547)

УДК 514.762

О. КРУПКОВА, Г.Е. ПРИНЦ

ЛЕПАЖЕВЫ ФОРМЫ, ЗАМКНУТЫЕ 2-ФОРМЫ И ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Введение

Обыкновенные дифференциальные уравнения на расслоении струй можно изучать с помощью вариационной последовательности Крупки [1], [2] и дифференциальных форм, являющихся представителями классов эквивалентности в этой последовательности. В данном обзоре рассматриваются дифференциальные уравнения, представленные *динамическими формами* на расслоении струй сечений расслоенного многообразия [3]–[6]. В разделе 4 описываются различные представители классов вариационной последовательности; в частности, приводится обобщение понятий *форм-источников* и *лепажевых форм*, а также изучаются лепажевы эквиваленты динамических форм. В разделе 5 лепажевы формы используются для того, чтобы построить внешние дифференциальные системы, ассоциированные с дифференциальным уравнением второго порядка, и получить две различные классификации уравнений: 1) по свойствам лепажевых эквивалентов динамических форм, измеряющих "вариационность" (существование лагранжианов), 2) по свойствам решений. В этих классификациях важными специальными классами уравнений являются *регулярные* уравнения, а также и *полувариационные* и *вариационные* уравнения. Последние два раздела посвящены изучению регулярных уравнений. Следуя работам Крупковой [7], [4], здесь приводим геометрическое описание этих уравнений с использованием полупульверизаций и полупульверизационных связностей и подробно изучаем лепажевы формы, соответствующие регулярным динамическим формам и полупульверизациям. В основном упор делается на так называемый келеров лифт Ω регулярного симметрического $(0,2)$-тензорного поля g, построенный в [8], в частности, на выяснение роли этой 2-формы Ω в вариационной последовательности и в общей теории лепажевых форм. Также выясняется значение этой формы для решения обратной вариационной проблемы для полупульверизаций.

2. Анализ на расслоениях

В данной статье предполагается, что все многообразия и отображения являются гладкими. Рассмотрим расслоенное многообразие $\pi : Y \to X$, где $\dim X = 1$ и $\dim Y = m+1$ $(m > 0)$, и соответствующие расслоения $\pi_r : J^rY \to X$ r-струй сечений; в основном рассматривается случай $r = 1, 2$. Канонические проекции J^rY на J^kY, $0 \le k \le r-1$, обозначаются через $\pi_{r,k}$ (здесь полагаем, что $J^0Y = Y$). В дальнейшем под сечениями понимаем локальные сечения, определенные на открытых подмножествах X. Сечение δ расслоения π_r называется *голономным*, если $\delta = J^r\gamma$ для некоторого сечения γ расслоения π.

Обозначим расслоенные координаты на Y через (t, x^i), $1 \le i \le m$, и соответствующие координаты на J^rY через (t, x^i_k), $1 \le i \le m$, $0 \le k \le r$; обычно будем их обозначать следующим образом: $x^i_0 = x^i$, $x^i_1 = \dot x^i$, $x^i_2 = \ddot x^i$, $x^i_3 = \dddot x^i$. Также по повторяющимся индексам в выражениях, содержащих координаты, предполагается суммирование.

В расслоениях струй определены специальные векторные поля, дифференциальные формы и операторы, адаптированные к структуре расслоения и ее продолжению, т. е. соответствующей структуре расслоения струй. В этом разделе напомним основные понятия, следуя работам [9], [10] (также см. [11], [4], [12]).

Через $\mathfrak{X}(J^rY)$ обозначим модуль векторных полей на J^rY. Векторное поле $\xi \in \mathfrak{X}(Y)$ называется *π-проектируемым*, если существует векторное поле $\xi_0 \in \mathfrak{X}(X)$ такое, что $T\pi\xi = \xi_0 \circ \pi$, и *$\pi$-вертикальным*, если $\xi_0 = 0$. Аналогично на J^rY определены *π_r-проектируемое* и *π_r-вертикальное* (соответственно, *$\pi_{r,k}$-проектируемое* и *$\pi_{r,k}$-вертикальное*) векторные поля.

Обозначим через $\Lambda^q(J^rY)$, $r \geq 0$, $q \geq 0$, модуль гладких q-форм на J^rY над кольцом функций (при $q = 0$ получаем гладкие функции на J^rY). Форма $\eta \in \Lambda^q(J^rY)$ называется *$\pi_{r,k}$-проектируемой*, если существует $\eta_0 \in \Lambda^q(J^kY)$ такая, что $\eta = \pi^*_{r,k}\eta_0$. Форма $\eta \in \Lambda^q(J^rY)$ называется *π_r-горизонтальной*, если $i_\xi\eta = 0$ для любого π_r-вертикального векторного поля ξ на J^rY. Форма $\eta \in \Lambda^q(J^rY)$ называется *$\pi_{r,k}$-горизонтальной*, $0 \leq k < r$, если $i_\xi\eta = 0$ для любого $\pi_{r,k}$-вертикального векторного поля ξ на J^rY. Пусть $\eta \in \Lambda^q(J^rY)$. Существует единственная горизонтальная форма $h\eta \in \Lambda^q(J^{r+1}Y)$ такая, что для любого сечения γ расслоения π выполняется равенство

$$J^r\gamma^*\eta = J^{r+1}\gamma^*h\eta.$$

Отображение $h : \Lambda^q(J^rY) \to \Lambda^q(J^{r+1}Y)$ является гомоморфизмом внешних алгебр и называется *оператором горизонтализации* [9]. Форма $\eta \in \Lambda^q(J^rY)$ называется *контактной*, если $J^r\gamma^*\eta = 0$ для любого сечения γ расслоения π. Ясно, что форма η контактна тогда и только тогда, когда $h\eta = 0$. На расслоенных многообразиях с одномерной базой X каждая q-форма при $q \geq 2$ контактна. Контактные формы на J^rY образуют замкнутый идеал во внешней алгебре, локально порожденный 1-формами

$$\omega^i = dx^i - \dot{x}^i dt, \quad \dot{\omega}^i = d\dot{x}^i - \ddot{x}^i dt, \dots, \omega^i_{r-1} = dx^i_{r-1} - x^i_r dt, \tag{1}$$

и их внешними дифференциалами; этот идеал называется *контактным.*

Пусть $q \geq 1$, и пусть $\eta \in \Lambda^q(J^rY)$ — *контактная* форма. Скажем, что η *1-контактна*, если для любого π_r-вертикального векторного поля ξ на J^rY $(q-1)$-форма $i_\xi\eta$ является π_r-горизонтальной; скажем, что η *k-контактна*, $2 \leq k \leq q$, если $i_\xi\eta$ $(k-1)$-контактна. *Каждая q-форма η на J^rY допускает единственное разложение* [10]

$$\pi^*_{r+1,r}\eta = p_{q-1}\eta + p_q\eta$$

в сумму $(q-1)$-контактной и q-контактной форм (выше уже было введено обозначение $p_0\eta = h\eta$). Форма $p_i\eta$ называется *i-контактной частью* формы η. Контактная q-форма называется *сильно контактной* [1], если $\pi^*_{r+1,r}\eta = p_q\eta$.

Контактные 1-формы на J^rY аннулируют распределение постоянного коранга mr, называемого *контактным* или *распределением Картана* порядка r, обозначим его $\mathcal{C}_{\pi_r}$. Это распределение не является вполне интегрируемым. Эквивалентным образом это распределение можно описать как распределение, натянутое на $m+1$ векторное поле

$$\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \cdots + x^i_r\frac{\partial}{\partial x^i_{r-1}},\ \frac{\partial}{\partial x^j_r},\quad 1 \leq j \leq m.$$

Векторные поля, принадлежащие распределению, которые нигде не вертикальны, называются *полупульверизациями.* Заметим, что *голономные сечения* можно охарактеризовать как *интегрируемые сечения полупульверизаций.*

Контактные 1-формы (1) могут быть дополнены до базиса 1-форм, который адаптирован к структуре расслоения. В дальнейшем для локального выражения форм на J^1Y часто будет использоваться адаптированный базис $(dt, \omega^a, d\dot{x}^a)$ вместо канонического базиса $(dt, dx^a, d\dot{x}^a)$, и аналогично для форм на J^2Y — адаптированный базис $(dt, \omega^a, \dot{\omega}^a, d\ddot{x}^a)$ вместо $(dt, dx^a, d\dot{x}^a, d\ddot{x}^a)$.

В вариационном исчислении и в теории дифференциальных уравнений на расслоенном многообразии базовыми объектами являются горизонтальные 1-формы на J^rY, называемые *лагранжианами* порядка r, и 1-контактные 2-формы, которые горизонтальны относительно проекции на Y, называемые *динамическими формами.* В расслоенной карте лагранжиан $\lambda \in \Lambda^1(J^rY)$ и динамические формы $E \in \Lambda^2(J^rY)$ записываются в виде

$$\lambda = Ldt, \quad \text{где} \quad L = L(t, x^j, \dot{x}^j, \dots, x^j_r),$$

и

$$E = E_i\omega^i \wedge dt, \quad \text{где} \quad E_i = E_i(t, x^j, \dot{x}^j, \dots, x^j_r),$$

соответственно.

Лагранжиану λ ставится в соответствие специальная динамическая форма E_λ, называемая *формой Эйлера–Лагранжа* лагранжиана λ [9]. Если λ — лагранжиан порядка r, то E_λ имеет порядок $\leq 2r$, и его компоненты $E_i(L)$, называемые *выражениями Эйлера–Лагранжа*, определяются следующим образом:

$$E_i(L) = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} + \dots + (-1)^r \frac{d^r}{dt^r}\frac{\partial L}{\partial x^i_r}.$$

В этом случае отображение $\Lambda^1(J^rY) \ni \lambda \to E_\lambda \in \Lambda^2(J^{2r}Y)$ называется *отображением Эйлера–Лагранжа.*

Динамическая форма E называется *глобально вариационной*, если существует лагранжиан λ такой, что (возможно с точностью до проекции расслоения струй) $E = E_\lambda$. Форма E называется *локально вариационной*, если каждая точка в области определения E имеет окрестность U, на которой E является вариационной.

3. Вариационная последовательность

Одним из основных инструментов, используемых в данной статье, является *вариационная последовательность*, введенная Крупкой в 1990 [1], [2]. При исследовании геометрии дифференциальных уравнений на расслоенных многообразиях фундаментальную роль играют два типа дифференциальных форм: *динамические формы* и *лепажевы 2-формы.* Формы обоих типов оказываются *различными* представителями классов *второго столбца* вариационной последовательности расслоенного многообразия $\pi : Y \to X$, где $\dim X = 1$.

Следуя Крупке, обозначим через Ω^r_q пучок q-форм на J^rY. Положим $\Omega^r_{0,c} = \{0\}$, и через $\Omega^r_{q,c}$ обозначим пучок сильно контактных q-форм на J^rY. Положим

$$\Theta^r_q = \Omega^r_{q,c} + d\Omega^r_{q-1,c},$$

где $d\Omega^r_{q-1,c}$ есть образ пучка $\Omega^r_{q-1,c}$ при отображении внешнего дифференцирования d. Возникает последовательность

$$0 \to \Theta^r_1 \to \Theta^r_2 \to \Theta^r_3 \to \cdots, \tag{2}$$

где морфизмами являются внешние дифференциалы, т. е. получаем подпоследовательность последовательности (комплекса) де Рама

$$0 \to \mathbb{R} \to \Omega^r_0 \to \Omega^r_1 \to \Omega^r_2 \to \Omega^r_3 \to \cdots.$$

Последовательность (2) есть точная последовательность мягких пучков, поэтому фактор-последовательность

$$0 \to \mathbb{R} \to \Omega^r_0 \to \Omega^r_1/\Theta^r_1 \to \Omega^r_2/\Theta^r_2 \to \Omega^r_3/\Theta^r_3 \to \cdots$$

также точна. Она называется *вариационной последовательностью* порядка r на π.

Как доказано в [1], *вариационная последовательность является ацикличной резольвентой постоянного пучка* $\mathbb{R}$ *на* Y. Следовательно, согласно абстрактной теореме де Рама получаем, что *группы когомологий коцепного комплекса глобальных сечений вариационной последовательности изоморфны группам когомологий де Рама* H^qY *многообразия* Y.

Следует подчеркнуть, что элементы фактор-пучков Ω_q^r/Θ_q^r, $q \geq 1$, являются не формами, но *классами* локальных q-форм r-го порядка. Обозначим через $[\rho]_{\mathrm{v}}$ элемент Ω_q^r/Θ_q^r, т. е. класс формы $\rho \in \Omega_q^r$. Пусть

$$\mathcal{E}_q : \Omega_q^r/\Theta_q^r \to \Omega_{q+1}^r/\Theta_{q+1}^r,$$

есть фактор-отображение, тогда $\mathcal{E}_q([\rho]_{\mathrm{v}}) = [d\rho]_{\mathrm{v}}$.

Последовательность называется вариационной, т. к. фактор-отображение

$$\mathcal{E}_1 : \Omega_1^r/\Theta_1^r \to \Omega_2^r/\Theta_2^r$$

отождествляется с *отображением Эйлера–Лагранжа* в вариационном исчислении. Следующее фактор-отображение

$$\mathcal{E}_2 : \Omega_2^r/\Theta_2^r \to \Omega_3^r/\Theta_3^r$$

называется *отображением Гельмгольца.* Образ класса $[\rho]_{\mathrm{v}} \in \Omega_2^r/\Theta_2^r$, т. е. класс $[d\rho]_{\mathrm{v}} \in \Omega_3^r/\Theta_3^r$, называется *классом Гельмгольца.*

Условие точности $\mathcal{E}_1([\rho]_{\mathrm{v}}) = 0$ вариационной последовательности означает, что существует $f \in \Omega_0^r$ такая, что $[\rho]_{\mathrm{v}} = [df]_{\mathrm{v}}$. Следовательно, получаем (локальную) функцию f такую, что отображение Эйлера–Лагранжа переводит $[df]_{\mathrm{v}}$ в нуль; другими словами, класс $[df]_{\mathrm{v}}$ — *нуль-лагранжиан.* Если, кроме того, $H^1Y = \{0\}$, f может быть выбрана *глобально* определенной на J^rY. Точно так же условие $\mathcal{E}_2([\alpha]_{\mathrm{v}}) = 0$ дает класс $[\rho]_{\mathrm{v}} \in \Omega_1^r/\theta_1^r$ такой, что $[\alpha]_{\mathrm{v}} = [d\rho]_{\mathrm{v}} = \mathcal{E}_1([\rho]_{\mathrm{v}})$, т. е. $[\alpha]_{\mathrm{v}}$ есть образ класса $[\rho]_{\mathrm{v}}$ при отображении Эйлера–Лагранжа. Таким образом, условие $\mathcal{E}_2([\alpha]_{\mathrm{v}}) = [d\alpha]_{\mathrm{v}} = 0$ означает, что форма $[\alpha]_{\mathrm{v}}$ *локально вариационная* (порождается локальным лагранжианом, представленным классом $[\rho_{\mathrm{v}}]$). Если $H^2Y = \{0\}$, то существование *глобального* лагранжиана гарантировано.

4. Формы-источники и лепажевы формы

Фактор-пучки Ω_q^r/Θ_q^r в вариационной последовательности определены с точностью до естественных изоморфизмов абелевых групп. Вследствие этого *классы* из Ω_q^r/Θ_q^r допускают различные эквивалентные представления *дифференциальными формами*; эти формы однако *могут иметь порядок больший, чем r.*

Перейдем к двум наиболее важным видам представлений элементов фактор-пучков Ω_q^1/Θ_q^1: с помощью *форм-источников* и *лепажевых форм.*

Первая возможность состоит в том, чтобы представлять классы вариационной последовательности с помощью *форм-источников* (используем терминологию Такенса [13]). *Канонический представитель — форма-источник* получается с помощью *внутреннего оператора Эйлера–Лагранжа $\mathcal{I}$*, введенного в теорию вариационных бикомплексов Андерсоном [14], [15], и адаптированного к ситуации конечного порядка, возникающей в теории вариационной последовательности [16], [17]. Этот оператор описывает внутренним образом процедуру выделения канонического представителя класса $[\rho]_{\mathrm{v}} \in \Omega_q^r/\Theta_q^r$, состоящую в применении к ρ оператора p_{q-1} и факторизации по Θ_q^r.

Для первого столбца, т. е. для классов из Ω_1^r/Θ_1^r, все обстоит достаточно просто, т. к. $p_0 = h$ и Θ_1^r — пучок контактных 1-форм, что делает факторизацию тривиальной, а представление класса с помощью формы-источника — единственным. Следовательно, для $[\rho]_{\mathrm{v}} \in \Omega_1^r/\Theta_1^r$ просто полагаем $\mathcal{I}\rho = h\rho$, и получаем класс $[\rho]_{\mathrm{v}}$, представленный 1-формой $\lambda = h\rho \in \Omega_1^{r+1}$, т. е. *лагранжианом.* Но для $q \geq 2$ факторизация уже тривиальной не будет. Если $[\rho]_{\mathrm{v}} \in \Omega_q^r/\Theta_q^r$, положим [17] $\mathcal{I}\rho = Ip_{q-1}\rho$, где оператор I определен рекуррентной формулой, которую можно найти в [17]. В расслоенных координатах, где

$$p_{q-1}\rho = \sum_{k,l=0}^{r} H_{ij}^{kl} \omega_k^i \wedge \omega_l^j \wedge dt,$$

формула для оператора $\mathcal{I}$ имеет вид

$$\mathcal{I}\rho = Ip_{q-1}\rho = \frac{1}{2}\sum_{k,l=0}^{r}\sum_{p=0}^{k}(-1)^k\binom{k}{p}\frac{d^{k-p}}{dt^{k-p}}(H^{lk}_{ji} - H^{lk}_{ij})\omega^j_{p+l}\wedge\omega^i\wedge dt.$$

Оператор $\mathcal{I}$ задает представление с помощью ω^i-порожденной $(q-1)$-контактной q-формы. Он является $\mathbb{R}$-линейным отображением $\Omega^r_q \to \Omega^{2r+1}_q$ таким, что

(i) $\mathcal{I}\rho$ принадлежит тому же классу, что и $\pi^*_{2r+1,r}\rho$,
(ii) $\mathcal{I}^2 = \mathcal{I}$ (с точностью до канонической проекции),
(iii) ядро $\mathcal{I} : \Omega^r_q \to \Omega^{2r+1}_q$ есть Θ^r_q.

Заметим, что (iii) означает, что $\mathcal{I}\rho$ не зависит от выбора представителя ρ класса $[\rho]_{\mathrm{v}}$.

Определение 4.1. Под *представлением пучка* Ω^r_q/Θ^r_q*,* $q \geq 1$*, с помощью форм-источников* будем понимать $\mathbb{R}$-линейное отображение $\mathcal{I}' : \Omega^r_q \to \Omega^s_q$ такое, что $\mathcal{I}'\rho$ есть ω^i-порожденная $(q-1)$-контактная q-форма, эквивалентная $\mathcal{I}\rho$. Тогда $\mathcal{I}'\rho$ называется *формой-источником* для пучка Ω^1_q/Θ^1_q.

Начиная с этого момента будем рассматривать вариационные последовательности *первого порядка* $0 \to \mathbb{R} \to \Omega^1_0 \to \Omega^1_1/\Theta^1_1 \to \Omega^1_2/\Theta^1_2 \to \Omega^1_3/\Theta^1_3 \to \cdots$.

В расслоенных координатах, если ρ — 2-форма на J^1Y и $p_1\rho = (E_i\omega^i + E^1_i\dot{\omega}^i)\wedge dt$, получаем $\mathcal{I}\rho = Ip_1\rho = \left(E_i - \frac{dE^1_i}{dt}\right)\omega^i\wedge dt$. Таким образом, полученные формы-источники для Ω^1_2/Θ^1_2 являются *динамическими формами.* Также ясно, что для форм ρ порядка 1 форма $\mathcal{I}\rho$ может иметь порядок 3.

Предложение 4.1. *Представление фактор-пучка* Ω^1_2/Θ^1_2 *с помощью форм-источников, полученное посредством внутреннего оператора Эйлера–Лагранжа* $\mathcal{I}$*, является единственным.*

Доказательство. Если $[\rho]_{\mathrm{v}} \in \Omega^1_2/\Theta^1_2$, то по определению 4.1 любая форма-источник σ, представляющая класс $[\rho]_{\mathrm{v}}$, является динамической формой эквивалентной $\mathcal{I}\rho$. Таким образом, $\sigma = \mathcal{I}\rho + p_1 d\eta$, где η — 1-форма такая, что $p_1 d\eta$ — динамическая форма, и $\mathcal{I}\sigma = \mathcal{I}\rho$, т. е. $\mathcal{I}p_1 d\eta = 0$. Однако, т. к. $p_1 d\eta$ является динамической, получаем $\mathcal{I}p_1 d\eta = p_1 d\eta$, следовательно, $p_1 d\eta = 0$ и $\sigma = \mathcal{I}\rho$. $\square$

В представлении с помощью форм-источников отображение Эйлера–Лагранжа принимает ожидаемый вид

$$\mathcal{E}_1 : \Omega^2_1 \ni \mathcal{I}\rho = \lambda \to \mathcal{I}d\rho = \mathcal{I}d\lambda = E_\lambda \in \Omega^3_2.$$

Отображение Гельмгольца в представлении с помощью форм-источников записывается как

$$\mathcal{E}_2 : \Omega^3_2 \ni \mathcal{I}\rho = E \to \mathcal{I}d\rho = \mathcal{I}dE = \widetilde{H}_E \in \Omega^4_3,$$

где 3-форма-источник $\widetilde{H}_E$ называется *формой Гельмгольца* для E. В расслоенных координатах, где $E = E_i\omega^i\wedge dt$ есть *динамическая форма второго порядка*, имеем (см. [17])

$$\widetilde{H}_E = \frac{1}{2}\bigg[\bigg(\frac{\partial E_i}{\partial x^j} - \frac{\partial E_j}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\bigg(\frac{\partial E_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial E_j}{\partial \dot{x}^i}\bigg) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\bigg(\frac{\partial E_i}{\partial \ddot{x}^j} - \frac{\partial E_j}{\partial \ddot{x}^i}\bigg)\bigg)\omega^j + \\ + \bigg(\frac{\partial E_i}{\partial \dot{x}^j} + \frac{\partial E_j}{\partial \dot{x}^i} - 2\frac{d}{dt}\frac{\partial E_j}{\partial \ddot{x}^i}\bigg)\dot{\omega}^j + \bigg(\frac{\partial E_i}{\partial \ddot{x}^j} - \frac{\partial E_j}{\partial \ddot{x}^i}\bigg)\ddot{\omega}^j\bigg]\wedge\omega^i\wedge dt.$$

Представление с помощью 3-форм-источников посредством внутреннего оператора Эйлера–Лагранжа $\mathcal{I}$ уже не будет однозначным: заметим, что для E порядка 2 полученная форма

Гельмгольца имеет порядок 4. Как показано в [18], представление формами-источниками низшего порядка возможно с помощью эквивалентной формы Гельмгольца, которая имеет порядок 3:

$$H_E = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial E_i}{\partial x^j} - \frac{\partial E_j}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial E_j}{\partial \dot{x}^i}\right)\right)\omega^j \wedge \omega^i \wedge dt + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial E_i}{\partial \dot{x}^j} + \frac{\partial E_j}{\partial \dot{x}^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_i}{\partial \ddot{x}^j} + \frac{\partial E_j}{\partial \ddot{x}^i}\right)\right)\dot{\omega}^j \wedge \omega^i \wedge dt + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial E_i}{\partial \ddot{x}^j} - \frac{\partial E_j}{\partial \ddot{x}^i}\right)\ddot{\omega}^j \wedge \omega^i \wedge dt.$$

Предложение 4.2. *Пусть E — динамическая форма второго порядка. Тогда*

$$H_E = \widetilde{H}_E + p_2 d\eta,$$

где

$$\eta = -\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_i}{\partial \ddot{x}^j} - \frac{\partial E_j}{\partial \ddot{x}^i}\right)\omega^j \wedge \omega^i.$$

Отметим, что условия обращения в нуль компонент формы Гельмгольца эквивалентны *необходимым и достаточным условиям того, что динамическая форма E локально вариационна* (это означает, что в окрестности каждой точки существует лагранжиан λ такой, что $E = E_\lambda$); их называют *условиями Гельмгольца* [19].

Другое представление классов в вариационной последовательности может быть осуществлено при помощи так называемых *лепажевых форм* [9], [17], [3].

Определение 4.2. q-форма ρ, $q \geq 1$, называется *лепажевой формой*, если $p_q d\rho$ является формой-источником. Если σ — q-форма-источник, будем говорить, что ρ — *лепажев эквивалент* формы σ в том случае, когда ρ — лепажева q-форма и $p_{q-1}\rho = \sigma$.

Данное определение лепажевой формы является более широким, чем приведенное в [17] (где форма ρ называется лепажевой, если $p_q d\rho = \mathcal{I} d\rho$), т. к. допускаются лепажевы q-формы, связанные с различными эквивалентными $(q+1)$-формами-источниками, и, следовательно, с лепажевыми эквивалентами данной формы-источника, имеющими различные порядки.

Используя определение 4.2, находим лепажевы эквиваленты лагранжианов и динамических форм.

Лепажев эквивалент лагранжиана λ есть по определению 1-форма ρ такая, что $h\rho = \lambda$ и $p_1 d\rho$ ω^i-порожденная (= горизонтальная относительно проектирования на Y). Заметим, что это в точности оригинальное определение из работы [9]. Тогда непосредственным вычислением получаем, что *каждый лагранжиан λ имеет единственный лепажев эквивалент*; будем обозначать его через θ_λ и называть *формой Картана*. В расслоенных координатах, если $\lambda \in \Lambda^1(J^1Y)$, $\lambda = Ldt$, получим

$$\theta_\lambda = Ldt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\omega^i.$$

Заметим, что по определению $p_1 d\theta_\lambda = E_\lambda$.

Обратимся теперь к лепажевым эквивалентам *динамических форм*. Пусть E — динамическая форма *второго порядка*. По определению 4.2 2-форма α — лепажев эквивалент E, если $p_1\alpha = E$ и $p_2 d\alpha$ — 3 форма-источник. В силу неединственности представления 3-форм с помощью форм-источников можно ожидать, что имеются лепажевы эквиваленты динамической формы, связанные с различными формами-источниками. Прямым вычислением доказывается

Теорема 4.1. 1) *Каждая динамическая форма $E \in \Lambda^2(J^2Y)$ имеет единственный глобальный лепажев эквивалент $\widetilde{\alpha}_E$ на J^3Y, ассоциированный с канонической формой-источником $\mathcal{I}dE = \widetilde{H}_E$. Он определен равенством $p_2 d\widetilde{\alpha}_E = \widetilde{H}_E$, и в расслоенных координатах, где $E = E_i\omega^i \wedge dt$, записывается следующим образом:*

$$\widetilde{\alpha}_E = E_i\omega^i \wedge dt + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial E_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial E_j}{\partial \dot{x}^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_i}{\partial \ddot{x}^j} - \frac{\partial E_j}{\partial \ddot{x}^i}\right)\right)\omega^i \wedge \omega^j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial E_i}{\partial \ddot{x}^j} + \frac{\partial E_j}{\partial \ddot{x}^i}\right)\omega^i \wedge \dot{\omega}^j.$$

2) *Каждая динамическая форма $E \in \Lambda^2(J^2Y)$ имеет единственный глобальный лепажев эквивалент α_E на J^2Y, ассоциированный с формой-источником (минимального порядка) H_E. Он определен равенством $p_2 d\alpha_E = H_E$, и в расслоенных координатах, где $E = E_i\omega^i \wedge dt$, записывается следующим образом:*

$$\alpha_E = E_i\omega^i \wedge dt + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial E_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial E_j}{\partial \dot{x}^i}\right)\omega^i \wedge \omega^j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial E_i}{\partial \ddot{x}^j} + \frac{\partial E_j}{\partial \ddot{x}^i}\right)\omega^i \wedge \dot{\omega}^j. \tag{3}$$

Заметим, что $\alpha_E = \widetilde{\alpha}_E + \eta$, где η определен в предложении 4.2.

С помощью простых вычислений доказывается

Теорема 4.2. *Пусть $E \in \Lambda^2(J^2Y)$ — динамическая форма. Следующие условия эквивалентны*:

1) *лепажев эквивалент α_E формы E проектируем на J^1Y,*
2) *лепажев эквивалент $\widetilde{\alpha}_E$ формы E проектируем на J^1Y,*
3) *в каждой расслоенной карте имеет место разложение $E = E_i\omega^i \wedge dt$, где функции E_i аффинны по вторым производным: $E_i = A_i + g_{ij}\ddot{x}^j$, и g_{ij} удовлетворяет условиям интегрируемости*

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^j}. \tag{4}$$

Заметим, что из (4) следует существование функции $f(t, x^i, \dot{x}^i)$ такой, что

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}.$$

Динамическая форма E, удовлетворяющая условиям теоремы 4.2, называется *полувариационной* .

Характеристику *вариационным* динамическим формам дает

Теорема 4.3 ([3], [20]). *Пусть $E \in \Lambda^2(J^2Y)$ — динамическая форма. Следующие условия эквивалентны*:

1) *E локально вариационная,*
2) *$\alpha_E = \widetilde{\alpha}_E$, и лепажев эквивалент формы E проектируем на J^1Y и замкнут,*
3) *существует единственная 2-контактная 2-форма F такая, что $\alpha = E + F$ проектируема на J^1Y и замкнута.*

Понятие лепажева эквивалента динамической формы, представленное выше, — обобщение лепажева эквивалента локальной вариационной формы, введенного в [3] (см. также [8], [21], [3], [22], где описаны связи между локально вариационными формами и замкнутыми 2-формами).

Заметим, что *на лепажевых представителях морфизмы $\mathcal{E}_q$, $q \geq 0$, вариационной последовательности становятся просто внешними дифференциалами*, и на лепажевых формах имеем $\mathcal{E}_q \circ p_{q-1} = p_q d$, где $p_0 = h$ и $p_{-1} = \mathrm{id}$.

5. Дифференциальные уравнения второго порядка и лепажевы 2-формы

Пусть $E \in \Lambda^2(J^2Y)$ — динамическая форма. Сечение γ расслоения π называется *путем* динамической формы E, если

$$E \circ J^2\gamma = 0. \tag{5}$$

В расслоенных координатах уравнение (5) путей формы E превращается в *систему m дифференциальных уравнений второго порядка* на сечения расслоения $\pi : Y \to X$,

$$E_i(t, x^j, \dot{x}^j, \ddot{x}^j) = 0.$$

Если задана динамическая форма E, говорим, что 2-форма α — *продолжение* E, если $E = p_1\alpha$. Было доказано, что каждая динамическая форма $E \in \Lambda^2(J^2Y)$ имеет глобальное продолжение второго порядка — лепажев эквивалент α_E формы E. В дальнейшем также будем рассматривать локальные продолжения (т. е. продолжения, определенные на открытых подмножествах в J^2Y); обозначим через $\operatorname{dom}\alpha$ область определения α.

Динамическая форма $E \in \Lambda^2(J^2Y)$ называется *подходящей* для J^1Y, если в окрестности каждой точки в J^2Y она имеет локальное продолжение α, которое является проектируемым на открытое подмножество в J^1Y.

Предложение 5.1 ([20]). *Динамическая форма $E \in \Lambda^2(J^2Y)$ является подходящей для J^1Y, только если*

$$E_i = A_i(t, x^k, \dot{x}^k) + g_{ij}(t, x^k, \dot{x}^k)\ddot{x}^j.$$

В этом случае каждое локальное проектируемое продолжение формы E записывается в виде

$$\alpha = A_i\omega^i \wedge dt + g_{ij}\omega^i \wedge d\dot{x}^j + F,$$

где F — 2-контактная 2-форма на открытом подмножестве многообразия J^1Y.

Можно *классифицировать* динамические формы (т. е. дифференциальные уравнения) в соответствии со свойствами их лепажевых эквивалентов.

1) Динамическая форма $E \in \Lambda^2(J^2Y)$ *общего положения*; такая форма имеет единственный глобальный лепажев эквивалент α_E (3) второго порядка.

2) J^1Y*-подходящие* динамические формы: их лепажевы эквиваленты α_E локально раскладываются в сумму продолжения α_E^0 первого порядка формы E и 2-контактной формы φ_E второго порядка следующим образом:

$$\alpha_E = \alpha_E^0 + \varphi_E, \tag{6}$$

где

$$\alpha_E^0 = A_i\omega^i \wedge dt + g_{ij}\omega^i \wedge d\dot{x}^j + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial A_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial A_j}{\partial \dot{x}^i}\right)\omega^i \wedge \omega^j, \tag{7}$$

$$\varphi_E = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \dot{x}^i}\right)\ddot{x}^k\right)\omega^i \wedge \omega^j + \frac{1}{2}\left(g_{ji} - g_{ij}\right)\omega^i \wedge \dot{\omega}^j. \tag{8}$$

Подходящие динамические формы соответствуют дифференциальным уравнениям второго порядка

$$g_{ij}(t, x^k, \dot{x}^k)\,\ddot{x}^j + A_i(t, x^k, \dot{x}^k) = 0. \tag{9}$$

3) Подходящие динамические формы такие, что φ_E в (6) $\pi_{2,0}$-горизонтальны. Это означает, что $g_{ij} = g_{ji}$, откуда

$$\alpha_E = A_i\omega^i \wedge dt + g_{ij}\omega^i \wedge d\dot{x}^j + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial A_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial A_j}{\partial \dot{x}^i}\right)\omega^i \wedge \omega^j + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \dot{x}^i}\right)\ddot{x}^k\right)\omega^i \wedge \omega^j.$$

4) *Полувариационные* динамические формы: лепажевы эквиваленты α_E проектируемы на J^1Y. Они записываются в виде

$$\alpha_E = A_i\omega^i \wedge dt + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial A_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial A_j}{\partial \dot{x}^i}\right)\omega^i \wedge \omega^j + g_{ij}\omega^i \wedge d\dot{x}^j$$

(т. е. $\alpha_E = \alpha_E^0$, $\varphi_E = 0$ в формуле для α_E). Можно показать, что полувариационная динамическая форма E канонически разлагается в сумму *вариационной* динамической формы E_g, порожденной лагранжианом $\tau = T dt$, единственным образом определяемым $g = (g_{ij})$ (обобщенная “кинетическая энергия”), и динамической формы первого порядка ϕ (“сила”) так, что уравнения путей (9) принимают вид

$$\frac{\partial T}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} = \phi_i.$$

5) *Локально вариационные* динамические формы: их лепажевы эквиваленты α_E замкнуты.

6) *Глобально вариационные* динамические формы: их лепажевы эквиваленты α_E точны.

Если задана *подходящая* динамическая форма $E \in \Lambda^2(J^2Y)$, то появляются следующие распределения [23], [24], [5]:

1) *динамическое распределение* ассоциировано с каждым продолжением α формы E и определено на $\operatorname{dom}\alpha$ следующим образом:

$$\Delta_\alpha = \operatorname{annih}\{i_\xi \alpha \mid \text{где } \xi \text{ пробегает все вертикальные векторные поля на } \operatorname{dom}\alpha\};$$

2) *характеристическое распределение* 2-формы α ассоциировано с каждым продолжением α формы E и определено на $\operatorname{dom}\alpha$ в виде

$$\chi_\alpha = \operatorname{annih}\{i_\xi \alpha \mid \xi \in \mathfrak{X}(\operatorname{dom}\alpha)\} = \operatorname{span}\{\zeta \in \mathfrak{X}(\operatorname{dom}\alpha) \mid i_\zeta \alpha = 0\};$$

3) *эволюционное распределение* $\mathcal{D}_E$ на J^1Y определено так:

$$\mathcal{D}_E : J^1Y \ni x \to (\Delta_\alpha \cap \mathcal{C}_{\pi_1})(x) \in T_x J^1 Y,$$

где α — локальное *проектируемое* продолжение формы E, определенное в окрестности x. Легко заметить, что это определение корректно, т. к. векторное пространство $(\Delta_\alpha \cap \mathcal{C}_{\pi_1})(x)$ не зависит от выбора α. Заметим, что $\operatorname{rank}\mathcal{D}_E \geq 1$, и этот ранг может быть непостоянным.

Если задано локальное проектируемое продолжение α формы E, эти распределения связаны следующим образом: $\mathcal{D}_E \subset \chi_\alpha \subset \Delta_\alpha$ на $\operatorname{dom}\alpha \subset J^1Y$ так, что χ_α и Δ_α выполняют роль локальных “огибающих распределений” для распределения $\mathcal{D}_E$. Продолжения путей подходящей динамической формы E (=решения уравнений (9)) совпадают с *интегральными сечениями эволюционного распределения* $\mathcal{D}_E$.

Следует также отметить, что для *любого* продолжения α формы E динамическое распределение Δ_α и характеристическое распределение χ_α имеют одни и те же *голономные* интегральные сечения, которые совпадают с продолжениями путей, определенных для формы E на $\operatorname{dom}\alpha$.

Это означает, в частности, что уравнения (9) имеют следующее эквивалентное бескоординатное описание: для *любого проектируемого* продолжения α формы E, пути формы E в $\operatorname{dom}\alpha$ являются

1) решениями уравнений

$$J^1\gamma^* i_\xi \alpha = 0 \quad \text{для любого } \pi_1\text{-вертикального векторного поля } \xi \text{ на } \operatorname{dom}\alpha,$$

2) голономными интегральными сечениями характеристических векторных полей 2-формы α, т. е. векторных полей ζ, являющихся решениями уравнения

$$i_\zeta \alpha = 0.$$

Отметим также, что уравнение $i_\zeta \alpha = 0$ может иметь решения ζ, которые не будут непрерывными и не будут полупульверизациями.

Проведенный выше анализ дифференциальных систем для уравнений (9) приводит к следующей *классификации* подходящих динамических форм относительно *свойств их путей* [23]: динамическую форму E называют

1) *регулярной*, если $\operatorname{rank}\mathcal{D}_E = 1$,

2) *слабо регулярной*, если распределение $\mathcal{D}_E$ слабо горизонтально и имеет локально постоянный ранг,

3) *не имеющей полупульверизационных связей*, если $\mathcal{D}_E$ слабо горизонтально,

4) *полурегулярной*, если Δ_{α_E} слабо горизонтально, имеет (локально) постоянный ранг и вполне интегрируемо.

Имея эту классификацию, можно эффективно изучать проблему Коши и развивать методы интегрирования обычных дифференциальных уравнений второго порядка. Для этого анализа можно использовать локальные продолжения динамических форм общего положения и лепажевы эквиваленты α_E, в особенности, если E вариационная или полувариационная. (Детали читатель может найти в работах [25], [23], [24], [4], и в обзоре [26], написанном авторами данной статьи.)

6. Регулярные динамические формы

В дальнейшем будем рассматривать регулярные *подходящие* динамические формы.

Теорема 6.1 ([7], [20]). *Пусть E — подходящая динамическая форма на J^2Y. Следующие условия эквивалентны:*

1) *E регулярна,*
2) *матрица $g := (g_{ij}) = \left(\frac{\partial E_i}{\partial \ddot{x}^j}\right)$ регулярна,*
3) *эволюционное распределение $\mathcal{D}_E$ локально натянуто на полупульверизации и имеет вид*
$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} - g^{ij} A_j \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}, \tag{10}$$
где $(g^{ij}) = g^{-1}$,
4) *уравнения путей формы E записываются в эквивалентной нормальной форме*
$$\ddot{x}^i = -g^{ij} A_j, \tag{11}$$
5) *каждое проектируемое продолжение α формы E имеет максимальный ранг (равный $2m$),*
6) *для любого проектируемого продолжения α формы E распределение $\mathcal{D}_E$ является характеристическим распределением формы α,*
7) *для любого проектируемого продолжения α формы E уравнение $i_\Gamma \alpha = 0$ с дополнительным условием $dt(\Gamma) = 1$ имеет единственное локальное решение Γ, имеющее вид (10).*

В силу данной теоремы назовем уравнения (11) *уравнениями путей формы E в контравариантной форме.*

Перейдем к изучению продолжений регулярных подходящих динамических форм.

Из предыдущих рассуждений следует, что с формой E связано семейство продолжений, определенных на открытых подмножествах в J^1Y. В расслоенных координатах они записываются как
$$\alpha = A_i \omega^i \wedge dt + g_{ij} \omega^i \wedge d\dot{x}^j + F_{ij} \omega^i \wedge \omega^j, \tag{12}$$
где F_{ij} — произвольные функции, являющиеся кососимметричными по индексам i, j. Положим
$$f^i = -g^{ij} A_j, \quad h^i_j = g^{ik} F_{kj} \quad \text{и} \quad \dot{\omega}^i_\Gamma = d\dot{x}^i - f^i dt, \quad \psi^i_{\mathrm{h}} = h^i_j \omega^j + \dot{\omega}^i_\Gamma.$$
Если задана форма α, то определены два базиса 1-форм на J^1Y, адаптированных к α: $(dt, \omega^i, \dot{\omega}^i_\Gamma)$, $(dt, \omega^i, \psi^i_{\mathrm{h}})$. В этих обозначениях *семейство локально проектируемых продолжений* (12) *формы E состоит из 2-форм $\alpha = g_{ij}\omega^i \wedge \dot{\omega}^j_\Gamma + F = g_{ij}\omega^i \wedge \psi^j_{\mathrm{h}}$, где F (соответственно* h) *произвольно.* Среди этих локальных 2-форм имеем одну, которая *канонически ассоциирована с полупульверизацией* Γ и записывается в виде
$$\Omega = g_{ij} \omega^i \wedge \psi^j, \tag{13}$$
где
$$\psi^i = \dot{\omega}^i_\Gamma - \frac{1}{2} \frac{\partial f^i}{\partial \dot{x}^j} \omega^j. \tag{14}$$
Для лепажева эквивалента α_E формы E согласно (6)–(8) получаем выражение $\alpha_E = \alpha^0_E + \varphi_E$, где
$$\alpha^0_E = \Omega - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \dot{x}^i} \right) f^k \omega^i \wedge \omega^j.$$

Заметим, что

$$\alpha_E = \Omega + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^j}(\ddot{x}^k - f^k)\omega^i \wedge \omega^j + \frac{1}{2}\Big(g_{ji} - g_{ij}\Big)\omega^i \wedge \dot{\omega}^j.$$

С помощью легкого вычисления получаем следующее предложение, объясняющее роль формы Ω в вариационной последовательности.

Предложение 6.1. *3-форма $p_2 d\Omega$ является ω^i-порожденной (т. е. является формой-источником) тогда и только тогда, когда g симметрична.*

Это предложение означает, что для *симметричной* g форма $p_2 d\Omega$ эквивалентна форме Гельмгольца $H_E = p_2 d\alpha$, т. е. компоненты $p_2 d\Omega$ соответствуют *условиям Гельмгольца* локальной вариационности E. 2-форма Ω важна для исследования обратной вариационной задачи для полупульверизаций. К этому вопросу вернемся в следующем разделе, где также будет показано (при дополнительном предположении, что основное расслоение π является расслоением над $\mathbb{R}$ и допускает глобальную тривиализацию, т. е. $Y = \mathbb{R} \times M$), что форма Ω оказывается *глобальной* на $J^1Y = \mathbb{R} \times TM$ (это значит, что разложение

$$\alpha_E = \Omega + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^j}(\ddot{x}^k - f^k)\omega^i \wedge \omega^j$$

инвариантно относительно замены расслоенных координат, адаптированных к структуре произведения на Y) и может быть получена с помощью красивой внутренней конструкции.

Заметим также, что если E *полувариационна*, то $\alpha_E = \Omega$, так что Ω глобальна на J^1Y и $p_2 d\Omega = H_E$. E *локально вариационна* тогда и только тогда, когда Ω замкнута и *глобально вариационна* тогда и только тогда, когда Ω точна.

Возвращаясь теперь к теореме 4.3, можем сформулировать вариант этой теоремы для *регулярных* динамических форм.

Теорема 6.2. *Пусть $E \in \Lambda^2(J^2Y)$ — регулярная динамическая форма. Следующие условия эквивалентны:*

1) *E локально вариационна,*
2) *существует единственная 2-форма $\alpha_E = \Omega$ такая, что*
   (i) *$d\Omega = 0$,*
   (ii) *$E = p_1\Omega$,*
   (iii) *Ω имеет максимальный ранг $2m$.*

Эволюционное распределение $\mathcal{D}_E = \mathrm{span}\{\Gamma\}$ формы E совпадает с характеристическим распределением формы Ω. Это означает, что $i_\Gamma \Omega = 0$, и $\mathrm{span}\{\Gamma\}$ — единственное решение данного уравнения.

Заметим, что если E вариационна, то $\Omega = d\theta_\lambda$.

7. Замкнутые формы, лепажевы формы и полупульверизации

Под *полупульверизационной связностью* (второго порядка) понимаем сечение $w : J^1Y \to J^2Y$. Горизонтальное распределение H_w полупульверизационной связности w локально натянуто на полупульверизации

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + f^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i},$$

где $f^i = \ddot{x}^i \circ w$ — компоненты w, или эквивалентным образом задается системой 1-форм

$$\omega^i, \quad \dot{\omega}^i_\Gamma = w^* \dot{\omega}^i = d\dot{x}^i - f^i dt.$$

Таким образом, приходим к базису $(dt, \omega^i, \dot{\omega}^i_\Gamma)$ 1-форм на J^1Y, адаптированному к полупульверизационной связности, который рассматривался в предыдущем разделе.

Для второго типа базисов, адаптированных к Γ, которые рассматривались в разделе 6, а именно (dt, ω^i, ψ^i) с ψ^i, заданными формулами (14), можно указать геометрическое построение при условии, что π — тривиальное расслоение над $\mathbb{R}$ (см. [8], [27]). Если задана полупульверизационная связность w и, значит, полупульверизация Γ на J^1Y, возникают локальные адаптированные дуальные базисы $\{\Gamma, H_i, V_j\}$ и $\{dt, \omega^i, \psi^j\}$, построенные внутренним образом. Рассмотрим расслоение 1-струй J^1Y над Y: $\pi_{1,0} : J^1Y \to Y$; в терминах тривиализации $Y = \mathbb{R} \times M$, слой этого векторного расслоения над (t, x) есть в точности T_xM. Тогда $\pi_{1,0}$-вертикальные вектора на J^1Y касательны к этим слоям, и подмодуль в $\mathfrak{X}(J^1Y)$, который они порождают, обозначим через $V(J^1Y)$. Локально имеем $V(J^1Y) = \mathrm{span}\{V_j := \frac{\partial}{\partial x^j}\}$.

Вертикальный эндоморфизм S — это единственное тензорное поле типа $(1, 1)$ на J^1Y со следующими свойствами:

1) S обращается в нуль на $\pi_{1,0}$-вертикальных векторах и полупульверизациях,

2) S вертикальнозначно как векторнозначная 1-форма,

3) $S(\frac{\partial}{\partial t}) = -\Delta$ — поле растяжений на слоях расслоения $\pi_{1,0} : J^1Y \to Y$.

В координатах имеем $S = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \otimes \omega^i$. Рассмотрим разложение в прямую сумму $\mathfrak{X}(J^1Y) = \mathrm{span}\{\Gamma\} \oplus V(J^1Y) \oplus H(J^1Y)$ с соответствующими проекторами $I_{J^1Y} = P_\Gamma + P^V + P^H$.

$H(J^1Y)$ называется Γ-*горизонтальным распределением*, и в координатах имеем

$$H(J^1Y) = \mathrm{span}\left\{H_i := \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial f^i}{\partial \dot{x}^j}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\right\}.$$

Таким образом, построен векторный базис, а сопряженный базис, состоящий из 1-форм, имеет вид $\{dt, \omega^i, \psi^j\}$, где

$$\psi^i := d\dot{x}^i - f^i dt - \frac{1}{2}\frac{\partial f^i}{\partial \dot{x}^j}\omega^j.$$

В этих базисах рассмотренные проекторы выражаются следующим образом: $P_\Gamma = \Gamma \otimes dt$, $P^H = H_i \otimes \omega^i$, $P^V = V_j \otimes \psi^j$.

Также имеются еще два важных внутренним образом определенных объекта: *эндоморфизм Якоби* $\Phi := P^V \circ \mathcal{L}_\Gamma P^H$ и *связность Масса–Пагани* (связность типа Бервальда) $\widehat{\nabla}$ (см. [27]–[29]). Эта связность определена требованием, что ковариантные дифференциалы $\widehat{\nabla} dt$, $\widehat{\nabla} S$ и $\widehat{\nabla}\Gamma$ обращаются в нуль и $V(J^1Y)$ плоско. В координатах имеем $\Phi = \Phi^i_j\ V_i \otimes \omega^j = (B^i_j - \Gamma^i_k\Gamma^k_j - \Gamma(\Gamma^i_j))V_i \otimes \omega^j$, где $B^i_j := -\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ и $\Gamma^i_j := -\frac{1}{2}\frac{\partial f^i}{\partial \dot{x}^j}$. Наиболее используемыми компонентами связности $\widehat{\nabla}$ являются следующие: $\widehat{\nabla}_\Gamma \Gamma = 0$, $\widehat{\nabla}_\Gamma H_j = \Gamma^i_j H_i$, $\widehat{\nabla}_\Gamma V_j = \Gamma^i_j V_i$.

Если задана полупульверизационная связность $w : J^1Y \to J^2Y$, то сечения расслоения π, удовлетворяющие $w \circ J^1\gamma = J^2\gamma$, называются *путями* или *геодезическими* связности w. Продолжения путей связности w совпадают с интегральными кривыми векторного поля Γ и являются решениями системы, состоящей из m обыкновенных дифференциальных уравнений, записанных в *нормальной форме*:

$$\ddot{x}^i = f^i(t, x^j, \dot{x}^j). \tag{15}$$

Полупульверизационные связности тесно связаны с *регулярными* динамическими формами.

Теорема 7.1 ([7]). *Если на J^2Y задана подходящая динамическая форма E, то на J^2Y существует единственная полупульверизационная связность $w : J^1Y \to J^2Y$ такая, что уравнения для путей формы E совпадают с геодезическими связности w. Связность w определена следующим образом: $w^*E = 0$. В расслоенных координатах, где $E = (A_i + g_{ij}\ddot{x}^j)\omega^i \wedge dt$, компоненты связности w принимают вид $f^i = -g^{ij}A_j$, где $g^{-1} = (g^{ij})$ — обратная матрица к g.*

Наоборот, если задана полупульверизационная связность $w : J^1Y \to J^2Y$, то существует семейство подходящих динамических форм такое, что геодезические w совпадают с путями любой динамической формы семейства. Каждая из этих динамических форм, связанных с w, задается как решение уравнения $w^*E = 0$. В расслоенных координатах, где w имеет компоненты f^i, компоненты динамических форм принимают вид $E_i = g_{ij}(\ddot{x}^j - f^j)$, где $g = (g_{ij})$ — произвольная регулярная матрица.

Если w и E связаны между собой вышеописанным образом, то горизонтальное распределение связности w есть эволюционное распределение $\mathcal{D}_E$, т. е.

$$\mathcal{D}_E = H_w = \mathrm{span}\{\Gamma\}, \quad \Gamma = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} - g^{ij} A_j \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}.$$

Теперь можно сформулировать так называемую *проблему множителей* Дугласа [30].

Рассмотрим m обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме (15) и будем искать регулярный множитель g_{ij} со свойством, что динамическая форма $E := (g_{ij}\ddot{x}^j - g_{ij}f^j)\omega^i \wedge dt$ является локально вариационной. Теорема 6.2 дает необходимые и достаточные условия на f^i для того, чтобы E удовлетворяла условию локальной вариационности. Согласно (13) эти условия заключаются в том, что *форма $\Omega = g_{ij}\omega^i \wedge \psi^j$ должна быть замкнута и иметь максимальный ранг $2m$.*

Перед тем как подробно исследовать условие замкнутости, сформулируем теорему, которая дает альтернативный набор необходимых и достаточных условий в этом случае.

Теорема 7.2 ([8]). *Если задана система* (15) *и соответствующая полупульверизация Γ, то необходимыми и достаточными условиями существования локально вариационной динамической формы E, эволюционное распределение которой натянуто на Γ, является существование $\Omega \in \Lambda^2(J^1Y)$ такой, что*

1) Ω *имеет максимальный ранг,*
2) $\Omega(\xi_1, \xi_2) = 0$ *для всех $\pi_{1,0}$-вертикальных $\xi_1,\ \xi_2$,*
3) $\mathcal{L}_\Gamma \Omega = 0$,
4) $i_H d\Omega(\xi_1, \xi_2) = 0$ *для всех Γ-горизонтальных H и $\pi_{1,0}$-вертикальных $\xi_1,\ \xi_2$.*

Эта теорема представляет минимальный набор условий на 2-форму Ω, но в конечном счете она предъявляет требование, чтобы форма $\Omega = g_{ij}\omega^i \wedge \psi^j$ была замкнута и имела максимальный ранг $2m$ для некоторых g_{ij}. Было бы более приятно иметь дело с множителем g, построенным непосредственно внутренним способом; это может быть сделано с помощью *конструкции келерова лифта*, которую опишем ниже.

Введем вначале векторные поля и формы *вдоль проекции* $\pi_{1,0} : J^1Y \to Y$. Следуем [27], [31], [32], [12], [33]. Векторные поля вдоль $\pi_{1,0}$ являются сечениями обратного образа расслоения ${\pi_{1,0}}^*(TY)$ над J^1Y. Через $\mathfrak{X}(\pi_{1,0})$ обозначим $C^\infty(J^1Y)$-модуль таких векторных полей. Аналогично, через $\Lambda(\pi_{1,0})$ обозначим градуированную алгебру скалярнозначных форм вдоль $\pi_{1,0}$, а через $V(\pi_{1,0})$ — $\Lambda(\pi_{1,0})$-модуль векторнозначных форм вдоль $\pi_{1,0}$. *Базисные векторные поля и* 1*-формы* вдоль $\pi_{1,0}$ — элементы из $\mathfrak{X}(Y)$ и $\mathfrak{X}^*(Y)$, отождествленные соответственно с векторными полями и формами вдоль $\pi_{1,0}$ с помощью взятия композиции с $\pi_{1,0}$. Согласно этому отождествлению тензорные поля вдоль проекции могут быть выражены как тензорные произведения базовых векторных полей и 1-форм с коэффициентами в $C^\infty(J^1Y)$. Каноническое векторное поле вдоль $\pi_{1,0}$ есть

$$\mathbf{T} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Естественные базисы для $\mathfrak{X}(\pi_{1,0})$ и $\mathfrak{X}^*(\pi_{1,0})$ тогда будут иметь вид $\{\mathbf{T}, \frac{\partial}{\partial x^i}\}$ и $\{dt, \omega^i\}$. Множество классов эквивалентности векторных полей вдоль $\pi_{1,0}$ по модулю $\mathbf{T}$ обозначим через $\overline{\mathfrak{X}(\pi_{1,0})}$ так, что $\overline{\xi} \in \overline{\mathfrak{X}(\pi_{1,0})}$ удовлетворяет условию $dt(\overline{\xi}) = 0$. Тогда очевидная биекция между $\overline{\mathfrak{X}(\pi_{1,0})}$ и $V(J^1Y)$ задает *вертикальный лифт* из $\mathfrak{X}(\pi_{1,0})$ в $V(J^1Y)$, который в координатах выглядит следующим образом: $\xi^V = \overline{\xi}^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} = (\xi^i - \dot{x}^i \xi^0)\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$, где $\xi = \xi^0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Горизонтальный лифт ξ^H векторного поля $\xi \in \mathfrak{X}(\pi_{1,0})$ задается в виде $\xi^H = \overline{\xi}^i H_i$. Наконец, можно построить *лифт вдоль* Γ с помощью $\xi^\Gamma := dt(\xi)\Gamma$ для любой $\xi \in \mathfrak{X}(\pi_{1,0})$ (так, что $\mathbf{T}^\Gamma = \Gamma$). Тогда любое векторное поле $\zeta \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times TM)$ может быть разложено следующим образом:

$$\zeta = (\zeta_\Gamma)^\Gamma + (\zeta_H)^H + (\zeta_V)^V$$

для единственных $\zeta_\Gamma \in \operatorname{span}\{\mathbf{T}\}$, $\zeta_H \in \mathfrak{X}(\pi_{1,0})$, где $\zeta_H(t) = \zeta(t)$, и $\zeta_V \in \overline{\mathfrak{X}(\pi_{1,0})}$. Ради этого разложения и были построены лифты. В координатах имеем

$$\begin{aligned}
\zeta_\Gamma &= dt(\zeta)\mathbf{T},\\
\zeta_H &= dt(\zeta)\frac{\partial}{\partial t} + dx^i(\zeta)\frac{\partial}{\partial x^i} = dt(\zeta)\mathbf{T} + \omega^i(\zeta)\frac{\partial}{\partial x^i},\\
\zeta_V &= \psi^i(\zeta)\frac{\partial}{\partial x^i}.
\end{aligned}$$

Теперь приведем выражения скобок Ли в бескоординатном виде

$$[\Gamma, \xi^V] = \widehat{\nabla}_\Gamma \xi^V - \xi^H, \quad [\Gamma, \xi^H] = \widehat{\nabla}_\Gamma \xi^H + \Phi(\xi)^V.$$

2-форма Ω на J^1Y, описанная в теореме 7.2, полностью определяется симметрическим невырожденным тензором типа $(0,2)$ вдоль $\pi_{1,0}$ вида $g = g_{ij}\omega^i \otimes \omega^j$ (т. е. g обращается в нуль на $\mathbf{T}$) (см. [34], [35]). Более точно, Ω — так называемый *келеров лифт тензора* g, $\Omega = g^K$, который обращается в нуль на Γ и удовлетворяет условиям $g^K(\xi^V, \zeta^V) = g^K(\xi, \zeta) = 0$, $g^K(\xi^V, \zeta) = g(\xi, \zeta)$. В этой формулировке условия, эквивалентные соответствующим условиям теорем 6.2 и 7.2, имеют следующий вид:

$$\nabla g = 0, \quad g(\Phi\xi, \zeta) = g(\xi, \Phi\zeta), \quad \widehat{D}_{\xi^V} g(\zeta, \eta) = \widehat{D}_{\zeta^V} g(\xi, \eta), \tag{16}$$

где $\widehat{D}$ — ковариантная производная вдоль $\pi_{1,0}$, определенная в виде $\widehat{\nabla}_\zeta \xi = (\widehat{D}_\zeta \xi_\Gamma)^\Gamma + (\widehat{D}_\zeta \xi_H)^H + (\widehat{D}_\zeta \xi_V)^V$ для всех $\zeta, \xi \in \mathfrak{X}(J^1Y)$.

Хотя и существует определенная изящная экономность в этом представлении множителя g и условия локальной вариационности, оно имеет и некоторые недостатки. Например, в этом представлении нельзя применить внешнее исчисление, поэтому приходится использовать некий гибридный вариант (заинтересованного читателя отошлем к недавней диссертации Олдриджа [36], в которой строится внутренняя версия уравнения (16) на J^1Y с использованием связности Массы–Пагани). Поэтому закончим данную работу изучением концептуально более простого условия $dg^K = 0$, которое наряду с условием максимальности ранга является необходимым и достаточным для того, чтобы динамическая форма $E := (g_{ij}\ddot{x}^j - g_{ij}f^j)\omega^i \wedge dt$ была локально вариационной.

Положим $\Omega := g_{ij}\psi^i \wedge \omega^j$ (такой порядок индексов традиционен) и подсчитаем $d\Omega$:

$$\begin{aligned}
d\Omega = {} & (\Gamma(g_{ij}) - g_{kj}\Gamma^k_i - g_{ik}\Gamma^k_j) dt \wedge \psi^i \wedge \omega^j + (H_l(g_{ij}) - g_{kj}V_i(\Gamma^k_l))\psi^i \wedge \omega^j \wedge \omega^l + \\
& + V_k(g_{ij})\psi^k \wedge \psi^i \wedge \omega^j + g_{ij}\psi^i \wedge \psi^j \wedge dt + g_{ki}\Phi^k_j \omega^i \wedge \omega^j \wedge dt + g_{ki}H_j(\Gamma^k_l)\omega^i \wedge \omega^j \wedge \omega^l.
\end{aligned}$$

Это дает четыре условия Гельмгольца для решения проблемы Дугласа в форме, первоначально данной Сарлетом в [37]:

$$\begin{aligned}
d\Omega(\Gamma, V_i, V_j) = 0, &\quad d\Omega(\Gamma, V_i, H_j) = 0,\\
d\Omega(\Gamma, H_i, H_j) = 0, &\quad d\Omega(H_i, V_j, V_k) = 0.
\end{aligned}$$

Остальные условия, возникающие из равенства $d\Omega = 0$, а именно

$$d\Omega(H_i, H_j, V_k) = 0 \quad \text{и} \quad d\Omega(H_i, H_j, H_k) = 0,$$

как можно показать, выводятся из первых четырех. Действительно, они появляются в 3-контактной части $d\Omega$, однако, как было показано в разделе 6, необходимые достаточные условия локальной вариационности являются результатом требования, чтобы $p_2 d\Omega = 0$. Отметим, что на условиях Гельмгольца основано важное направление исследований обратной задачи вариационного исчисления; заинтересованного читателя отошлем к недавнему обзору авторов [26].

Первый автор благодарит за поддержку Чешский Научный Фонд, грант GACR 201/06/0922, и Министерство по делам образования, молодежи и спорта, грант MSM 6198959214. Второй автор благодарит сотрудников отдела алгебры и геометрии Палацкого университета г. Оломоуц за гостеприимство и поддержку.

Литература

1. Krupka D. *Variational sequences on finite order jet spaces*, in: *Proc. Conf., Brno* (*Czechoslovakia*) 1989, J. Janyška and D. Krupka, eds., World Scientific, Singapore, 1990. – P. 236–254.
2. Krupka D. *Variational sequences in mechanics* // Calc. Var. – 1997. – V. 5. – P. 557–583.
3. Krupková O. *Lepagean 2-forms in higher order Hamiltonian mechanics*, I. *Regularity* // Arch. Math. (Brno). – 1986. – V. 22. – P. 97–120.
4. Krupková O. *The geometry of ordinary variational equations.* – Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, 1997. – V. 1678.
5. Krupková O. *Differential systems in higher-order mechanics*, in: *Proceedings of the Seminar on Differential Geometry*, D. Krupka, ed., Mathematical Publications 2, Silesian University, Opava, 2000. – P. 87–130.
6. Krupková O. *The geometry of variational equations*, in: *Global analysis and applied mathematics*, AIP Conference Proceedings **729**, American Institute of Physics, 2004. – P. 19–38.
7. Krupková O. *Lepagean 2-forms in higher order Hamiltonian mechanics*, II. *Inverse problem* // Arch. Math. (Brno). – 1987. – V. 23. – P. 155–170.
8. Crampin M., Prince G.E., Thompson G. *A geometric version of the Helmholtz conditions in time dependent Lagrangian dynamics* // J. Phys. A: Math. Gen. – 1984. – V. 17. – P. 1437–1447.
9. Krupka D. *Some geometric aspects of variational problems in fibered manifolds* // Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Purk. Brunensis, Physica **14**, Brno, Czechoslovakia, 1973. – 65 p.; ArXiv:math-ph/0110005.
10. Krupka D. *Lepagean forms in higher order variational theory*, in: *Modern Developmens in Analytical Mechanics* I: *Geometrical Dynamics*, Proc. IUTAM-ISIMM Symposium, Torino, Italy, 1982, Accad. Sci. Torino; Torino, 1983. – P. 197–238.
11. Krupka D. *Global variational theory in fibred spaces*, in: *Handbook of Global Analysis,* Elsevier, 2007. – P. 755–839.
12. Saunders D.J. *The Geometry of Jet Bundles.* – Cambridge University Press, Cambridge, 1989. – 293 p.
13. Takens F. *A global version of the inverse problem of the calculus of variations* // J. Diff. Geom. – 1979. – V. 14. – P. 543–562.
14. Anderson I. *Aspects of the inverse problem to the calculus of variations* // Arch. Math. (Brno). – 1988. – V. 24. – P. 181–202.
15. Anderson I. *The variational bicomplex* // Utah State University, Technical Report, 1989.
16. Krbek M., Musilová J. *Representation of the variational sequence* // Rep. Math. Phys. – 2003. – V. 51. – P. 251–258.
17. Krupka D., Šeděnková J. *Variational sequences and Lepagean forms*, in: *Differential Geometry and its Applications*, Proc. Conf., Prague, 2004, J. Bureš, O. Kowalski, D. Krupka, J. Slovák, eds., Charles Univ., Prague, Czech Republic, 2005. – P. 605–615.
18. Krupka D. *Global variational principles: Foundations and current problems*, in: *Global Analysis and Applied Mathematics*, AIP Conference Proceedings 729, American Institute of Physics 2004. – P. 3–18.
19. Helmholtz H. *Über der physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung* // J. Reine Angew. Math. – 1887. – Bd. 100. – S. 137–166.
20. Krupková O. *Mechanical systems with non-holonomic constraints* // J. Math. Phys. – 1997. – V. 38. – P. 5098–5126.

21. Klapka L. *Euler–Lagrange expressions and closed two-forms in higher order mechanics* in: *Geometrical Methods in Physics*, Proc. Conf. on Diff. Geom. and Appl. V. 2, Nové Město na Moravě, Sept. 1983, D. Krupka, ed., J. E. Purkyně Univ. Brno, Czechoslovakia, 1984. – P. 149–153.
22. Štěpánková O. *The inverse problem of the calculus of variations in mechanics*: Thesis, Charles University, Prague, 1984. – 63 p. (in Czech).
23. Krupková O. *A geometric setting for higher-order Dirac–Bergmann theory of constraints* // J. Math. Phys. – 1994. – V. 35. – P. 6557–6576.
24. Krupková O. *Higher-order constrained systems on fibered manifolds: An exterior differential systems approach*, in: *New Developments in Differential Geometry*, Proc. Colloq. on Diff. Geom., Debrecen, 1994, L. Tamássy and J. Szenthe, eds., Kluwer, Dordrecht, 1996. – P. 255–278.
25. Krupková O. *Variational analysis on fibered manifolds over one-dimensional bases*: Ph. D. Thesis, Silesian University, Opava et Charles University, Prague, 1992, 67 p.
26. Krupková O., Prince G. *Second order ordinary differential equations in jet bundles and the inverse problem of the calculus of variations*, in: *Handbook on Global Analysis*, Elsevier, 2007. – P. 841–908.
27. Jerie M., Prince G.E. *Jacobi fields and linear connections for arbitrary second order ODE's* // J. Geom. Phys. – 2002. – V. 43. – P. 351–370.
28. Massa E., Pagani E. *Jet bundle geometry, dynamical connections, and the inverse problem of Lagrangian mechanics* // Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Theor. – 1994. – V. 61. – P. 17–62.
29. Mestdag T., Sarlet W. *The Berwald-type connection associated to time-dependent second-order differential equations* // Houston J. Math. – 2001. – V. 27. – P. 763–797.
30. Douglas J. *Solution of the inverse problem of the calculus of variations* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1941. – V. 50. – P. 71–128.
31. Martínez E., Cariñena J.F., Sarlet W. *Derivations of differential forms along the tangent bundle projection* // Diff. Geom. Appl. – 1992. – V. 2. – P. 17–43.
32. Martínez E., Cariñena J.F., Sarlet W. *Derivations of differential forms along the tangent bundle projection* II // Diff. Geom. Appl. – 1993. – V. 3. – P. 1–29.
33. Sarlet W., Vandecasteele A., Cantrijn F., Martínez E. *Derivations of forms along a map: the framework for time-dependent second-order equations* // Diff. Geom. Appl. – 1995. – V. 5. – P. 171–203.
34. Crampin M., Sarlet W., Martínez E., Byrnes G.B., Prince G.E. *Toward a geometrical understanding of Douglas's solution of the inverse problem in the calculus of variations* // Inverse Problems. – 1994. – V. 10. – P. 245–260.
35. Sarlet W., Thompson G., Prince G.E. *The inverse problem of the calculus of variations: the use of geometrical calculus in Douglas's analysis* // Trans. Amer. Math. Soc. – 2002. – V. 354. – P. 2897–2919.
36. Aldridge J.E. *Aspects of the inverse problem in the calculus of variations*: Ph. D. Thesis, La Trobe University, Australia, 2003.
37. Sarlet W. *The Helmholtz conditions revisited. A new approach to the inverse problem of Lagrangian dynamics* // J. Phys. A: Math. Gen. – 1982. – V. 15. – P. 1503–1517.

Университет им. Ла Троба
(*г. Бандора, Австралия*)

Палацкий университет
(*г. Оломоуц, Чешская республика*)

Поступила
20.04.2007