ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 10 (497)

УДК 514.752

А.В. ЛОБОДА, А.С. ХОДАРЕВ

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ АФФИННО-ОДНОРОДНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ 3-МЕРНОГО КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТРАНСТВА

Введение

Во многих разделах современной математики возникают задачи, связанные с описанием многообразий, однородных относительно действий различных групп преобразований. Простейшей из таких задач можно считать описание плоских кривых, однородных относительно аффинных преобразований плоскости. Решение этой задачи, а также список аффинно-однородных пространственных кривых давно известны [1]. При этом полный список аффинно-однородных поверхностей трехмерного вещественного пространства был получен лишь недавно в [2].

В аналогичной проблеме описания вещественных гиперповерхностей комплексных пространств, являющихся орбитами тех или иных групп преобразований (аффинных, голоморфных, дробно-линейных), пока получены лишь некоторые частные решения [3]–[5].

В соответствии с серией работ [4]–[11] задачу описания однородных подмногообразий различных пространств удобно решать, используя канонические (нормальные) уравнения таких многообразий. Например, уравнение вещественно-аналитической гиперповерхности M пространства $\mathbb{C}^3$, строго псевдо-выпуклой в некоторой своей точке, можно привести комплексными линейными преобразованиями к виду

$$v = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + (\alpha_1 z_1^2 + \alpha_2 z_2^2) + \overline{(\alpha_1 z_1^2 + \alpha_2 z_2^2)} + \sum_{k\geq 3} F_k(z, \overline{z}, u). \tag{1}$$

Здесь z_1, z_2, w — координаты в 3-мерном комплексном пространстве, $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$; F_k — однородный многочлен суммарной степени k по z, $\overline{z}$; α_1 и α_2 — вещественные неотрицательные числа.

Опираясь на уравнения вида (1), мы изучаем аффинную однородность вещественных гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{C}^3$.

Везде ниже будем рассматривать только жесткие поверхности, уравнения (1) для которых свободны от вещественной переменной $u = \operatorname{Re} w$. К аффинно-однородным поверхностям такого типа относятся, например, трубчатые поверхности (трубки) вида

$$M = \Gamma + i\mathbb{R}^3$$

с однородными относительно вещественных аффинных преобразований основаниями $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. При этом для всех трубок, как нетрудно убедиться, коэффициенты α_1, α_2 равны $1/2$.

Отметим, что за счет несложных возмущений трубчатых многообразий можно построить большое семейство аффинно-однородных поверхностей, в нормальном уравнении (1) для которых лишь один из двух коэффициентов α_1, α_2 равен $1/2$.

Работа выполнена при поддержке программы Министерства образования Российской Федерации "Университеты России — фундаментальные исследования" (проект № 04-01-41) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01-01-00594).

В данной статье рассматривается случай $\alpha_2 = 0 < \alpha_1 \neq 1/2$ и изучаются аффинно-однородные поверхности с дискретными группами изотропии. С учетом описания [11] групп, включающих дискретные группы, получаем явный полный список аффинно-однородных поверхностей с представлениями вида

$$v = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + \alpha(z_1^2 + \overline{z}_1^2) + \sum_{k\geq 3} F_k(z,\overline{z}), \quad \alpha \neq 1/2. \tag{2}$$

1. Алгебры векторных полей на однородных поверхностях

Рассмотрим вещественно-аналитическую гиперповерхность $M \in \mathbb{C}^3$, заданную вблизи начала координат уравнением

$$\Phi(z,\overline{z}) = -v + F(z,\overline{z}) = -v + (|z_1|^2 + |z_2|^2) + \alpha(z_1^2 + \overline{z}_1^2) + \sum_{k\geq 3} F_k(z,\overline{z}) = 0.$$

Аффинная однородность M понимается как существование в группе $\mathrm{Aff}\,(3,\mathbb{C})$ аффинных преобразований 3-мерного комплексного пространства некоторой (локальной) подгруппы Ли $G(M)$, транзитивно действующей на поверхности M.

От группы Ли переходим к инфинитезимальным преобразованиям поверхности, рассматриваемой вблизи начала координат. В современной терминологии это означает рассмотрение алгебры векторных полей (касательных к многообразию), соответствующей группе $G(M)$. Из однородности поверхности M вытекает наличие большой (как минимум 5-мерной) алгебры таких полей на M.

В силу линейного характера используемых аффинных преобразований соответствующие векторные поля также являются линейными. Каждое из них можно представить в виде

$$Z = (A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 w + p_1)\partial_{z_1} + (B_1 z_1 + B_2 z_2 + B_3 w + p_2)\partial_{z_2} + \\ + (C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 w + q)\partial_w, \tag{3}$$

где A_k, B_k, C_k, p_1, p_2, q — комплексные константы.

Имея линейное векторное поле на однородной вещественной поверхности, можно рассмотреть тождество

$$\mathrm{Re}\{Z(\Phi)\}_{|M} \equiv 0, \tag{4}$$

означающее факт касания этим полем поверхности M.

Определяя вес монома $z_1^k z_2^l \overline{z}_1^s \overline{z}_2^t u^m$ как сумму $k+l+s+t+2m$, рассмотрим компоненты весов 0, 1, 2, 3 тождества (4). Соответствующие уравнения имеют вид

$$\text{вес } 0 : \quad \mathrm{Re}\{q\tfrac{i}{2}\} \equiv 0, \tag{5}$$

$$\text{вес } 1 : \quad \mathrm{Re}\{p_1(\overline{z}_1 + 2\alpha z_1) + p_2\overline{z}_2 + (C_1 z_1 + C_2 z_2)\tfrac{i}{2}\} \equiv 0, \tag{6}$$

$$\text{вес } 2 : \quad \mathrm{Re}\{(A_1 z_1 + A_2 z_2)(F_2)_{z_1} + p_1 (F_3)_{z_1} + \\ + (B_1 z_1 + B_2 z_2)(F_2)_{z_2} + p_2(F_3)_{z_2} + C_3(u + iF_2)\tfrac{i}{2}\} \equiv 0, \tag{7}$$

$$\text{вес } 3 : \quad \mathrm{Re}\{(A_1 z_1 + A_2 z_2)(F_3)_{z_1} + A_3(u + iF_2)(F_2)_{z_1} + p_1(F_4)_{z_1} + \\ + (B_1 z_1 + B_2 z_2)(F_3)_{z_2} + B_3(u + iF_2)(F_2)_{z_2} + p_2(F_4)_{z_2} + \\ + (-C_3/2)F_3\} \equiv 0. \tag{8}$$

Из самого простого тождества (5) сразу следует, что $q \in \mathbb{R}$, а из (6) выводятся два равенства:

$$C_1 = 2i(\overline{p}_1 + 2\alpha_1 p_1), \quad C_2 = 2i\overline{p}_2.$$

Для получения более точной информации об однородных поверхностях естественно использовать алгебраическую структуру множества линейных векторных полей вида (3), касательных к изучаемой поверхности. Запишем всякое такое поле в виде квадратной матрицы 4-го порядка

$$Z = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & p_1 \\ B_1 & B_2 & B_3 & p_2 \\ C_1 & C_2 & C_3 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

обозначив ее той же буквой Z, что и само поле. Тогда множество матриц, соответствующих линейным полям на аффинно-однородной поверхности M, образует алгебру Ли относительно обычной матричной скобки

$$[Z_1, Z_2] = Z_1 Z_2 - Z_2 Z_1.$$

Исходя из этих соображений с учетом изучения компонент второго и третьего веса основного тождества (4), приходим к следующему результату.

Теорема 1. *Алгебра векторных полей на однородной поверхности вида* (2) *имеет одно из пяти нижеследующих матричных представлений*:

$$\mathfrak{g}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\xi_1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & \frac{1}{2}\xi_1 + i\xi_2 & 0 & p_2 \\ 2i(\overline{p}_1 + 2\alpha p_1) & 2i\overline{p}_2 & \xi_1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $0 < \alpha \neq 1/2$;

$$\mathfrak{g}_2 = \begin{pmatrix} (\frac{1}{\alpha}\overline{s} - 2s)p_1 & -\frac{1}{\alpha}s\overline{p}_2 & 0 & p_1 \\ (\frac{1}{\alpha}\overline{s} - 2s)p_2 & B_2 & 0 & p_2 \\ 2i(\overline{p}_1 + 2\alpha p_1) & 2i\overline{p}_2 & \frac{1}{\alpha}(\overline{s}p_1 + s\overline{p}_1) & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $0 < \alpha \neq 1/2,\ s \in \mathbb{R}$ *или* $s \in i\mathbb{R},\ B_2 = (\frac{1}{2\alpha}\overline{s} - s)p_1 + (\frac{1}{2\alpha}s - \overline{s})\overline{p}_1 + i\xi_2$;

$$\mathfrak{g}_3 = \begin{pmatrix} (\frac{1}{\alpha}\overline{s} - 2s)p_1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & \frac{1}{2\alpha}(\overline{s}p_1 + s\overline{p}_1) + i\xi_2 & 0 & p_2 \\ 2i(\overline{p}_1 + 2\alpha p_1) & 2i\overline{p}_2 & \frac{1}{\alpha}(\overline{s}p_1 + s\overline{p}_1) & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $0 < \alpha \neq 1/2,\ s \in \mathbb{C}$;

$$\mathfrak{g}_4 = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2\alpha} - 2)\beta p_1 - \frac{\beta}{2\alpha}\overline{p}_1 + \frac{1}{\alpha}p_2 & \frac{1}{\alpha}p_1 & 0 & p_1 \\ -2p_1 - \frac{1}{\alpha}\overline{p}_1 & \frac{1}{\alpha}p_2 & 0 & p_2 \\ 2i(\overline{p}_1 + 2\alpha p_1) & 2i\overline{p}_2 & \frac{1}{\alpha}(p_2 + \overline{p}_2) & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $\beta \in \mathbb{R}_+,\ \beta^2(2\alpha - 1) = 4$;

$$\mathfrak{g}_5 = \begin{pmatrix} A_1 & \frac{1}{\alpha}(p_1 + \beta\overline{p}_2) & 0 & p_1 \\ (-2p_1 - \frac{1}{\alpha}\overline{p}_1) + (2 - \frac{1}{\alpha})\beta p_2 & B_2 & 0 & p_2 \\ 2i(\overline{p}_1 + 2\alpha p_1) & 2i\overline{p}_2 & C_3 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $\beta \in \mathbb{R}_+$, $\beta^2(2\alpha - 1) = 1$;

$$\begin{aligned}
A_1 =& - \left(2 + \frac{1}{\alpha}\right)\beta p_1 - \frac{2\beta}{\alpha}\overline{p}_1 + \frac{1}{\alpha}(2p_2 + \overline{p}_2),\\
B_2 =& \left(2 - \frac{2}{\alpha}\right)\beta p_1 - \frac{1}{\alpha}\beta\overline{p}_1 + \frac{1}{\alpha}p_2 + \frac{2}{\alpha}\overline{p}_2,\\
C_3 =& \frac{3}{\alpha}(-\beta(p_1 + \overline{p}_1) + p_2 + \overline{p}_2).
\end{aligned}$$

Замечание. Во всех алгебрах (9)–(13) имеются свободные параметры p_1, p_2, q, которые отвечают за сдвиг вдоль поверхности. Две последние алгебры из нашего списка содержат только эти параметры и являются 5-мерными. Алгебра (9) является 7-мерной и содержит, кроме набора $p, \overline{p}$, q, еще два вещественных параметра ξ_1, ξ_2. Формулы (10), (11) содержат по 6 вещественных параметров.

При доказательстве теоремы 1 естественно выделить следующий относительно простой случай.

Предложение 1. *Если в уравнении* (2) *однородной поверхности* M *многочлен* $F_3(z, \overline{z})$ *тождественно равен нулю, то* M *есть квадрика*

$$v = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + \alpha_1(z_1^2 + \overline{z}_1^2),$$

а алгебра векторных полей на ней имеет вид (9).

В остальных случаях при изучении равенств (7), (8) приходится подробно рассматривать многочлены F_3 и F_4. Например, пусть ненулевой многочлен F_3 имеет разложение

$$F_3 = F_{30} + F_{21} + F_{12} + F_{03},$$

где

$$\begin{aligned}
F_{30} =& h_{30}z_1^3 + h_{21}z_1^2 z_2 + h_{12}z_1 z_2^2 + h_{03}z_2^3,\\
F_{21} =& (g_{20}z_1^2 + g_{11}z_1 z_2 + g_{02}z_2^2)\overline{z}_1 + (f_{20}z_1^2 + f_{11}z_1 z_2 + f_{02}z_2^2)\overline{z}_2.
\end{aligned}$$

Из вещественности функции F_3 следует, что F_{12} и F_{03} комплексно сопряжены многочленам F_{21} и F_{30} соответственно. Тогда весь многочлен F_3 определяется десятью коэффициентами: h_{30}, h_{21}, h_{12}, h_{03}, g_{20}, g_{11}, g_{02}, f_{20}, f_{11}, f_{02}.

Из тождества веса 2 выводятся равенства

$$h_{12} = h_{03} = g_{02} = f_{02} = 0, \quad h_{30} = \frac{1}{3}(4\alpha g_{20} - \overline{g}_{20}), \quad h_{21} = 2\alpha g_{11} - \overline{f}_{20}$$

и доказывается, что все коэффициенты поля Z на M выражаются линейно через p, $\overline{p}$, q и еще два параметра, аналогичных ξ_1, ξ_2 из (9). Но при $F_3(z, \overline{z}) \neq 0$ эти параметры не могут быть одновременно свободными. В тождестве (8) веса 3 либо один из них, либо оба выражаются через набор p, $\overline{p}$, q.

В дальнейших обсуждениях важную роль играет набор коэффициентов (h_{21}, g_{11}, f_{20}). При этом оказывается справедливым

Предложение 2. *Для всех однородных поверхностей вида* (2) *выполняется равенство*

$$g_{11} = 0.$$

Если коэффициент f_{20} не равен нулю, то растяжением переменных z_1, z_2 его можно превратить в единицу. Поэтому изучим случаи $f_{20} = 0$ и $f_{20} = 1$.

Предложение 3. *Если* $f_{20} = 0$ *для однородной поверхности* (2), *то* $f_{11}(f_{11} - 2g_{20}) = 0$. *При этом равенства* $f_{20} = 0$, $f_{11} = 0$ *дают матричное представление поля* Z *в виде* (10), *а при* $f_{20} = 0$, $f_{11} \neq 0$ *все поля на* M *имеют представление* (11).

Вычисление коммутатора $[Z_1, Z_2] = Z_1 Z_2 - Z_2 Z_1$ двух матриц вида (10) или (11) показывает, что множества матриц такого вида образуют 6-мерные алгебры.

Завершает доказательство теоремы 1

Предложение 4. *Если $f_{20} = 1$ для однородной поверхности* (2), *то*

$$f_{11}(f_{11} + 2g_{20}) = 0.$$

При этом равенства $f_{20} = 1$, $f_{11} = 0$ дают матричное представление поля Z в виде (12), *а при $f_{20} = 1$, $f_{11} \neq 0$ все поля на M имеют представление* (13).

Замечание. Несложные матричные алгебры можно проинтегрировать посредством вычисления матричных экспонент и переходом к соответствующим матричным группам Ли. Однородная поверхность является при этом орбитой какой-либо точки под действием получаемой группы. Такой подход реализован в работе [10]. Для рутинных вычислений в ней использован пакет MAPLE.

В нашей ситуации вычисление экспонент для относительно просто устроенных алгебр (10) и (11) дает семейства однородных поверхностей

$$(1+v)^t = |1+z_1|^2 \pm |z_2|^2, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\},$$

и

$$v = |z_2|^2 + ((1+z_1)^A \overline{(1+z_1)^A} - 1), \quad A \in \mathbb{C},$$

соответственно.

Более сложные алгебры (12) и (13) будем далее называть алгебрами типов (A) и (B) соответственно. Их интегрирование основано не на вычислении матричных экспонент, а на решении систем уравнений в частных производных.

Теорема 2. *Однородная поверхность M, имеющая алгебру линейных векторных полей типа* (A), *задается* (*с точностью до линейных преобразований*) *уравнением*

$$v = (|z_1|^2 - |z_2|^2)^\mu \cdot |z_1 + z_2|^{2(1-\mu)}, \quad \mu < 0.$$

Теорема 3. *Однородная поверхность M, имеющая алгебру линейных векторных полей типа* (B), *задается* (*с точностью до линейных преобразований*) *уравнением одного из двух видов*:

$$(B1): v = P_3(x, y) + E|P_2(x, y)|^{3/2}, \quad \alpha \neq 1,$$

или

$$(B2): v = \frac{P_4(x, y)}{1 - 2x_1}, \quad \alpha = 1.$$

Здесь константа E и многочлены $P_2(x, y)$, $P_3(x, y)$, $P_4(x, y)$ от переменных x_1, y_1, x_2, y_2 однозначно определяются значением параметра α.

Подробные доказательства теорем 2 и 3, а также точные выражения для E, $P_2(x, y)$, $P_3(x, y)$, $P_4(x, y)$ будут выписаны в следующих двух параграфах статьи. Здесь же сформулируем утверждение, вытекающее из них в качестве следствия.

Теорема 4. *Аффинно-однородная вещественная гиперповерхность M в $\mathbb{C}^3$, допускающая представление* (2), *аффинно эквивалентна одной из поверхностей следующего вида*:

$$
\begin{gathered}
v = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + \alpha(z_1^2 + \overline{z}_1^2),\\
v = |z_2|^2 + ((1+z_1)^A \overline{(1+z_1)^A} - 1), \quad A \in \mathbb{C},\\
(1+v)^t = |1+z_1|^2 \pm |z_2|^2, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,2\},\\
v = (|z_1|^2 - |z_2|^2)^{\mu} |z_1 + z_2|^{2(1-\mu)}, \quad \mu < 0,\\
v = P_3(x,y) + E|P_2(x,y)|^{3/2}, \quad \alpha \neq 1,\\
v = \frac{P_4(x,y)}{1-2x_1}, \quad \alpha = 1.
\end{gathered}
$$

2. Интегрирование алгебр типа (A)

Рассмотрим алгебру (A) линейных векторных полей в $\mathbb{C}^3$. Полагая набор параметров (p_1, p_2, q) равным $(1,0,0)$, $(i,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,i,0)$, $(0,0,1)$, получим пять базисных полей этой алгебры

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= \left(-2\beta z_1 + \frac{1}{\alpha} z_2 + 1\right) \partial_{z_1} - \frac{1+2\alpha}{\alpha} \partial_{z_2} + 2i(1+2\alpha) z_1 \partial_w,\\
Z_2 &= i\left(\frac{(1-2\alpha)\beta}{\alpha} z_1 + \frac{1}{\alpha} z_2 + 1\right) \partial_{z_1} + i\frac{1-2\alpha}{\alpha} z_1 \partial_{z_2} + 2(1-2\alpha) z_1 \partial_w,\\
Z_3 &= \frac{1}{\alpha} z_1 \partial_{z_1} + \left(\frac{1}{\alpha} z_2 + 1\right) \partial_{z_2} + 2(iz_2 + \frac{1}{\alpha} w)\partial_w,\\
Z_4 &= i\frac{1}{\alpha} z_1 \partial_{z_1} + i\left(\frac{1}{\alpha} z_2 + 1\right) \partial_{z_2} + 2z_2 \partial_w,\\
Z_5 &= \partial_w.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Для каждого из таких полей справедливо тождество (4), т. е.

$$
\operatorname{Re}(Z_k(\Phi))_{|M} \equiv 0,
$$

где $\Phi = \Phi(z, \overline{z}, u, v) = -v + F(z, \overline{z})$ — определяющая функция поверхности M.

Ясно, что для такой функции $\Phi_w = i/2$, а равенство (4) для поля Z_5 выполняется автоматически. Далее будем действовать только с четырьмя содержательными уравнениями (4), соответствующими полям Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 из (14).

Складывая эти равенства попарно первое со вторым, а третье с четвертым и используя очевидные тождества

$$
a = \operatorname{Re} a - i \operatorname{Re}(ia), \quad \overline{a} = \operatorname{Re} a + i \operatorname{Re}(ia),
$$

получим

Предложение 5. *Система четырех уравнений* $\operatorname{Re}(Z_k(\Phi))_{|M} = 0$ *для полей* Z_k, $k = \overline{1,4}$, *из* (14) *равносильна системе двух комплексных уравнений*

$$
z_1 F_{z_1} + (z_2 + \alpha) F_{z_2} = F + \alpha \overline{z}_2,
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1 F_{z_2} = \operatorname{Re}&\left(\frac{1}{1+2\alpha}(-2\alpha\beta z_1 + z_2 + \alpha) F_{z_1}\right) +\\
&+ i \operatorname{Re}\left(\frac{i}{1-2\alpha}((1-2\alpha)\beta z_1 + z_2 + \alpha) F_{z_1}\right) - \alpha z_1.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Для упрощения уравнений (15), (16) положим

$$
H = F + (\alpha z_2 + \alpha \overline{z}_2 + \alpha^2)
$$

и введем следующие обозначения:

$$\lambda_1 = \frac{\beta}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha\beta}{1+2\alpha}, \quad \lambda_3 = \frac{\beta}{2(1+2\alpha)},$$
$$l_1 = z_1 - \lambda_1(z_2+\alpha), \quad l_2 = z_1 - \lambda_2(z_2+\alpha), \quad l_3 = \lambda_3(z_2+\alpha).$$

Отметим здесь, что при любых α, β справедливо равенство $\lambda_3 = \lambda_1 - \lambda_2$, а в силу условия-связки $(2\alpha-1)\beta^2 = 4$, означающего, в частности, что $\alpha > 1/2$, справедливо и неравенство $\lambda_2 > \lambda_3$.

Учитывая также вещественность функций $F(z,\overline{z})$, $H(z,\overline{z})$ и вытекающее отсюда равенство

$$F_{\overline{z}_1} = \overline{F_{z_1}},$$

перепишем уравнения (15), (16) в виде системы

$$\begin{aligned} &z_1 H_{z_1} + (z_2+\alpha)H_{z_2} = H, \\ &z_1 H_{z_2} = (-(\lambda_1+\lambda_2)z_1 + \lambda_1\lambda_2(z_2+\alpha))H_{z_1} + \lambda_3\overline{(z_1 - \lambda_1 z_2)}H_{\overline{z}_1}. \end{aligned} \tag{17}$$

Домножим второе из полученных уравнений на $(z_2+\alpha)$ и результат вычтем из первого уравнения (17), умноженного на z_1. Так придем к системе

$$\begin{aligned} &z_1 H_{z_1} + (z_2+\alpha)H_{z_2} = H, \\ &l_1 l_2 H_{z_1} + l_3 \overline{l}_1 H_{\overline{z}_1} = z_1 H. \end{aligned} \tag{18}$$

Заметим, что системы (17) и (18) эквивалентны при $\alpha > 0$ и малых z_2, т.к. при этих условиях сумма $(z_2+\alpha)$ отлична от нуля. Если, кроме того, и z_1 близко к нулю, то справедливо неравенство

$$|l_2|^2 - |l_3|^2 \neq 0.$$

Предложение 6. *Для вещественной функции $H(z,\overline{z})$ второе уравнение системы* (18) *равносильно при малых z_1, z_2 уравнению*

$$H_{z_1} = \frac{z_1\overline{l}_2 - \overline{z}_1 l_3}{l_1(|l_2|^2 - |l_3|^2)}H. \tag{19}$$

Для доказательства этого предложения заметим, что обсуждаемое уравнение имеет в краткой форме вид $a\zeta + b\overline{\zeta} = c$. Отсюда легко получить выражение для $\zeta = H_{z_1}$ через a, b, c и вывести (с учетом вещественности $H(z,\overline{z})$) формулу, имеющую вид (19).

Обратимся теперь к системе

$$\begin{aligned} &z_1 H_{z_1} + (z_2+\alpha)H_{z_2} = H, \\ &H_{z_1} = \frac{z_1\overline{l}_2 - \overline{z}_1 l_3}{l_1(|l_2|^2 - |l_3|^2)}H. \end{aligned} \tag{20}$$

Предложение 7. *Любое аналитическое решение первого из уравнений системы* (20) *имеет вид*

$$H = (z_2+\alpha)g\left(\frac{z_1}{z_2+\alpha}\right), \tag{21}$$

где $g(t)$ — произвольная аналитическая функция одного аргумента.

Действительно, два первых интеграла системы

$$\frac{dz_1}{z_1} = \frac{dz_2}{z_2+\alpha} = \frac{dH}{H},$$

имеют вид

$$\frac{z_1}{z_2+\alpha} = C_1, \quad \frac{H}{z_2+\alpha} = C_2.$$

Поэтому решение H исходного уравнения в частных производных удовлетворяет равенству

$$\frac{H}{z_2+\alpha} = g\Big(\frac{z_1}{z_2+\alpha}\Big),$$

т. е. совпадает с (21).

Подставим (21) во второе уравнение системы (20) и положим

$$t = \frac{z_1}{z_2+\alpha}.$$

Таким образом, получается уравнение

$$g'(t) = \frac{(z_1\bar{l}_2 - \bar{z}_1 l_3)(z_2+\alpha)g(t)}{l_1(|l_2|^2 - |l_3|^2)}$$

или после деления на $(z_2+\alpha)^2\overline{(z_2+\alpha)}$ числителя и знаменателя правой части

$$g'(t) = \frac{At+B}{(t-\lambda_1)(At-C)}g(t), \tag{22}$$

где

$$A = \bar{t} - \lambda_2, \quad B = -\lambda_3\bar{t}, \quad C = \lambda_3^2 + A\lambda_2.$$

Предложение 8. *Решение уравнения* (22) *имеет вид*

$$g(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\ln(t-\lambda_1) + \frac{\lambda_1-2\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\ln(At-C) + D,$$

где D — произвольная константа.

Доказательство этой формулы связано с чисто техническими процедурами при выражении одних констант через другие в процессе вычисления интеграла от рациональной функции.

Замечание. С учетом введенных выше обозначений выражение

$$At - C = At - (\lambda_3^2 + A\lambda_2) = A(t-\lambda_2) - \lambda_3^2 = |t-\lambda_2|^2 - \lambda_3^2$$

является вещественным.

Вводя еще одно обозначение

$$\mu = \frac{\lambda_1-2\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$$

и учитывая предложение 7, получаем решение системы (20) в виде

$$H(z,\bar{z}) = (z_2+\alpha)\Big(\frac{z_1}{z_2+\alpha} - \lambda_1\Big)^{1-\mu}\Big(\Big|\frac{z_1}{z_2+\alpha} - \lambda_2\Big|^2 - \lambda_3^2\Big)^{\mu} e^D.$$

Заметим, что систему (20) можно решить лишь с точностью до множителя $\varphi(\bar{z}) = \varphi(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$. Тогда требование вещественности $H(z,\bar{z})$ означает, что множитель e^D превращает комплексное выражение

$$(z_2+\alpha)\Big(\frac{z_1}{z_2+\alpha} - \lambda_1\Big)^{1-\mu}$$

в вещественное. Следовательно,

$$e^D = \overline{(z_2+\alpha)\Big(\frac{z_1}{z_2+\alpha} - \lambda_1\Big)^{1-\mu}} \cdot r,$$

где r — вещественная константа. Тогда

$$H(z,\bar{z}) = r\cdot|z_2+\alpha|^2\Big|\frac{z_1}{z_2+\alpha} - \lambda_1\Big|^{2(1-\mu)}\Big(\Big|\frac{z_1}{z_2+\alpha} - \lambda_2\Big|^2 - \lambda_3^2\Big)^{\mu}$$

или

$$H = r\cdot |z_1-\lambda_1(z_2+\alpha)|^{2(1-\mu)}\left(|z_1-\lambda_2(z_2+\alpha)|^2-\lambda_3^2|z_2+\alpha|^2\right)^{\mu}.$$

С точностью до линейных замен координат получаем в силу этого уравнение поверхности

$$v = |z_1+z_2|^{2(1-\mu)}\left(|z_1|^2-|z_2|^2\right)^{\mu}. \tag{23}$$

Для проверки аффинной однородности такой поверхности достаточно заметить, что пара эрмитовых форм (H_1, H_2), где

$$H_1 = |z_1|^2-|z_2|^2, \quad H_2 = |z_1+z_2|^2,$$

сохраняется с точностью до умножения их на некоторые константы (c_1, c_2) 4-мерной группой преобразований

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \lambda e^{i\theta}\begin{pmatrix} \sqrt{1+t^2}+is & t+is \\ t-is & \sqrt{1+t^2}-is \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где $(s,t,\lambda,\theta)\in\mathbb{R}^4$. При этом действие группы (24) в пространстве $\mathbb{C}^2$ является транзитивным вблизи точки $(z_1,z_2) = (-\lambda_2\alpha, -\lambda_3\alpha)$.

Дополняя эти преобразования сдвигами в направлении оси u, получаем 5-мерную группу аффинных преобразований пространства $\mathbb{C}^3$, транзитивно действующую на многообразии (23).

Замечание. Из тех же соображений следует аффинная однородность поверхностей, задаваемых уравнениями

$$v = |z_1+z_2|^{\nu}\left(|z_1|^2-|z_2|^2\right)^{\mu}$$

с произвольными вещественными показателями μ и ν.

3. Интегрирование алгебр типа (B)

Базисные поля Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 алгебры (13), соответствующие наборам (p_1,p_2,q) вида $(1,0,0)$, $(i,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,i,0)$, $(0,0,1)$, имеют достаточно сложный вид. Перейдем от этих полей к новому базису

$$Z_1+\beta Z_2, \quad \beta Z_2+Z_4, \quad \alpha\beta Z_3, \quad \beta Z_4, \quad Z_5$$

изучаемой алгебры, сохраняя для него старые обозначения.

С учетом формулы-связки $(2\alpha-1)\beta^2=1$ систему уравнений

$$\mathrm{Re}(Z_k(\Phi))_{|M} = 0, \quad k=\overline{1,4},$$

можно тогда записать в виде

$$\begin{gathered}
\mathrm{Re}\left((-2\beta z_1+2\beta^2 z_2+1)F_{z_1}+(-2z_1+2\beta z_2+\beta)F_{z_2}\right)- \\
-\mathrm{Re}((1+2\alpha)z_1+\beta z_2)=0, \\
\mathrm{Re}\left(i\beta z_1 F_{z_1}+iF_{z_2}\right)+\mathrm{Re}\left(i(-\tfrac{1}{\beta}z_1+z_2)\right)=0, \\
\mathrm{Re}\left((3\beta z_1+\beta^2 z_2)F_{z_1}+(z_1+3\beta z_2+\alpha\beta)F_{z_2}\right)+ \\
+\mathrm{Re}(-\alpha\beta z_2+3i\beta(u+iF))=0, \\
\mathrm{Re}\left(i\beta(z_1-\beta z_2)F_{z_1}+(iz_1-i\beta z_2+i\alpha\beta)F_{z_2}\right)+\mathrm{Re}(i\alpha\beta z_2)=0.
\end{gathered} \tag{25}$$

На следующем этапе сделаем замену переменных.

Предложение 9. *При замене переменных*

$$\zeta_1 = z_1 - \beta z_2, \quad \zeta_2 = z_1 + \beta z_2$$

система уравнений (25) *примет вид*

$$\begin{gathered}
\operatorname{Re}\left((1-\beta^2)F_{\zeta_1} + (2\alpha\beta^2 - 4\beta\zeta_1)F_{\zeta_2}\right) = \alpha \operatorname{Re}\zeta_1 + (1+\alpha)\operatorname{Re}\zeta_2, \\
\operatorname{Re}\left(2i\beta F_{\zeta_2}\right) = -\frac{1}{\beta}\operatorname{Im}\zeta_1, \\
\operatorname{Re}\left(\beta(2\zeta_1 - \alpha\beta)F_{\zeta_1} + \beta(4\zeta_2 + \alpha\beta)F_{\zeta_2}\right) = 3\beta F + \frac{\alpha}{2}\operatorname{Re}(-\zeta_1 + \zeta_2), \\
\operatorname{Re}\left(-i\alpha\beta^2 F_{\zeta_1} + i\beta(2\beta\zeta_1 + \alpha\beta^2)F_{\zeta_2}\right) = \frac{\alpha}{2}\operatorname{Im}(-\zeta_1 + \zeta_2).
\end{gathered} \tag{26}$$

Для дальнейшего упрощения системы (26) заметим, что здесь, в отличие от интегрирования алгебр типа (A), удобно перейти к вещественным координатам. Полагая

$$\xi_k = \operatorname{Re}\zeta_k, \quad \eta_k = \operatorname{Im}\zeta_k, \quad k = 1, 2,$$

получаем в качестве следствия из предложения 9 следующую систему уравнений в частных производных:

$$\begin{gathered}
(1-\beta^2)F_{\xi_1} + (2\alpha\beta^2 - 4\beta\xi_1)F_{\xi_2} - 4\beta\eta_1 F_{\eta_2} = 2\alpha\xi_1 + 2(1+\alpha)\xi_2, \\
F_{\eta_2} = -\frac{1}{\beta^2}\eta_1, \\
(2\beta\xi_1 - \alpha\beta^2)F_{\xi_1} + 2\beta\eta_1 F_{\eta_1} + (4\beta\xi_2 + \alpha\beta^2)F_{\xi_2} + \\
+ 4\beta\eta_2 F_{\eta_2} = 6\beta F + \alpha(-\xi_1 + \xi_2), \\
\alpha\beta^2 F_{\eta_1} + 2\beta\eta_1 F_{\xi_2} - (2\beta\xi_1 + \alpha\beta^2)F_{\eta_2} = \alpha(\eta_1 - \eta_2).
\end{gathered} \tag{27}$$

Самое простое уравнение этой системы имеет решение

$$F(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = -\frac{1}{\beta^2}\eta_1\eta_2 + H(\xi_1, \xi_2, \eta_1),$$

где $H(\xi_1, \xi_2, \eta_1)$ — произвольная аналитическая функция от трех вещественных переменных.

Подставляя эту формулу в три оставшиеся уравнения системы (27), получим ее сокращенный вариант

$$\begin{gathered}
(1-\beta^2)H_{\xi_1} + (2\alpha\beta^2 - 4\beta\xi_1)H_{\xi_2} = 2\alpha\xi_1 + 2(1+\alpha)\xi_2 - \frac{4}{\beta}\eta_1^2, \\
(2\beta\xi_1 - \alpha\beta^2)H_{\xi_1} + 2\beta\eta_1 H_{\eta_1} + (4\beta\xi_2 + \alpha\beta^2)H_{\xi_2} = 6\beta H + \alpha(-\xi_1 + \xi_2), \\
\alpha\beta^2 H_{\eta_1} + 2\beta\eta_1 H_{\xi_2} = -\frac{2}{\beta}\xi_1\eta_1,
\end{gathered} \tag{28}$$

содержащий три уравнения относительно производных функции H по переменным ξ_1, ξ_2, η_1.

Для дальнейшего упрощения полученной системы удобно еще раз произвести замену переменных.

Предложение 10. *При замене переменных*

$$t_1 = \xi_1, \quad t_2 = \eta_1^2 - \alpha\beta\xi_2, \quad t_3 = \eta_1$$

система уравнений (28) *примет вид*

$$(1-\beta^2)H_{t_1} - 2\alpha\beta^2(\alpha\beta - 2t_1)H_{t_2} = 2\alpha t_1 - \frac{2}{\alpha\beta}(1+\alpha)t_2 + 2\frac{1-\alpha}{\alpha\beta}t_3^2,$$

$$(2\beta t_1 - \alpha\beta^2)H_{t_1} + (4\beta t_2 - \alpha^2\beta^3)H_{t_2} + 2\beta t_3 H_{t_3} = 6\beta H - \alpha t_1 + \frac{1}{\beta}(t_3 - t_2),$$

$$\alpha\beta^2 H_{t_3} = -\frac{2}{\beta}t_1 t_3. \qquad (29)$$

Решением последнего уравнения этой системы является

$$H = -\frac{\alpha}{\beta}t_1 t_3^2 + g(t_1, t_2),$$

где $g(t_1, t_2)$ — произвольная аналитическая функция двух переменных.

Подставляя эту формулу в остальные уравнения системы (29), получим систему двух уравнений относительно производных функции g по переменным t_1, t_2

$$(1-\beta^2)g_{t_1} + 2\alpha\beta^2(2t_1 - \alpha\beta)g_{t_2} = 2\alpha t_1 - \frac{2}{\alpha\beta}(1+\alpha)t_2, \qquad (30)$$

$$(2\beta t_1 - \alpha\beta^2)g_{t_1} + (4\beta t_2 - \alpha^2\beta^3)g_{t_2} = 6\beta g - (\alpha t_1 + \frac{t_2}{\beta}). \qquad (31)$$

В зависимости от значения параметра β (и связанного с ним α) при рассмотрении системы (30), (31) естественно выделить два случая.

1. В случае $\beta^2 = 1$ ($\alpha = 1$) существенно упрощается уравнение (30). Его решение имеет вид

$$g(t_1, t_2) = \frac{t_1 t_2 - t_2^2}{2t_1 - 1} + \varphi(t_1),$$

где $\varphi(t_1)$ — произвольная аналитическая функция одного аргумента. Тогда из (31) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(2t_1 - 1)\varphi'(t_1) - 6\varphi(t_1) = \frac{2(t_1 - t_1^2)}{(2t_1 - 1)^2}$$

относительно функции $\varphi(t_1)$. Решая это уравнение и возвращаясь к переменным ξ, η, получаем уравнение искомой однородной поверхности в виде

$$v = \frac{(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2 - 2\xi_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) - 2\xi_2\eta_1^2 + \xi_1^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_2^2}{1 - 2\xi_1}.$$

2. В случае $\beta^2 \neq 1$ ($\alpha \neq 1$) начнем изучение системы (30), (31) с ее второго уравнения.

Предложение 11. *Решение уравнения* (31) *имеет вид*

$$g(t_1, t_2) = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\alpha}{4\beta}(t_1 - A) + \frac{1}{2\beta^2}(t_2 - A^2) + (t_1 - A)^3\varphi\left(\frac{t_2 - A^2}{(t_1 - A)^2}\right), \qquad (32)$$

где $A = \alpha\beta/2$, φ *— произвольная аналитическая функция одного вещественного переменного.*

Для доказательства разделим уравнение (31) на 2β и запишем в виде

$$(t_1 - A)\frac{\partial g}{\partial t_1} + 2(t_2 - A^2)\frac{\partial g}{\partial t_2} = 3g - (Bt_1 + Dt_2),$$

где $B = \alpha/(2\beta)$, $D = 1/(2\beta^2)$. Соответствующая этому уравнению система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dt_1}{t_1 - A} = \frac{dt_2}{2(t_2 - A^2)} = \frac{dg}{3g - (Bt_1 + Dt_2)}.$$

Два независимых первых интеграла этой системы

$$C_1 = \frac{t_2 - A^2}{(t_1 - A)^2}, \quad C_2 = \frac{g - N/3 - (B/2)(t_1 - A) - D(t_1 - A)^2}{(t_1 - A)^3},$$

где $N = DA^2 + BA = 3\alpha^2/8$, приводят к формуле (32).

После подстановки (32) в уравнение (30) получим для функции $\varphi(s)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(s - \lambda)\varphi'(s) = \frac{3}{2}\varphi + \mu s, \tag{33}$$

где

$$\lambda = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}, \quad \mu = \frac{1 + 3\beta^2}{\beta(1 - \beta^4)}.$$

Заметим, что введенный параметр λ может принимать значения (в зависимости от α или, что то же самое, от β) из объединения интервалов $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Переменная же

$$s = \frac{t_2 - A^2}{(t_1 - A)^2}$$

близка при малых t_1, t_2 к -1. Поэтому, интегрируя уравнение (33), получаем

$$\varphi(s) = E|s - \lambda|^{3/2} - 2\mu s + \frac{4}{3}\lambda\mu, \tag{34}$$

где модуль раскрывается по-разному в зависимости от значения α.

Подставляя (34) в (32) и учитывая предыдущие интегрирования, получаем окончательно уравнение

$$\begin{aligned} v = \frac{4(1 + 3\beta^2)}{3\beta(1 - \beta^2)^2}\xi_1^3 - \frac{4}{\beta(1 - \beta^2)}\xi_1\eta_1^2 - \frac{1}{\beta^2}\eta_1\eta_2 + \frac{2\alpha}{1 - \beta^2}\eta_1^2 - \\ - \frac{2\alpha(1 + 3\beta^2)}{(1 - \beta^2)^2}\xi_1^2 + \frac{2\alpha - 1}{1 - \beta^2}\xi_1\xi_2 + \frac{\alpha}{\beta}\lambda(\lambda\xi_1 - \xi_2) - \frac{\alpha}{6\beta^2}\lambda^2 + \\ + \frac{16}{3\beta(1 - \beta^2)^2|\lambda + 1|^{3/2}}\left|\eta_1^2 - \lambda\xi_1^2 + 2A(\lambda\xi_1 - \xi_2) - (\lambda + 1)A^2\right|^{3/2} \end{aligned}$$

однородной поверхности M.

Напомним, что все коэффициенты в этой формуле, т. е. α, β, λ, A однозначно выражаются через один параметр α или β.

Литература

1. Широков П.А., Широков А.П. *Аффинная дифференциальная геометрия.* – М.: Физматлит, 1959. – 320 с.
2. Doubrov B., Komrakov B., Rabinovich M. *Homogeneous surfaces in the 3-dimensional affine geometry* // Prepr. Ser. Pure Math. / Inst. Math. Univ. – Oslo, 1995. – № 4. – P. 1–26.
3. Cartan E. *Sur la geometrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes* // Ann. Math. Pura Appl. – 1932. – V. 11. – № 4. – P. 17–90 (Oeuvres II, 2, 1231–1304).
4. Лобода А.В. *О размерности группы, транзитивно действующей на гиперповерхности в* $\mathbb{C}^3$ // Функц. анализ и его прилож. – 1999. – Т. 33. – Вып. 1. – С. 68–71.
5. Лобода А.В. *Однородные строго псевдо-выпуклые гиперповерхности в* $\mathbb{C}^3$ *с двумерными группами изотропии* // Матем. сб. – 2001. – Т. 192. – № 12. – С. 3–24.
6. Chern S.S., Moser J.K. *Real hypersurfaces in complex manifolds* // Acta Math. – 1974. – V. 133. – № 3. – P. 219–271.
7. Белошапка В.К. *Однородные гиперповерхности в* $\mathbb{C}^2$ // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60. – № 5. – С. 760–764.

8. Stanton N.K. *Infinitesimal CR automorphisms of rigid hypersurfaces* // Amer. J. Math. – 1995. – V. 117. – № 1. – P. 141–167.
9. Гузеев Р.Н., Лобода А.В. *О нормальных уравнениях аффинно-однородных выпуклых поверхностей пространства* $\mathbb{R}^3$ // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 3. – С. 25–32.
10. Eastwood M., Ezhov V.V. *On affine normal forms and a classification of homogeneous surfaces in affine three-space* // Geom. dedic. – 1999. – V. 77. – P. 11–69.
11. Лобода А.В., Бугаева Ж.А., Ходарев А.С. *О линейной однородности жестких вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства* // Тез. докл. школы-семинара по геометрии и анализу, посвящ. 90-летию Ефимова Н.В. – Абрау-Дюрсо, 2000. – С. 131–133.

Воронежский государственный
архитектурно-строительный
университет

Поступили
первый вариант 28.06.2001
окончательный вариант 05.02.2003