ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 11 (438)

УДК 517.95

*В.Н. ПАВЛЕНКО, О.В. УЛЬЯНОВА*

# МЕТОД ВЕРХНИХ И НИЖНИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

## Введение

Рассматривается проблема существования сильных решений краевых задач вида

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)u_{x_j} + c(x)u = g(x,u(x)), \tag{1}$$

$$Bu|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, с границей $\Gamma$ класса $C_{2,\alpha}$, $\alpha \in (0,1]$ ([1], с. 23), где дифференциальный оператор $L$ равномерно эллиптический в $\Omega$, а (2) — либо однородное граничное условие Дирихле $u|_\Gamma = 0$, либо третье краевое условие $\frac{\partial u}{\partial n_L} + \sigma(x)u|_\Gamma = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n_L} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}\cos(n,x_j)$, $n$ — внешняя нормаль к границе $\Gamma$, $\cos(n,x_j)$ — направляющие косинусы нормали $n$, функция $\sigma \in C_{1,\alpha}(\Gamma)$ ([1], с. 23) неотрицательна на $\Gamma$. Коэффициенты $a_{ij}$, $b_j$, $c$ оператора $L$ непрерывны по Гёльдеру с показателем $\alpha$ вместе с частными производными $(a_{ij})_{x_j}$ на $\overline{\Omega}$, $a_{ij}|_\Gamma \in C_{1,\alpha}(\Gamma)$, нелинейность $g(x,u)$ равна разности суперпозиционно измеримых функций $g_2(x,u)$ и $g_1(x,u)$, неубывающих по переменной $u$. Непрерывность $g(x,u)$ по $u$ не предполагается. Сильным решением задачи (1)–(2) называют функцию $u \in \mathbf{W}^2_q(\Omega)$, $q > 1$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду на $\Omega$, для которой след $Bu(x)$ на $\Gamma$ равен нулю.

Получены предложения о существовании сильных решений задачи (1)–(2). Доказательства базируются на абстрактной схеме метода верхних и нижних решений из [2]. В работах H. Amann и его учеников [3]–[7] были заложены основы метода исследования краевых задач для уравнений эллиптического и параболического типов с гладкими нелинейностями, основанного на использовании верхних и нижних решений. C.A. Stuart модифицировал этот подход применительно к уравнениям эллиптического типа с разрывной нелинейностью $g(x,u) \equiv g(u)$ в [8]. Его результаты получили дальнейшее развитие в [9]–[11]. К изучению первой краевой задачи для уравнений параболического типа с разрывной нелинейностью техника верхних и нижних решений была применена в [12], [13], а также в [2] и [14]. Наиболее общие теоремы о существовании сильных решений задачи (1)–(2) были установлены в [15] топологическими методами с использованием верхних и нижних решений. В случае граничного условия Дирихле и формально самосопряженного оператора $L$ с $c(x) \equiv 0$ в [16], [17] вариационным методом доказано существование сильных решений задачи (1)–(2) при более слабых ограничениях на разрывы нелинейности $g(x,u)$, чем в [15]. А именно, в [16] и [17] на разрывы $g(x,\cdot)$, удовлетворяющие условию $g(x,u-) < g(x,u+)$, какие-либо дополнительные ограничения не накладываются. Здесь $g(x,u-) = \lim\limits_{s\to u-0} g(x,s)$, $g(x,u+) = \lim\limits_{s\to u+0} g(x,s)$. В данной работе в отличие от [16], [17] рассмотрены более общие краевые условия, не предполагаются самосопряженность дифференциального

Работа выполнена при финансовой поддержке Международной соросовской программы образования в области точных наук (грант № d13).

оператора $L$ и коэрцитивность оператора краевой задачи (1)–(2) в рассматриваемых функциональных пространствах, а по сравнению с [15] ослаблены ограничения на точки разрыва нелинейности $g(x,u)$ по $u$.

## 1. Формулировка основных результатов

Здесь и далее смысл обозначений $L$, $B$, $g$ тот же, что и во введении, $g(x,u) = g_2(x,u) - g_1(x,u)$, функции $g_i(x,u)$, $i = 1,2$, суперпозиционно измеримые и неубывающие по $u$ при почти всех $x \in \Omega$.

**Определение 1.** Верхним (нижним) решением задачи (1)–(2) называется функция $u \in \mathbf{W}_q^2(\Omega)$, $q > 1$, такая, что $Lu(x) \geq g_2(x, u(x)) - g_1(x, u(x)-)$ $(Lu(x) \leq g_2(x, u(x)) - g_1(x, u(x)+))$ почти всюду на $\Omega$, и след $Bu(x)$ на $\Gamma$ неотрицателен (неположителен).

**Определение 2.** Будем говорить, что для уравнения (1) выполнено A1-условие, если найдется не более чем счетное семейство поверхностей $\{S_i,\ i \in I\}$, $S_i = \{(x,u) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid u = \varphi_i(x),\ x \in \Omega\}$, $\varphi_i \in \mathbf{W}^2_{\mathrm{loc},1}(\Omega)$, для которых при почти всех $x \in \Omega$ неравенство $g_1(x, u-) < g_1(x, u+)$ влечет существование $i \in I$ такого, что $u = \varphi_i(x)$ и либо

$$(L\varphi_i(x) + g_1(x, \varphi_i(x)-) - g_2(x, \varphi_i(x)))(L\varphi_i(x) + g_1(x, \varphi_i(x)+) - g_2(x, \varphi_i(x))) > 0,$$

либо

$$L\varphi_i(x) = g(x, \varphi_i(x)).$$

**Теорема 1.** *Предположим, что*

1) *уравнение* (1) *удовлетворяет* A1-*условию*;
2) *задача* (1)–(2) *имеет нижнее* $\varphi(x)$ *и верхнее* $\psi(x)$ *решения из пространства* $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$, $q > n$, *такие, что* $\varphi(x) \leq \psi(x)$ *на* $\Omega$;
3) *для почти всех* $x \in \Omega$ $|g_i(x,u)| \leq a(x)$ $\forall u \in [\varphi(x), \psi(x)]$, *где* $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $i = 1,2$.

*Тогда задача* (1)–(2) *имеет сильное решение* $u \in \mathbf{W}_q^2(\Omega)$.

**Следствие.** Предположим, что

1) уравнение (1) удовлетворяет A1-условию;
2) существуют постоянные $R_1 \leq 0$ и $R_2 \geq 0$ такие, что для почти всех $x \in \Omega$ верны неравенства
$$c(x)R_1 + g_1(x, R_1+) \leq g_2(x, R_1), \quad c(x)R_2 + g_1(x, R_2-) \geq g_2(x, R_2);$$
3) для почти всех $x \in \Omega$ $|g_i(x,u)| \leq a(x)$ при любом $u \in [R_1, R_2]$, где $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q > n$, $i = 1,2$.

Тогда задача (1)–(2) имеет сильное решение $u \in \mathbf{W}_q^2(\Omega)$.

## 2. План доказательства теоремы 1, вспомогательные результаты

Доказательство теоремы 1 распадается на два этапа. Вначале устанавливается существование $u \in \mathbf{W}_q^2(\Omega)$, удовлетворяющей граничному условию (2) и для почти всех $x \in \Omega$ включению

$$-Lu(x) + g_2(x, u(x)) \in [g_1(x, u(x)-), g_1(x, u(x)+)]. \tag{3}$$

На втором этапе доказывается, что для почти всех $x \in \Omega$ функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1) и, значит, является сильным решением задачи (1)–(2).

Часто используемым инструментом на первом этапе доказательства является обобщенный принцип максимума для дифференциального оператора $L$.

**Теорема 2** ([15]). *Предположим дополнительно, что коэффициент* $c(x)$ *оператора* $L$ *неотрицательный на* $\Omega$. *Тогда для произвольных* $u, v \in \mathbf{W}_q^2(\Omega)$, $q > n$, *неравенства* $(Lu - Lv)\times$ $\times(v-u)^+ \geq 0$ *почти всюду на* $\Omega$ *и* $\left(\frac{\partial u}{\partial n_L} - \frac{\partial v}{\partial n_L}\right)(v-u)^+|_\Gamma \geq 0$ *почти всюду на* $\Gamma$, *влекут неравенство* $u(x) \geq v(x)$ *для почти всех* $x \in \Omega$.

По определению, $(v-u)^+(x)=\max\{v(x)-u(x),0\}$.

Фиксируем константы $q>n$, $k>0$ и определим оператор $\Lambda$ на $D(\Lambda)=\{v\in\mathbf{W}_q^2(\Omega)\,|\,Bv|_\Gamma=0\}\subset\mathbf{L}_p(\Omega)$, $p=q/(q-1)$, со значениями в $\mathbf{L}_q(\Omega)$ равенством $\Lambda v=Lv(x)+kv(x)\ \ \forall v\in D(\Lambda)$. Так как оператор $L$ равномерно эллиптический, то найдется положительная константа $\chi$, для которой $\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\ge\chi|\xi|^2\ \ \forall\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n$, $x\in\Omega$. Если $Bu=\frac{\partial u}{\partial n_L}+\sigma(x)u$, то для любого $u\in D(\Lambda)$ и $\varepsilon>0$

$$
\begin{aligned}
(Lu,u)&=\int_\Omega Lu(x)u(x)dx=\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx-\int_\Gamma\frac{\partial u}{\partial n_L}(x)u(x)ds+\\
&+\sum_{i=1}^n\int_\Omega b_i(x)u_{x_i}u(x)dx+\int_\Omega c(x)u^2(x)dx\ge\chi\sum_{i=1}^n\int_\Omega u_{x_i}^2dx+\int_\Gamma\sigma(x)u^2(x)ds-\\
&-\sum_{i=1}^n\max_{\overline{\Omega}}|b_i(x)|\Big(\frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega u_{x_i}^2dx+\frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega u^2(x)dx\Big)-\max_{\overline{\Omega}}|c(x)|\int_\Omega u^2(x)dx\ge\\
&\ge\Big(\chi-\frac{a\varepsilon}{2}\Big)\sum_{i=1}^n\int_\Omega u_{x_i}^2dx-\Big(\frac{(An)}{2\varepsilon}+A_1\Big)\int_\Omega u^2(x)dx,
\end{aligned}
$$

где $A=\max\limits_{1\le i\le n}\max\limits_{\overline{\Omega}}|b_i(x)|$, $A_1=\max\limits_{\overline{\Omega}}|c(x)|$. Беря $\varepsilon=\frac{\chi}{A}$ и постоянную $k\ge k_1=\frac{\chi}{2}+\frac{A^2n}{2\chi}+A_1$, получим $(Lu+ku,u)\ge\frac{\chi}{2}\|u\|^2_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}$. Из этого, учитывая компактность вложения $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$ в $\mathbf{L}_p(\Omega)$ (поскольку $p>n/(n-1)$ и $n\ge2$), заключаем о справедливости оценки

$$(\Lambda u,u)\ge M\|u\|^2_{\mathbf{L}_p(\Omega)}\ \ \forall u\in D(\Lambda)\quad\text{при}\ \ k\ge k_1,\tag{4}$$

где $M=\frac{\chi}{2d^2}$, $d$ — норма оператора вложения $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$ в $\mathbf{L}_p(\Omega)$. Аналогично неравенство (4) доказывается и в случае, когда $Bu=u$. Из (4) следует, что решение краевой задачи $Lu(x)+ku(x)=0$, $Bu|_\Gamma=0$ из пространства $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ единственно. Отсюда, в соответствии с результатами Агмона–Дуглиса–Ниринберга ([18], гл. V, § 15), делаем вывод о справедливости априорной оценки

$$\|u\|_{\mathbf{W}_q^2(\Omega)}\le\delta\|\Lambda u\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}\quad\forall u\in D(\Lambda).\tag{5}$$

Известно ([1], с. 165), что задача $Lu(x)+ku(x)=f$, $Bu|_\Gamma=0$ имеет единственное решение из $C_{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ для любого $f\in C_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, если $k$ больше некоторого числа $k_0\ge k_1$. Так как $C_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ всюду плотно в $\mathbf{L}_q(\Omega)$, то последнее совместно с (5) позволяет заключить о сюръективности $\Lambda$ при таких $k$. Поэтому в силу (4) оператор $\Lambda$ непрерывно обратим при $k>k_0$ и, кроме того, из (5) следует компактность $\Lambda^{-1}:\mathbf{L}_q(\Omega)\to\mathbf{L}_p(\Omega)$, поскольку вложение $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ в $\mathbf{L}_p(\Omega)$ компактно. Таким образом, обоснован следующий результат.

**Теорема 3.** *Если $q>n$, $p=q/(q-1)$, то существует $k_0>0$ такое, что для любого $k>k_0$ оператор $\Lambda:D(\Lambda)\subset\mathbf{L}_p(\Omega)\to\mathbf{L}_q(\Omega)$, $D(\Lambda)=\{v\in\mathbf{W}_q^2(\Omega)\,|\,Bu|_\Gamma=0\}$, заданный равенством $\Lambda v=Lv+kv\ \ \forall v\in D(\Lambda)$, непрерывно обратим, для него верны оценки* (4) *и* (5), *и обратный оператор $\Lambda^{-1}:\mathbf{L}_q(\Omega)\to\mathbf{L}_p(\Omega)$ компактный.*

Для доказательства существования решения включения (3) из $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$, удовлетворяющего граничному условию (2), оно преобразуется к операторному включению

$$-\Lambda u+F_2u\in SF_1u,\tag{6}$$

где $\Lambda$ — оператор из теоремы 3, $F_i:\mathbf{L}_p(\Omega)\to\mathbf{L}_q(\Omega)$, $i=1,2$, — нелинейные ограниченные отображения, $SF_1$ — секвенциальное замыкание $F_1$ [2]. При этом любое решение (6) удовлетворяет включению (3).

**Определение 3** ([2]). Секвенциальным замыканием локально ограниченного отображения $F : E_1 \to E_2$ ($E_1$, $E_2$ — банаховы пространства) называется отображение $SF$ из $E_1$ в $E_2$ (вообще говоря, многозначное), значение $SFx$ ($x \in E_1$) которого совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества всех слабо предельных точек в $E_2$ последовательностей вида $(Fx_n)$, где $x_n \to x$ в $E_1$.

Пространства $\mathbf{L}_p(\Omega)$, $\mathbf{L}_q(\Omega)$ полуупорядочены конусами $K_1$, $K_2$ неотрицательных функций из $\mathbf{L}_p(\Omega)$ и $\mathbf{L}_q(\Omega)$ соответственно. Доказательство существования $u \in D(\Lambda)$, удовлетворяющего включению (6), сводится к проверке условий следующей общей теоремы.

**Теорема 4** ([2]). *Предположим, что*

1) *банаховы пространства $E_1$, $E_2$ полуупорядочены, $E_2$ — правильным конусом $K_1$* ([19], *с.* 34)*, а пространство $E_2$ — конусом $K_2$;*
2) *оператор $F_1 : E_1 \to E_2$ локально ограниченный, $\Lambda : D(\Lambda) \to E_2$ ($D(\Lambda) \subset E_1$), причем многозначное отображение $\Lambda + SF_1$ биективно ($SF_1$ — секвенциальное замыкание оператора $F_1$);*
3) *оператор $F_2 : E_1 \to E_2$ $(K_1, K_2)$ монотонный, т. е. для любых $x_1, x_2 \in E_1$ неравенство $x_1 \le x_2$ влечет $F_2x_1 \le F_2x_2$;*
4) *существуют $u_1, u_2 \in D(\Lambda)$ такие, что $\Lambda u_1 + F_1u_1 \le F_2u_1$, $\Lambda u_2 + F_1u_2 \ge F_2u_2$ и $u_1 \le u_2$;*
5) *если $u, v \in D(\Lambda)$, $g \in SF_1u$, $w \in SF_2v$, и $\Lambda u + g \le \Lambda v + w$, то $u \le v$.*

*Тогда на конусном отрезке $\langle u_1, u_2\rangle$* ([19], *с.* 128) *найдется элемент $u \in D(\Lambda)$, удовлетворяющий включению $F_2u - \Lambda u \in SF_1u$.*

Для проверки условия 2) теоремы 4 используется следующий результат.

**Теорема 5** ([2]). *Пусть $E$ — вещественное рефлексивное банахово пространство, оператор $\Lambda : D(\Lambda) \to E^*$ ($D(\Lambda) \subset E$) максимально монотонный и $0 \in D(\Lambda)$, оператор $T : E \to E^*$ монотонный и для отображения $\Lambda + T$ выполнено условие коэрцитивности: $(\Lambda x + Tx, x) \ge c(\|x\|) \cdot \|x\| \;\; \forall x \in D(\Lambda)$, где $c : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ — непрерывная на $\mathbf{R}_+$ функция и $\lim\limits_{r\to+\infty} c(r) = +\infty$. Тогда отображение $\Lambda + ST$ сюръективно.*

## 3. Доказательство основных результатов

**Доказательство теоремы 1.** По условию $q > n \ge 2$, поэтому $\mathbf{W}^2_q(\Omega)$ непрерывно вложено в $\mathbf{L}_p(\Omega)$, $p = q/(q-1)$, поскольку $1 < p < 2$. Согласно теореме 3 найдется положительное число $k$ такое, что линейный оператор $\Lambda : D(\Lambda) \to \mathbf{L}_q(\Omega)$, $D(\Lambda) = \{v \in \mathbf{W}^2_q(\Omega) |\, Bv|_\Gamma = 0\} \subset \mathbf{L}_p(\Omega)$, определенный равенством $\Lambda v = Lv(x) + kv(x)$, непрерывно обратим, для него верна оценка (4) и $k + c(x) \ge 0$ на $\Omega$. Перепишем уравнение (1) в виде

$$Lu(x) + ku(x) + g_1(x, u(x)) = g_2(x, u(x)) + ku(x). \tag{1'}$$

Для почти всех $x \in \Omega$ определим $\widetilde{g}_i$, $i = 1, 2$, следующим образом: если $u < \varphi(x)$, то $\widetilde{g}_1(x, u) = g_1(x, \varphi(x)-)$, $\widetilde{g}_2(x, u) = g_2(x, u) + k\varphi(x)$; если $\varphi(x) \le u \le \psi(x)$, то $\widetilde{g}_1(x, u) = g_1(x, u)$, $\widetilde{g}_2(x, u) = g_2(x, u) + ku$; если $u > \psi(x)$, то $\widetilde{g}_1(x, u) = g_1(x, \psi(x)+)$, $\widetilde{g}_2(x, u) = g_2(x, u) + k\psi(x)$. Функции $\varphi$ и $\psi$ из условия 2) теоремы 1. Заметим, что построенные функции $\widetilde{g}_i$, $i = 1, 2$, суперпозиционно измеримые и неубывающие по $u$ при почти всех $x \in \Omega$. Кроме того, верна оценка для почти всех $x \in \Omega$

$$|\widetilde{g}_i(x, u)| \le a(x) + \lambda = a_1(x) \quad \forall u \in \mathbf{R}, \tag{7}$$

где $\lambda = k(\max\limits_{\overline{\Omega}} |\varphi(x)| + \max\limits_{\overline{\Omega}} |\psi(x)|)$, $a(x)$ из условия 3) теоремы 1 ($\lambda$ конечно, поскольку $q > n$ и, значит, $\mathbf{W}^2_q(\Omega)$ непрерывно вложено в $\mathbf{C}(\overline{\Omega})$, а по условию 2) теоремы 1 $\varphi$ и $\psi$ из $\mathbf{W}^2_q(\Omega)$ ). В уравнении ($1'$) заменим $g_1$ и $g_2$ на $\widetilde{g}_1$ и $\widetilde{g}_2$ соответственно и полученному уравнению сопоставим включение

$$-Lu(x) - ku(x) + \widetilde{g}_2(x, u(x)) \in [\widetilde{g}_1(x, u(x)-), \widetilde{g}_2(x, u(x)+)], \quad x \in \Omega. \tag{$3'$}$$

Покажем, что для любого $u \in D(\Lambda)$, удовлетворяющего ($3'$) почти всюду на $\Omega$, верны неравенства $\varphi(x) \le u(x) \le \psi(x)$ на $\Omega$, из чего немедленно следует истинность для $u(x)$ (3) при почти всех $x \in \Omega$. По определению нижнего решения задачи (1)–(2) $L\varphi(x) + k\varphi(x) + g_1(x, \varphi(x)+) \le g_2(x, \varphi(x)) + k\varphi(x)$ почти всюду на $\Omega$, $B\varphi(x)|_\Gamma \le 0$ почти всюду на $\Gamma$. Если $u \in D(\Lambda)$ и удовлетворяет ($3'$) для почти всех $x \in \Omega$, то

$$\begin{aligned} L(\varphi - u)(x) + k(\varphi - u)(x) \le \widetilde{g}_1(x, u(x)+) - g_1(x, \varphi(x)+) + \\ + g_2(x, \varphi(x)) - \widetilde{g}_2(x, u(x)) + k\varphi(x) \ \text{ почти всюду на } \ \Omega, \end{aligned} \tag{8}$$

$$B(\varphi - u)(x)|_\Gamma \le 0 \ \text{ почти всюду на } \ \Gamma. \tag{9}$$

На множестве $\{x \in \Omega \mid u(x) < \varphi(x)\}$ правая часть неравенства (8) равна нулю, поэтому $(\Lambda u - \Lambda\varphi)(\varphi - u)^+(x) \ge 0$ почти всюду на $\Omega$. Из (9) следует, что $\left(\frac{\partial u}{\partial n_L} - \frac{\partial \varphi}{\partial n_L}\right)(\varphi - u)^+|_\Gamma \ge 0$ почти всюду на $\Gamma$. При рассмотрении третьей краевой задачи следует учесть, что неравенство (9) влечет $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_L} - \frac{\partial u}{\partial n_L}\right)(x)|_\Gamma \le \sigma(x)(u - \varphi)(x)|_\Gamma \le 0$ на множестве $\{x \in \Gamma \mid u(x) < \varphi(x)\}$ (воспользовались неотрицательностью $\sigma$ на $\Gamma$). Таким образом, выполнены все условия теоремы 2 и, значит, $u(x) \ge \varphi(x)$ на $\Omega$. Аналогично доказывается неравенство $u(x) \le \psi(x)$ на $\Omega$.

Действительно, по определению верхнего решения задачи (1)–(2) $L\psi(x) + k\psi(x) + g_1(x, \psi(x)-) \ge g_2(x, \psi(x)) + k\psi(x)$ почти всюду на $\Omega$, $B\psi(x)|_\Gamma \ge 0$ почти всюду на $\Gamma$. Тогда, если $u \in D(\Lambda)$ и удовлетворяет включению ($3'$) для почти всех $x \in \Omega$, то

$$\begin{aligned} L(\psi - u)(x) + k(\psi - u)(x) \ge \widetilde{g}_1(x, u(x)-) - g_1(x, \psi(x)-) + \\ + g_2(x, \psi(x)) - \widetilde{g}_2(x, u(x)) + k\psi(x) \ \text{ почти всюду на } \ \Omega, \end{aligned} \tag{$8'$}$$

$$B(\psi - u)(x)|_\Gamma \ge 0 \ \text{ почти всюду на } \ \Gamma. \tag{$9'$}$$

На множестве $\{x \in \Omega \mid u(x) > \psi(x)\}$ правая часть неравенства ($8'$) равна нулю, поэтому $(\Lambda\psi - \Lambda u)(u - \psi)^+(x) \ge 0$ почти всюду на $\Omega$. Из ($9'$) следует, что $\left(\frac{\partial \psi}{\partial n_L} - \frac{\partial u}{\partial n_L}\right)(u - \psi)^+(x) \ge 0$ почти всюду на $\Gamma$ (при рассмотрении третьего краевого условия надо учесть, что неравенство ($9'$) влечет неравенство $\left(\frac{\partial \psi}{\partial n_L} - \frac{\partial u}{\partial n_L}\right)(x)|_\Gamma \ge \sigma(x)(u - \psi)(x)|_\Gamma \ge 0$ на множестве $\{x \in \Gamma \mid u(x) > \psi(x)\}$. Осталось воспользоваться теоремой 2, чтобы сделать заключение о справедливости неравенства $u(x) \le \psi(x)$ на $\Omega$.

Итак, доказано, что для любого $u \in D(\Lambda)$, удовлетворяющего ($3'$) почти всюду на $\Omega$, справедливо и включение (3) для почти всех $x \in \Omega$. Чтобы установить существование решения включения ($3'$), принадлежащего $D(\Lambda)$, перейдем к операторной постановке этой задачи в банаховом пространстве $E = \mathbf{L}_p(\Omega)$, полуупорядоченном конусом $K_1$ неотрицательных функций из $L_p(\Omega)$. Сопряженное с $E$ пространство $E^* = \mathbf{L}_q(\Omega)$ полуупорядочено конусом $K_2$ неотрицательных функций из $\mathbf{L}_q(\Omega)$. Отметим, что $E$ рефлексивно, а конусы $K_1$, $K_2$ правильные ([19], с. 34). Кроме уже определенного выше оператора $\Lambda$ рассмотрим операторы $F_i : E \to E^*$, заданные равенствами $F_i u = \widetilde{g}_i(x, u(x))$, $i = 1, 2$. Из оценки (7) следует ограниченность этих операторов на всем пространстве $E$. Так как $\widetilde{g}_i(x, u)$ неубывающая по $u$ на $\mathbf{R}$ для почти всех $x \in \Omega$, $i = 1, 2$, то оператор $F_1$ монотонный на $E$, т. е. $(F_1 u - F_1 v,\ u - v) \ge 0$ для любых $u, v \in E$, а $F_2$ $(K_1, K_2)$ монотонный. Задача нахождения $u \in D(\Lambda)$, для которого верно ($3'$) при почти всех $x \in \Omega$, равносильна отысканию $u \in D(\Lambda)$, удовлетворяющего операторному включению

$$-\Lambda u + F_2 u \in SF_1 u, \tag{10}$$

где $SF_1$ — секвенциальное замыкание $F_1$.

На самом деле, как показано в [20], для произвольного $u \in E$ множество $SF_1$ совпадает с $F_1^{\Box}u = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \overline{\mathrm{co}}\{y = F_1 v \mid \|v-u\| \le \varepsilon\}$ — значением овыпукливания оператора $F_1$ в точке $u$ ($\overline{\mathrm{co}}G$ — замкнутая выпуклая оболочка множества $G \subset E^*$), а в ([21], с. 174) было установлено, что $F_1^{\Box}u = \{z : \Omega \to \mathbf{R} \mid z$ — измеримая по Лебегу на $\Omega$ и для почти всех $x \in \Omega$ значение $z(x) \in [\widetilde{g}_1(x,u(x)-), \widetilde{g}_1(x,u(x)+)]\}$ для любого $u \in E$ (заметим, что суперпозиционная измеримость $\widetilde{g}_1$ и ее монотонность по $u$ влекут борелевость (mod 0) этой функции ([21], с. 157).

Для доказательства существования $u$, удовлетворяющего (10), достаточно проверить выполнение всех условий теоремы 4. Выше уже было показано, что условия 1) и 2) этой теоремы выполнены, а оператор $F_1$ монотонный и ограниченный на $E$. Линейный оператор $\Lambda$ в силу оценки (4) монотонный на $D(\Lambda)$ и, кроме того, он непрерывно обратим. Из этого заключаем о максимальной монотонности $\Lambda$ [22]. Из оценки (4) для $\Lambda$ следует неравенство $(\Lambda u + F_1 u, u) \ge M\|u\|^2 + (F_1 u - F_1 0, u) + (F_1 0, u) \ge (M\|u\| - \|F_1 0\|) \cdot \|u\| \quad \forall u \in D(\Lambda)$ и строгая монотонность отображения $\Lambda + SF_1$. Отсюда и из теоремы 5 делаем вывод о биективности отображения $\Lambda + SF_1$ и, значит, условие 2) теоремы 4 также выполняется. Пусть $u_1 = \Lambda^{-1}(-2a_1)$, $u_2 = \Lambda^{-1}(2a_1)$, где $a_1 \in \mathbf{L}_q(\Omega)$ — функция из неравенства (7). Поскольку $u_1, u_2 \in D(\Lambda)$, $\Lambda u_1(x) = -2a_1(x)$, $\Lambda u_2(x) 2a_1(x)$ и $a_1(x)$ неотрицательна на $\Omega$, то в силу обобщенного принципа максимума (теорема 2) $u_1(x) \le 0$, $u_2(x) \ge 0$ на $\Omega$ (воспользовались неравенствами $\frac{\partial u_i}{\partial n_L}(x)|_\Gamma = -\sigma(x)u_i(x)|_\Gamma \le 0$ на множестве $\{x \in \Gamma \mid u_i(x) > 0\}$, $i = 1, 2$, в случае третьего краевого условия). Так как $\widetilde{g}_2(x, u_1(x)) - \widetilde{g}_1(x, u_1(x)) \ge -2a_1(x)$, $\widetilde{g}_2(x, u_2(x)) - \widetilde{g}_1(x, u_2(x)) \le 2a_1(x)$ почти всюду на $\Omega$ (это следствие условия 3) теоремы 1), то $\Lambda u_1 + F_1 u_1 \le F_2 u_1$, $\Lambda u_2 + F_1 u_2 \ge F_2 u_2$. Следовательно, условие 4) теоремы 4 выполнено. Осталось проверить условие 5) этой теоремы. Предположим, что $u, v \in D(\Lambda)$, $f \in SF_1 u$, $w \in SF_1 v$ и $\Lambda u + f \le \Lambda v + w$. Тогда $\Lambda(u-v)(x) \le w(x) - f(x)$ почти всюду на $\Omega$, $B(u-v)(x)|_\Gamma = 0$ почти всюду на $\Gamma$, причем $f(x) \in [\widetilde{g}_1(x,u(x)-), \widetilde{g}_1(x,u(x)+)]$, $w(x) \in [\widetilde{g}_1(x,v(x)-), \widetilde{g}_1(x,v(x)+)]$ для почти всех $x \in \Omega$. Из монотонности $\widetilde{g}_1(x,s)$ по $s$ на $\mathbf{R}$ следует, что $w(x) - f(x) \le 0$ на множестве $\{x \in \Omega \mid u(x) > v(x)\}$. Поэтому $(\Lambda v - \Lambda u)(u-v)^+(x) \ge 0$ почти всюду на $\Omega$. Кроме того, $\left(\frac{\partial v}{\partial n_L} - \frac{\partial u}{\partial n_L}\right)(u-v)^+(x)|_\Gamma \ge 0$ почти всюду на $\Gamma$, и, значит, согласно теореме 2 $u(x) \le v(x)$ для почти всех $x \in \Omega$. Отсюда заключаем, что для отображения $\Lambda + SF_1$ выполнено условие 5) теоремы 4. На этом проверка условий теоремы 4 завершается, что позволяет сделать вывод о существовании $u \in D(\Lambda)$, удовлетворяющего включению (10). Ранее было показано, что тогда $u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ удовлетворяет включению (3). Для завершения доказательства теоремы 1 осталось установить, что $Lu(x) = g(x, u(x))$ почти всюду на $\Omega$. Обозначим через $\Omega_1$ множество элементов $x \in \Omega$, для которых значение $u(x)$ является точкой непрерывности $g_1(x, \cdot)$, а через $\Omega_2$ — множество $\{x \in \Omega \mid g_1(x,u(x)-) < g_1(x,u(x)+)\}$. Тогда $\Omega_1 \cup \Omega_2$ с точностью до множества меры нуль совпадает с $\Omega$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Если $x \in \Omega_1$, то $[g_1(x,u(x)-), g_1(x,u(x)+)] = \{g_1(x,u(x))\}$, и, значит, $Lu(x) = g(x,u(x))$ почти всюду на $\Omega_1$. Так как для уравнения (1) выполнено A1-условие, то для почти всех $x \in \Omega_2$ либо $Lu(x) = g(x,u(x))$, либо для некоторого $i \in I$ $u(x) = \varphi_i(x)$ и $(L\varphi_i(x) + g_1(x,\varphi_i(x)-) - g_2(x,\varphi_i(x)))(L\varphi_i(x) + g_1(x,\varphi_i(x)+) - g_2(x,\varphi_i(x))) > 0$ (последнее означает, что $-L\varphi_i(x) + g_2(x,\varphi_i(x)) \notin [g_1(x,\varphi_i(x)-), g_1(x,\varphi_i(x)+)]$ ). Поэтому, если предположить, что множество $\{x \in \Omega \mid Lu(x) \ne g(x,u(x))\}$ имеет ненулевую меру, то, поскольку $I$ не более чем счетно, то для некоторого $i \in I$ отличной от нуля будет мера множества

$$\Omega_2^+ = \{x \in \Omega_2 \mid u(x) = \varphi_i(x)\ (L\varphi_i(x) + g_1(x,\varphi_i(x)-) - g_2(x,\varphi_i(x))) \times \\ \times (L\varphi_i(x) + g_1(x,\varphi_i(x)+) - g_2(x,\varphi_i(x))) > 0\}.$$

Отсюда, т. к. $Lu(x) = L\varphi_i(x)$ почти всюду на $\Omega_2^+$ ([23], гл. 7, с. 151), следует, что на множестве ненулевой меры $-Lu(x) + g_2(x,u(x)) \notin [g_1(x,u(x)-), g_1(x,u(x)+)]$. Полученное противоречие доказывает, что $Lu(x) = g(x,u(x))$ почти всюду на $\Omega$. $\square$

**Доказательство следствия.** Условие 2) следствия гарантирует выполнение условия 2) теоремы 1 с $\varphi(x) \equiv R_1$, $\psi(x) \equiv R_2$. Поэтому справедливость следствия вытекает из теоремы 1. $\square$

## 4. Пример

Пусть в уравнении (1) $L = -\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_1}$, $g(x,u) \equiv g(u)$, а $g(u)$ задается равенствами $g(u) = u + 1,5$ при $u < -0,75$, $g(u) = |u| - 0,5$, для $u \in [-0,75, 0,25)$, $g(u) = |u-1| - 0,5$ при $u \geq 0,25$. Функция $g(u)$ борелева и имеет две точки разрыва $-0,75$ и $0,25$ на $\mathbf{R}$, которым соответствуют в $\Omega \times \mathbf{R}$ две поверхности разрыва $S_1 = \{(x,u) \in \Omega \times \mathbf{R} \mid u = -0,75\}$, $S_2 = \{(x,u) \in \Omega \times \mathbf{R} \mid u = 0,25\}$. Она совпадает с разностью двух неубывающих функций $g_2(u)$ и $g_1(u)$, определяемых формулами

$$g_1(u) = \begin{cases} 0, & u < -0,75, \\ u + 1,25, & -0,75 \leq u < 0, \\ 1,25, & 0 \leq u < 0,25, \\ u + 1, & 0,25 \leq u < 1, \\ 2, & u > 1, \end{cases} \qquad g_2(u) = \begin{cases} u + 1,5, & u < -0,75, \\ 0,75, & -0,75 \leq u < 0, \\ u + 0,75, & 0 \leq u \leq 0,25, \\ 1,5, & 0,25 \leq u \leq 1, \\ u + 0,5, & u > 1. \end{cases}$$

Заметим, что $g_1$ разрывна только при $u = -0,75$, а $g_2$ — при $u = 0,25$. Отсюда заключаем, что в данном примере для уравнения (1) выполнено A1-условие с семейством поверхностей, состоящем из одной поверхности $S_1$, т. к. $(L\varphi_1(x) - g(x, \varphi_1(x)+))(L\varphi_1(x) - g(x, \varphi_1(x)-)) = g(-0,75+) \cdot g(-0,75-) = 0,25 \cdot 0,75 > 0$, где $\varphi_1(x) \equiv -0,75$. Пусть краевое условие (2) имеет вид $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0$. Тогда для рассматриваемой задачи Неймана верны предположения 2) и 3) следствия с $R_1 = -1$, $R_2 = 1$, $a(x) \equiv 2$ и произвольного $q > n$. Поэтому существует сильное решение этой задачи из пространства $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$. С другой стороны, дифференциальный оператор $L$ не является самосопряженным и, значит, нельзя применить вариационный метод, развитый в [16] и [17]. Кроме того, в пространстве $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$ оператор данной краевой задачи не является коэрцитивным, поскольку для $u(x) \equiv \lambda$ $(\lambda \in \mathbf{R})$ имеем

$$\Delta(\lambda) \equiv \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} u_{x_i}^2 dx + \int_{\Omega} u_{x_1} u(x) dx - \int_{\Omega} g(u(x)) u(x) dx = -\lambda \int_{\Omega} g(\lambda) dx = -\lambda g(\lambda) \operatorname{mes} \Omega,$$

что дает $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \Delta(\lambda) = -\infty$. Нелинейность $g(u)$ не удовлетворяет условию $(L, g)$ оптимальности K.-C. Chang [15], которое включает требование, что на поверхности разрыва $u = \varphi_i(x)$, $x \in \Omega$, нелинейности $g(u,x)$ по $u$ либо $L\varphi_i(x) = g(x, \varphi_i(x))$, либо $(L\varphi_i(x) - g(x, \varphi_i(x)+))(L\varphi_i(x) - g(x, \varphi_i(x)-)) > 0$ для почти всех $x \in \Omega$. В примере это условие нарушается на поверхности $S_2$, т. к. $L\varphi_2(x) \equiv 0$, $g(\varphi_2(x)) = 0,25$, $(L\varphi_2(x) - g(\varphi_2(x)+))(L\varphi_2(x) - g(\varphi_2(x)-)) = g(0,25+)g(0,25-) < 0$. Здесь $\varphi_2(x) \equiv 0,25$. Следовательно, существование сильного решения рассматриваемой краевой задачи из результатов K.-C. Chang не следует.

## Литература


1. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* – М.: Наука, 1964. – 540 с.
2. Павленко В.Н. *О существовании полуправильных решений первой краевой задачи для уравнения параболического типа с разрывной немонотонной нелинейностью* // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 3. – С. 520–526.
3. Amann H. *On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces* // J. Funct. Anal. – 1972. – V. 11. – № 3. – P. 346–384.
4. Amann H. *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces* // SIAM Review. – 1976. – V. 18. – № 4. – P. 620–709.
5. Amann H. *Supersolutions, monotone iterations, and stability* // J. Different. Equat. – 1976. – V. 21. – № 2. – P. 363–377.
6. Amann H. *Existence and multiplicity theorems for semi-linear elliptic boundary value problems* // Math. Z. – 1976. – Bd. 150. – № 3. – S. 281–295.

7. Amann H., Crandall M.G. *On some existence theorems for semi-linear elliptic equations* // Indiana Univ. Math. J. – 1978. – V. 27. – № 5. – P. 779–790.
8. Stuart C.A. *Maximal and minimal solutions of elliptic differential equations with discontinuous nonlinearities* // Math. Z. – 1978. – Bd. 163. – № 3. – S. 239–249.
9. Stuart C.A., Toland J.F. *A property of solutions of elliptic differential equations with discontinuous nonlinearities* // J. London Math. Soc., Ser. 2. – 1980. – V. 21. – № 2. – P. 329–335.
10. Basile N., Mininni M. *Some solvability results for elliptic boundary value problems in resonance at the first eigenvalue with discontinuous nonlinearities* // Boll. Unione Mat. Ital. Ser. 5. – 1980. – V. B-17. – № 3. – P. 1023–1033.
11. Massabo I. *Elliptic boundary value problems at resonance with discontinuous nonlinearities* // Boll. Unione Mat. Ital. Ser. 5. – 1980. – V. B-17. – № 3. – P. 1308–1320.
12. Carl S. *The monotone iterative technique for a parabolic boundary value problems with discontinuous nonlinearity* // Nonlinear Anal. – 1989. – V. 13. – № 12. – P. 1399–1407.
13. Carl S., Heikkila S. *On a parabolic boundary value problems with discontinuous nonlinearity* // Nonlinear Anal. – 1990. – V. 15. – № 11. – P. 1091–1095.
14. Павленко В.Н. *Существование сильных решений уравнений параболического типа с разрывными нелинейностями* // УМН. – 1995. – Т. 50. – № 4. – С. 127–128.
15. Chang K.C. *The obstacle problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearities* // Comm. Pure Appl. Math. – 1980. – V. 33. – № 2. – P. 117–146.
16. Павленко В.Н. *Вариационный метод для уравнений с разрывными операторами* // Вестн. Челябинск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1994. – № 1. – С. 87–85.
17. Павленко В.Н. *Вариационный метод для уравнений эллиптического типа с разрывной нелинейностью* // УМН. – 1994. – Т. 49. – № 4. – С. 138.
18. Агмон С., Дуглис А., Ниринберг Л. *Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы.* – М.: Ин. лит., 1962. – 208 с.
19. Красносельский М.А. *Положительные решения операторных уравнений.* – М.: Физматгиз, 1962. – 396 с.
20. Павленко В.Н. *Метод монотонных операторов в задачах управления распределенными системами эллиптического типа с разрывными нелинейностями* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 8. – С. 49–54.
21. Красносельский М.А., Покровский А.В. *Системы с гистерезисом.* – М.: Наука, 1983. – 272 с.
22. Browder F.E. *Nonlinear maximal monotone operators in Banach space* // Math. Ann. – 1968. – Bd. 175. – № 2. – S. 89–113.
23. Гилбарг Д., Трудингер Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* – М.: Наука, 1989. – 464 с.

*Челябинский государственный университет*

*Поступила* 18.11.1996