ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 12 (523)

УДК 519.642

В.С. КЛИМОВ

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА УСЛОВНОГО ГРАДИЕНТА

Изучается сходимость метода условного градиента (напр., [1]–[4]) в задаче приближенного нахождения точек минимума функционалов, определенных на ограниченных замкнутых подмножествах рефлексивного пространства. Устанавливаются достаточные условия сходимости, применимые, в частности, к невыпуклым функционалам. Приводятся приложения к задачам оптимального управления.

Введем следующие основные обозначения: X и X^* — действительное банахово пространство и сопряженное к нему соответственно, $\langle x, x^*\rangle$ — значение функционала x^* из X^* на элементе x из X; $\mathrm{Cv}(X)$ — совокупность всех непустых выпуклых замкнутых подмножеств пространства X. Отображение $F : M_1 \to M_2$ (M_1, M_2 — подмножества банаховых пространств X_1, X_2 соответственно) именуем ограниченным, если для каждого ограниченного в X_1 множества $M \subset M_1$ область значений $F(M)$ есть ограниченное подмножество X_2.

Используемые ниже функционалы предполагаются действительными. Если $f : M \to \mathbb{R}$ — функционал на множестве M, то $\arg\min\limits_M f$ — множество точек глобального минимума f на M: включение $x_* \in \arg\min\limits_M f$ равносильно неравенству $f(x_*) \le f(x) \quad \forall x \in M$. Стандартным образом ([1], с. 18–19) определяется производная $f'(x_0)$ функционала f, заданного на некоторой окрестности $O(x_0)$ точки x_0 банахова пространства X. Через $C^1(U)$ обозначается совокупность непрерывно дифференцируемых на множестве $U \subset X$ функционалов, $C^{1,\nu}(U)$ $(0 < \nu \le 1)$ — часть $C^1(U)$, состоящая из функционалов f, производные которых удовлетворяют неравенству $\|f'(u) - f'(v)\|_{X^*} \le K\|u - v\|_X^\nu$, постоянная K не зависит от u, v из U.

1. Всюду далее X — сепарабельное рефлексивное банахово пространство, $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ — нормы в X и X^* соответственно, символы $\rightharpoonup$ и $\to$ означают слабую и сильную сходимости соответственно, $Q \in \mathrm{Cv}(X)$. Обозначим через $S(Q)$ класс ограниченных отображений $F : Q \to X^*$, удовлетворяющих следующему условию: для произвольной последовательности $x_n \in X$, обладающей свойствами

$$x_n \rightharpoonup x, \quad F(x_n) \rightharpoonup x^*, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle x_n, F(x_n)\rangle \le \langle x, x^*\rangle,$$

имеют место соотношения $x_n \to x$, $x^* = F(x)$. Близкие к $S(Q)$ классы операторов изучались многими авторами (см., напр., [5], [6] и приведенную там литературу). Отметим, что сужение оператора F класса $S(X)$ на множество Q принадлежит классу $S(Q)$.

Элемент $x \in Q$ назовем особой точкой отображения $F : Q \to X^*$, если $\langle v - x, F(x)\rangle \ge 0 \quad \forall v \in Q$. Если не оговорено противное, ниже предполагается, что Q — ограниченное подмножество X. В этом случае множество $\mathfrak{K}(F)$ всех особых точек отображения F класса $S(Q)$ есть компакт [6], [7]. При любом x из Q линейный функционал $z \to \langle z, F(x)\rangle$ достигает своего минимума на множестве Q; имеет смысл функция $\eta(x) = \min\{\langle z - x, F(x)\rangle,\ z \in Q\}$. Очевидно, $\eta(x) \le 0$ $\forall x \in Q$, при этом $\{x \in Q,\ \eta(x) = 0\} = \mathfrak{K}(F)$.

Последовательность Q_n $(n = 0, 1, \dots)$ множеств класса $\mathrm{Cv}(X)$ назовем исчерпывающей множество Q, если $Q_n \subset Q_{n+1}$ $(n = 0, 1, \dots)$ и объединение всех множеств Q_n всюду плотно в множестве Q. Положим $\eta_n(x) = \min\{\langle z - x, F(x)\rangle,\ z \in Q_{n+1}\}$ $(n = 0, 1, \dots, x \in Q_n)$.

Лемма 1. *Пусть $F \in S(Q)$. Тогда всякая последовательность $x_n \in Q_n$ $(n = 0, 1, \dots)$, для которой $\eta_n(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$, содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из $\mathfrak{K}(F)$.*

Доказательство. Будем считать, что $x_n \rightharpoonup x$, $F(x_n) \rightharpoonup x^*$. Фиксируем z из Q_N $(N = 1, 2, \dots)$. Из определения $\eta_n(x_n)$ вытекает неравенство

$$\eta_n(x_n) + \langle x_n, F(x_n)\rangle \le \langle z, F(x_n)\rangle \quad (n > N),$$

влекущее за собой оценку

$$\varlimsup_{n\to\infty} \langle x_n, F(x_n)\rangle \le \langle z, x^*\rangle.$$

Так как объединение множеств Q_N $(N = 1, 2, \dots)$ всюду плотно в Q, то последняя оценка верна для $z = x$. Из установленных свойств последовательности x_n и включения $F \in S(Q)$ вытекает сходимость $x_n \to x$, равенство $x^* = F(x)$ и неравенство $\langle x, F(x)\rangle \le \langle z, F(x)\rangle \quad \forall z \in Q$. В частности, $x \in \mathfrak{K}(F)$. □

Далее основное внимание уделяется градиентным отображениям. Пусть f — дифференцируемый в каждой точке множества Q функционал. Элемент x из Q назовем стационарной точкой функционала f, если $\langle v - x, f'(x)\rangle \ge 0 \quad \forall v \in Q$. Множество стационарных точек f обозначим символом $\mathcal{K}_f$. Справедливо включение $\arg\min\limits_Q f \subset \mathcal{K}_f$. Элементы множества $Q \setminus \mathcal{K}_f$ назовем регулярными точками функционала f. Положим $\eta(x) = \min\{\langle v - x, f'(x)\rangle,\ v \in Q\}$. Вычисление функции η в точке x сводится к решению экстремальной задачи $\langle z, f'(x)\rangle \to \min$, $z \in Q$. Существование решения $z(x)$ этой задачи очевидно, решение может быть неединственным.

Пусть Q_n $(n = 0, 1, \dots)$ — исчерпывающая множество Q последовательность множеств класса $\mathrm{Cv}(X)$. Введем функции $\eta_n(x) = \min\{\langle z - x, f'(x)\rangle,\ z \in Q_{n+1}\}$ $(x \in Q_n)$ и отображение $z_n : Q_n \to Q_{n+1}$ $(n = 0, 1, \dots)$, обладающие свойствами

$$z_n(x) \in Q_{n+1}, \quad \langle z_n(x), f'(x)\rangle \le \langle z, f'(x)\rangle \quad \forall z \in Q_{n+1}.$$

Указанными свойствами отображения $z_n : Q_n \to Q_{n+1}$ $(n = 0, 1, \dots)$ определяются, вообще говоря, неоднозначно.

Изучаемая версия метода условного градиента для решения задачи

$$f(x) \to \min, \quad x \in Q, \tag{1}$$

состоит в построении последовательности $x_n \in Q_n$ $(n = 0, 1, \dots)$ по следующим формулам:

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n(z_n(x_n) - x_n), \quad \alpha_n \in \arg\min_{[0,1]} f_n, \tag{2}$$
$$f_n(\alpha) = f(x_n + \alpha(z_n(x_n) - x_n)) \quad (0 \le \alpha \le 1).$$

Элемент x_0 из Q_0 предполагается заданным. На каждом шаге необходимо решать две вспомогательные задачи: 1) задачу о минимизации линейного функционала $z \to \langle z, f'(x)\rangle$ на множестве Q_{n+1}, 2) задачу о минимизации функции одного переменного $f_n(\alpha)$ на отрезке $[0, 1]$. Обе задачи имеют решения. В предшествующих определениях не исключается случай постоянной последовательности $Q_n = Q$ $(n = 0, 1, \dots)$.

Метод условного градиента изучался во многих работах (см., напр., [1]–[4] и приведенную там литературу). Как правило, рассматривался случай $Q_n = Q$ $(n = 0, 1, \dots)$, f — функционал класса $C^{1,1}$. Далее эти ограничения существенным образом ослабляются.

Через $\Lambda_1(Q)$ обозначается совокупность дифференцируемых на множестве Q функционалов f, для которых градиентное отображение $F(x) = f'(x)$, $x \in Q$, принадлежит классу $S(Q)$. Для конечномерного пространства X класс $\Lambda_1(Q)$ совпадает с классом $C^1(Q)$. В бесконечномерном случае это уже не так, примеры функционалов класса $\Lambda_1(Q)$ можно найти в [5]–[9].

Функционал f класса $\Lambda_1(Q)$ слабо полунепрерывен [5], [7]. Задача (1) корректна в следующем смысле: 1) множество $M_f = \arg\min\limits_Q f$ непусто; 2) любая минимизирующая функционал f

последовательность x_n сходится к множеству M_f, т.е., если $x_n \in Q$ и $f(x_n) \to a = \min_Q f$, то $d_X(x_n, M_f) \to 0$ при $n \to \infty$ [8]; здесь и далее $d_X(z, M) = \inf\{\|z-y\|,\ y \in M\}$ — расстояние от точки z до множества M в метрике пространства Q.

Теорема 1. *Пусть $f \in \Lambda_1(Q)$ и справедливы оценки*

$$f(x+h) - f(x) \le \langle h, f'(x) \rangle + \omega(\|h\|), \tag{3}$$

где $x, x+h \in Q$, функция $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ не зависит от x из Q и $\omega(s) = o(s)$ при $s \to 0$. Пусть $x_n \in Q_n$ $(n = 0, 1, \dots)$ — последовательность элементов, определяемая из соотношений (2), *причем $\eta_n(x_n) < 0$.*

Тогда $f(x_{n+1}) < f(x_n)$ и $\eta_n(x_n) < 0$, последовательность x_n компактна, всякая предельная точка этой последовательности принадлежит множеству $\mathcal{K}_f$.

Доказательство. Полагая в (3) $x = x_n$, $h = \alpha(z_n(x_n) - x_n)$ $(0 \le \alpha \le 1)$, получаем неравенство

$$f(x_n + \alpha(z_n(x_n) - x_n)) - f(x_n) \le \alpha\eta_n(x_n) + \omega(\alpha\|z_n(x_n) - x_n\|). \tag{4}$$

Так как $\omega(s) = o(s)$, то для любого $\delta > 0$ найдется такое число $\tau > 0$, что $|\omega(\alpha\|z_n(x_n) - x_n\|)| < \frac{\delta\alpha}{2}$ $(0 \le \alpha \le \tau)$, число τ не зависит от выбора начального приближения x_0 и числа n.

Фиксируем $\delta > 0$ и соответствующее ему число $\tau > 0$. Обозначим через $\mathbb{N}(\delta)$ совокупность таких натуральных чисел n, что $\eta_n(x_n) < -\delta$. Если $n \in \mathbb{N}(\delta)$, то из (4) вытекает оценка

$$f(x_n + \alpha(z_n(x_n) - x_n)) - f(x_n) \le -\frac{\delta\alpha}{2} \quad (0 \le \alpha \le \tau),$$

в частности, $f(x_{n+1}) - f(x_n) < -\frac{\delta\tau}{2}$. Функционал f ограничен снизу, поэтому множество $\mathbb{N}(\delta)$ конечно при любом $\delta > 0$. Неравенство $f(x_{n+1}) < f(x_n)$ и сходимость $\eta_n(x_n) \to 0$ доказаны, остальные утверждения вытекают из леммы 1. □

Следствие. Если в условиях теоремы 1 стационарная точка x_* функционала f единственна, то $x_n \to x_*$ и $x_* \in M_f$.

Скорость сходимости x_n к x может зависеть и от свойств функционала f, и от скорости приближения множества Q последовательностью множеств Q_n. Для выполнения оценки (3) достаточно, чтобы отображение $F = f' : Q \to X^*$ было равномерно непрерывным. В теореме 1 исключается случай $\eta_n(x_n) = 0$ при некотором n. В этом случае метод условного градиента конечен, т. е. останавливается после конечного числа шагов. Обсуждение данного вопроса можно найти в ([3], с. 189–190).

2. В этом разделе метод условного градиента применяется к дифференцируемым и выпуклым на множестве Q функционалам, производные которых ограничены на $Q \subset X$. Функционалы этого класса удовлетворяют условию Липшица и слабо полунепрерывны снизу, множества точек минимума и стационарных точек совпадают. Как и в предшествующем разделе, $\eta(x) = \min\{\langle v - x, f'(x)\rangle,\ v \in Q\}$, $a = \min_Q f$, выпуклость f влечет оценку ([2], с. 89; [4], с. 205)

$$-\eta(x) \ge f(x) - a \quad \forall x \in Q.$$

Для анализа сходимости метода условного градиента используется

Предложение 1 ([3], с. 52). *Пусть $w_n > 0$ и*

$$w_{n+1} \le w_n - cw_n^{1+\beta} \quad (c > 0, \quad \beta > 0, \quad n = 0, 1, \dots). \tag{5}$$

Тогда

$$w_n \le w_0(1 + nc\beta w_0^{\beta})^{-1/\beta}. \tag{6}$$

Обозначим через $\Lambda_\gamma(Q)$ $(1 < \gamma \le 2)$ совокупность выпуклых и дифференцируемых на множестве Q функционалов, удовлетворяющих оценкам

$$\|f'(x)\|_* \le K_1, \quad f(x+h) - f(x) \le \langle h, f'(x)\rangle + K_2\|h\|^\gamma \tag{7}$$

с некоторыми постоянными K_1, K_2, не зависящими от x и $x+h$ из Q. Оценки (7) имеют место для функционалов f класса $C^{1,\nu}(Q)$ $(\nu \ge \gamma - 1)$.

Сопоставим регулярной точке x из Q элемент $z(x)$ из $\arg\min\limits_Q f'(x)$. Таким образом, $\eta(x) = \langle z(x) - x, f'(x)\rangle < 0$. Полагая в (7) $h = \alpha(z(x) - x)$, приходим к соотношению

$$f(x + \alpha(z(x) - x)) - f(x) \le \alpha\eta(x) + K_2\alpha^\gamma\|z(x) - x\|^\gamma \le \alpha\eta(x) + K_2 D^\gamma\alpha^\gamma,$$

где D — диаметр множества Q. Из этого соотношения следует оценка

$$\min_{0\le\alpha\le1}[f(x + \alpha(z(x) - x)) - f(x)] \le \min_{0\le\alpha\le1}(\alpha\eta(x) + K_2D^\gamma\alpha^\gamma) \le -c_1|\eta(x)|^{\gamma/(\gamma-1)}, \tag{8}$$

постоянная $c_1 > 0$ не зависит от выбора регулярной точки x из Q.

Теорема 2. *Пусть $f \in \Lambda_\gamma(Q)$, $x_0 \in Q$, x_n $(n = 1, 2, \dots)$ — последовательность элементов, определяемая из соотношений (2), причем $Q_n = Q$, $\eta(x_n) < 0$ $(n = 0, 1, \dots)$. Тогда для последовательности $w_n = f(x_n) - a$ верна оценка (6), где $\beta(\gamma - 1) = 1$, $c = c_1$ из оценки (8).*

Доказательство. Из оценки (8) следует неравенство

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) \le -c_1|\eta(x_n)|^{\gamma\beta}.$$

С учетом (5) получаем, что последовательность $w_n = f(x_n) - a$ удовлетворяет оценке (6) с $\beta = (\gamma - 1)^{-1}$, $c = c_1$. Теперь доказываемое утверждение вытекает из предложения 1. □

Для более узкого класса выпуклых множеств Q и выпуклых функционалов f теорема 2 допускает некоторое усиление. Множество $Q \subset X$ назовем r-выпуклым $(2 \le r < \infty)$, если существует такое $\delta > 0$, что для любых x, y из Q и z из X $(\|z\| \le \delta\|x - y\|^r)$ точка $\frac{x+y}{2} + z$ принадлежит множеству Q. Например, если Q — шар в пространстве L^p $(1 < p < \infty)$, то можно положить $r = \max\{2, p\}$.

Предложение 2. *Пусть Q — r-выпуклое подмножество X, f — выпуклый функционал, $\|f'(x)\|_* \ge \varepsilon_0 > 0$ $\forall x \in Q$ и $f(x_*) = a = \min\limits_Q f$. Тогда*

$$-\eta(x) \ge 2\delta\varepsilon_0\|z(x) - x\|^r, \quad f(x) - a \ge 2\delta\varepsilon_0\|x - x_*\|^r. \tag{9}$$

Доказательство предложения 2 проводится по известным схемам (напр., [2], с. 42; [4], с. 207), поэтому опускается.

Для функционалов класса $\Lambda_1(Q)$ неравенство $\|f'(x)\|_* \ge \varepsilon_0$ $\forall x \in Q$ с некоторым $\varepsilon_0 > 0$ следует из условия $f'(x) \ne 0$ $\forall x \in Q$. Достаточно заметить, что если $x_n \rightharpoonup x$, $f'(x_n) \to 0$, то $x \in Q$ и $f'(x) = 0$.

Теорема 3. *Пусть функционал f, последовательность x_n $(n = 0, 1, \dots)$ и множество Q удовлетворяют условиям теоремы 2 и предложения 2. Тогда*

1) *если $r > \gamma$, то для последовательности $w_n = f(x_n) - a$ имеет место оценка (6), где $\beta = \frac{r-\gamma}{r(\gamma-1)}$, c — положительная постоянная;*

2) *если $r = \gamma = 2$, то $w_n \le c_0 q_0^n$ $(c_0 < \infty,\ 0 < q_0 < 1)$.*

Доказательство. Пусть вначале $r > \gamma$. Установим аналог оценки (8). Применяя (7), (9), имеем последовательно

$$f(x + \alpha(z(x) - x)) - f(x) \le \alpha\eta(x) + K_2\alpha^\gamma\|z(x) - x\|^\gamma \le \alpha\eta(x) + K_3\alpha^\gamma|\eta(x)|^{\gamma/r}$$

с некоторой постоянной K_3. Отсюда вытекает соотношение

$$\min_{0\le\alpha\le 1}[f(x+\alpha(z(x)-x))-f(x)]\le\min_{0\le\alpha\le 1}[\alpha\eta(x)+K_3\alpha^\gamma|\eta(x)|^{\gamma/r}]\le -c_2|\eta(x)|^{1+\beta}, \qquad (10)$$

здесь $\beta=\frac{r-\gamma}{r(\gamma-1)}$, c_2 — положительная постоянная, не зависящая от x.

Соотношение (10) влечет за собой неравенство

$$f(x_{n+1})-f(x_n)\le -c_2|\eta(x_n)|^{1+\beta}.$$

Так как $|\eta(x_n)|\ge f(x_n)-a$, то последовательность $w_n=f(x_n)-a$ удовлетворяет оценке (6) с $\beta=\frac{r-\gamma}{r(\gamma-1)}$, $c=c_2$. Теперь первое утверждение теоремы вытекает из предложения 1.

Если $\gamma=r=2$, то оценка (10) имеет место с $\beta=0$. Отсюда получаем, что последовательность $w_n=f(x_n)-a$ удовлетворяет неравенству $w_{n+1}\le w_n-c_2w_n$. Из этой оценки очевидным образом следует второе утверждение теоремы. □

Комбинируя теорему 3 с неравенством (9), можно получить оценки скорости сходимости последовательности x_n к точке x_* минимума функционала f на множестве Q. В частности, при $\gamma=r=2$ метод условного градиента сходится со скоростью геометрической прогрессии, т. е. $\|x_n-x_*\|\le\mathrm{const}\,q^n$ $(0<q<1)$.

Теоремы о сходимости сохраняются и при отличных от (2) способах выбора параметров α_n. Обсуждение такого рода вопросов можно найти в ([1], с. 77–80; [2], с. 89–93).

3. Ниже приводятся приложения метода условного градиента к задачам оптимального управления. Основное внимание уделяется анализу свойств функционала, возникающего в задаче Больца ([1], с. 91–102).

Рассматривается управляемый объект, эволюция которого описывается соотношениями

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+B(t)u+C(t),\quad x(0)=x_0. \qquad (11)$$

Здесь $x=(x_i)$ $(i=1,\dots,N)$ — фазовый вектор, $u=(u_j)$ $(j=1,\dots,m)$ — управление, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — кусочно-непрерывные на отрезке $I=[0,T]$ матрицы размеров $N\times N$, $N\times m$, $N\times 1$ соответственно, x_0 — фиксированный элемент из $\mathbb{R}^N$.

Каждому управлению u класса $U_p=L^p(I,\mathbb{R}^m)$ $(1<p<\infty)$ соответствует единственное решение $x=W(u)$ задачи Коши (11), называемое фазовой траекторией. Отображение $W:U_p\to C(I,\mathbb{R}^N)$ усиленно непрерывно: если последовательность u_n из U_p слабо сходится к u, то $W(u_n)\to W(u)$ в пространстве $C(I,\mathbb{R}^N)$. Критерий качества управления задается в форме Больца

$$J(u)=\int_0^T\Phi(t,x(t),u(t))dt+g(x(T)),$$

здесь и далее $u\in U_p$, $x=U(u)$.

Предложение 3 ([1], с. 93–95). *Пусть функции Φ, Φ'_x, Φ'_u непрерывны по совокупности переменных ($t\in I$, $x\in\mathbb{R}^N$, $u\in\mathbb{R}^m$) и удовлетворяют неравенствам*

$$|\Phi(t,x,u)|+|\Phi'_x(t,x,u)|+(1+|u|)|\Phi'_u(t,x,u)|\le\Phi_0(t,x)(1+|u|^p),$$

где $\Phi:I\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция.

Тогда $J\in C^1(U_p)$ и справедливо равенство

$$\langle v,J'(u)\rangle=\int_0^T(a(t)h(t)+b(t)v(t))dt+g'(x(T))h(T), \qquad (12)$$

в котором v — произвольный элемент из U_p, $g\in C^1(\mathbb{R}^N)$,

$$a(t)=\Phi'_x(t,x(t),u(t)),\quad b(t)=\Phi'_u(t,x(t),u(t)),$$

$h(t)$ — *решение задачи Коши*

$$\frac{dh}{dt} = A(t)h + B(t)v, \quad h(0) = 0. \tag{13}$$

Если функции $\Phi(t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $(t \in I)$, $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ выпуклы, то функционал $J : U_p \to \mathbb{R}$ также выпуклый ([1], с. 101). При дополнительных предположениях о гладкости функций Φ, g можно установить включение $J \in C^{1,\nu}(U_p)$ (напр., [1], с. 97–99), простой пример такого рода приводится ниже.

Сформулируем ограничения на функции Φ, g, обеспечивающие включение $J \in \Lambda_1(U_p)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия предложения 3. Пусть при любых (t,x) из $I \times \mathbb{R}^N$ функция $\Phi(t,x,\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ строго выпукла и $\Phi(t,0,u) \geq \varkappa_0 |u|^p - \varkappa_1$ $(\varkappa_0 > 0,\ \varkappa_1 > 0)$.*

Тогда $J \in \Lambda_1(U_p)$.

Доказательство. Достаточно установить, что градиентное отображение $F(u) = J'(u)$ $(u \in U_p)$ принадлежит классу $S(U_p)$. Пусть последовательность $u_n \in U_p$ обладает свойствами

$$u_n \rightharpoonup u, \quad F(u_n) \rightharpoonup u^*, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \langle u_n, F(u_n)\rangle \leq \langle u, u^* \rangle. \tag{14}$$

Положим $x_n = W(u_n)$, $a_n(t) = \Phi'_x(t, x_n(t), u_n(t))$, $b_n(t) = \Phi'_u(t, x_n(t), u_n(t))$. Из формулы (12) вытекает равенство

$$\langle v, F(u_n)\rangle = \int_0^T (a_n(t)h(t) + b_n(t)v(t))dt + g'(x_n(T))h(T),$$

где $v \in U_p$, h — решение задачи Коши (13). Последовательность $x_n = W(u_n)$ сходится к $x = W(u)$ в пространстве $C(I, \mathbb{R}^N)$, последовательности a_n, b_n ограничены в пространствах $L^1(I, \mathbb{R}^N)$, $L^q(I, \mathbb{R}^m)$ соответственно. Без ограничения общности можно считать, что последовательность b_n слабо сходится в $L^q(I, \mathbb{R}^m)$ к некоторой функции b_0. Из (14) следует неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty} \langle u_n - u, F(u_n)\rangle \leq 0,$$

равносильное в силу формул (12), (13) неравенству

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left(\int_0^T (a_n(t)h_n(t) + b_n(t)(u_n(t) - u(t)))dt + g'(x_n(T))h_n(T) \right) \leq 0,$$

где $h_n(T)$ — решение задачи Коши (13) с $v = u_n - u$. Так как $h_n \to 0$ в $C(I, \mathbb{R}^N)$, последовательность a_n ограничена в $L^1(I, \mathbb{R}^N)$, а $b_n \rightharpoonup b_0$, то последнее неравенство влечет за собой оценку

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_0^T b_n(t)u_n(t)dt \leq \int_0^T b_0(t)u(t)dt.$$

Согласно лемме 8 работы [9] из этой оценки вытекает сходимость $u_n \to u$ в метрике пространства U_p и равенство $b_0(t) = b(t) = \Phi'_u(t, x(t), u(t))$. Поскольку $x_n \to x$ в $C(I, \mathbb{R}^N)$, $u_n \to u$ в U_p, то $a_n \to a = \Phi'_x(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$ в метрике $L^1(I, \mathbb{R}^N)$. Установленные свойства последовательностей a_n, b_n и их пределов a, b означают, что $u^* = F(u)$. □

Линейность управляемой системы (11) по фазовой переменной несущественна, усиленная непрерывность преобразования W сохраняется и для многих систем, линейных лишь по управлению u. При более жестких относительно функционала J предположениях близкое к лемме 2 утверждение локального характера установлено в ([5], с. 297–302). Условиям леммы 2 удовлетворяют, в частности, функции $\Phi(t,x,u) = |u|^p$ $(1 < p < \infty)$, $g \in C^1(\mathbb{R}^N)$. Функционал качества, соответствующий такой паре функций Φ, g, принадлежит $C^{1,\nu}(U_p)$, если $\nu + 1 \leq \min\{2, p\}$, $g \in C^{1,\nu}(\mathbb{R}^N)$.

Так как сопряженное к пространству $U_p = L^p(I, \mathbb{R}^m)$ можно отождествить с пространством $L^q(I, \mathbb{R}^m)$ ($q = \frac{p}{p-1}$), то равенство (12), определяющее производную $J'(u)$, можно записать в виде

$$\langle v, J'(u) \rangle = \int_0^T (\mathcal{F}(u)(t), v(t)) dt,$$

где $\mathcal{F}(u)$ — элемент пространства $L^q(I, \mathbb{R}^m)$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$. Иногда производную $J'(u)$ отождествляют с вектор-функцией $\mathcal{F}(U)$ (напр., [1], с. 93; [2], с. 129; [5], с. 298; там же описаны способы нахождения вектор-функции $\mathcal{F}(u)$).

Задачу о минимизации функционала Больца на множестве $Q \subset U_p$ записывают в виде

$$J(u) = \int_0^T \Phi(t, x(t), u(t)) dt + g(x(T)) \to \min, \quad u \in Q, \tag{15}$$

при этом подразумевается, что $x = W(u)$, т. е. x, u связаны соотношениями (11). В условиях леммы 2 задача (11), (15) корректна для любого ограниченного множества Q класса $\mathrm{Cv}(U_p)$.

Для нахождения ее решения по методу условного градиента конструируется последовательность $u_n \in Q_n$ ($n = 0, 1, \ldots$, Q_n — исчерпывающая множество Q последовательность множеств класса $\mathrm{Cv}(U_p)$). В качестве исходного приближения выбирается любой элемент u_0 из Q_0. Если известны приближения $u_0, u_1, \ldots, u_n$, то для отыскания следующего приближения находится $\mathcal{F}(u_n)$, затем определяется v_n как решение вспомогательной экстремальной задачи

$$\langle v, J'(u_n) \rangle = \int_0^T (\mathcal{F}(u_n), v(t)) dt \to \min, \quad v \in Q_{n+1},$$

далее составляется выпуклая комбинация $u_{n\alpha} = (1 - \alpha) u_n + \alpha v_n$ и вычисляется α_n из $[0, 1]$, минимизирующее функцию $\alpha \to J(u_{n_\alpha})$ на отрезке $[0, 1]$, и, наконец, полагается $u_{n+1} = \alpha_n v_n + (1 - \alpha_n) u_n$. Чаще всего ограничиваются постоянной последовательностью $Q_n = Q$. Если Q — достаточно простое подмножество U_p (напр., шар в пространстве U_p), то вспомогательные задачи легко решаются. Именно к этому частному случаю без труда сводятся одномерные вариационные задачи со свободным правым концом.

Приведенный выше анализ свойств функционала J показывает, что в достаточно общих относительно функций Φ, g предположениях к задаче (11), (15) применимы результаты предшествующих разделов. В частности, из теоремы 1 и леммы 2 следует компактность последовательности u_n в пространстве U_p, всякая предельная точка u этой последовательности является стационарным управлением, т. е. удовлетворяет линеаризованному принципу минимума

$$\int_0^T (\mathcal{F}(u)(t), v(t) - u(t)) dt \geq 0 \quad \forall v \in Q.$$

Если стационарное управление единственно, то оно является решением задачи (11), (15). Требование единственности можно заменить предположением о выпуклости функционала J, в этой ситуации можно применить теоремы 2, 3.

4. Кратко обсудим основные элементы новизны данной статьи. В первую очередь следует отметить переход от множества Q к исчерпывающей это множество последовательности множеств Q_n. Это позволяет на каждом шаге решать задачи минимизации на более простых (по сравнению с Q) множествах, что автоматически приводит к большей эффективности метода. Далее, теорема 1 существенным образом расширяет область применимости метода условного градиента, аналогичные ей результаты ранее были известны лишь для конечномерного пространства. Лемма 2 дает возможность применить к задачам оптимального управления методы топологии и вариационного исчисления в целом [5]–[9]. Результаты раздела 2 относятся к традиционным для данного круга вопросов выпуклым функционалам, однако найденные в теоремах 2, 3 оценки скорости сходимости также являются новыми.

Литература

1. Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач. Задача минимизации в функциональных пространствах, регуляризация, аппроксимация.* – М.: Наука, 1981. – 400 с.
2. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. *Приближенные методы решения экстремальных задач.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1968. – 179 с.
3. Поляк Б.Т. *Введение в оптимизацию.* – М.: Наука. 1983. – 384 с.
4. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. *Численные методы в экстремальных задачах.* – М.: Наука, 1975. – 319 с.
5. Бобылев А.Н., Емельянов С.В., Коровин С.К. *Геометрические методы в вариационных задачах.* – М.: Изд-во Магистр, 1998. – 658 с.
6. Скрыпник И.В. *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач.* – М.: Наука, 1990. – 442 с.
7. Климов В.С., Сенчакова Н.В. *Об относительном вращении многозначных потенциальных векторных полей* // Матем. сб. – 1991. – Т. 182. – № 10. – С. 1393–1407.
8. Климов В.С. *Бесконечномерный вариант теоремы Пуанкаре–Хопфа и гомологические характеристики функционалов* // Матем. сб. – 2001. – Т. 192. – № 1. – С. 51– 66.
9. Климов В.С. *Бесконечномерная версия теории Морса для липшицевых функционалов* // Матем. сб. – 2002. – Т. 196. – № 6. – С. 105–122.

Ярославский государственный университет

Поступили
первый вариант 12.03.2003
окончательный вариант 03.06.2004