ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 10 (497)

УДК 517.958

В.М. БРУК, В.А. КРЫСЬКО

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

В работе устанавливаются достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для системы дифференциально-операторных уравнений смешанного типа (уравнения гиперболического и параболического типов). При соответствующем подборе операторных коэффициентов из рассматриваемого уравнения получается дифференциальное уравнение, описывающее колебания пластинки, — модифицированное уравнение Жермен–Лагранжа (гиперболическое уравнение). При этом для определения температурного поля используется трехмерное уравнение теплопроводности (параболическое уравнение). Полученная система описывает связанную задачу термоупругости пластинок.

Пусть H — гильбертово пространство, L, M — самосопряженные отрицательно определенные операторы в H с областями определения $D(M)\subset D(L)$, C — ограниченный оператор в H. Предполагается, что оператор L перестановочен с C и резольвентой M (определение перестановочности см., напр., в [1], с. 322). На отрезке $[0,T]$ рассмотрим систему

$$\begin{cases} W''(t)+L^2W(t)+\alpha LC\theta(t)=q_1(t),\\ \theta'(t)-M\theta(t)-\beta C^*LW'(t)=q_2(t)\end{cases} \tag{1}$$

($\alpha,\beta>0$) с неизвестными функциями W, θ.

Выберем, например, в качестве $H=L_2(\Omega)$ пространство функций, определенных в ограниченной с гладкой границей области $\Omega=\Omega_1\times[-h/2,h/2]\subset R^3$ ($\Omega_1\subset R^2$, $h>0$) и имеющих суммируемый квадрат нормы; в качестве M, L — операторы, порожденные соответственно выражением $\lambda_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda_0^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ($\lambda_0\neq0$) с граничным условием $\theta|_{\partial\Omega}=0$ и выражением $\gamma(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})$ ($\gamma>0$) с граничным условием $W|_{\partial\Omega_1}=0$. Оператор C определим формулой $C\theta=\int\limits_{-h/2}^{h/2}z\theta(x,y,z)dz$. Тогда $C^*g=z\int\limits_{-h/2}^{h/2}g(x,y,z)dz$. При таком подборе L, M, C и соответствующем выборе чисел α, β, γ из (1) получаются известные уравнения колебания пластинки ([2], с. 336) и уравнение теплопроводности ([3], с. 12).

Далее в целях сокращения записи считаем, что в (1) $\alpha=\beta=1$. В противном случае рассуждения практически не изменятся.

Для сведéния системы (1) к одному уравнению первого порядка введем действующий в пространстве $\widetilde{H}=H\times H\times H$ оператор

$$A_0=\begin{pmatrix}0 & E & 0\\ -L^2 & 0 & -LC\\ 0 & C^*L & M\end{pmatrix}.$$

Здесь и далее E обозначает тождественный оператор в соответствующем пространстве. Отметим, что перестановочность операторов C и L влечет перестановочность C^* и $L^*=L$ ([1], с. 323).

Лемма 1. *Оператор A_0 допускает замыкание A в пространстве $\widetilde{H}$, а оператор A^{-1} существует, ограничен и определен на всем пространстве $\widetilde{H}$.*

Доказательство. Операторная матрица

$$\begin{pmatrix} CM^{-1}C^* & -L^{-2} & -L^{-1}CM^{-1} \\ E & 0 & 0 \\ -LM^{-1}C^* & 0 & M^{-1} \end{pmatrix}$$

определяет ограниченный оператор в $\widetilde{H}$. Непосредственная проверка показывает, что ее произведение (в любом порядке) на операторную матрицу, определяющую оператор A_0, дает единичную операторную матрицу. Отсюда следуют все утверждения леммы, причем оператор A^{-1} определяется последней операторной матрицей. $\square$

В дальнейшем оператор и его замыкание будут обозначаться одним символом. В случае незамкнутости оператор заменяется своим замыканием.

Если в (1) положить $v = W'$ и через u обозначить столбец $(W, v, \theta)^\top$, то в пространстве $\widetilde{H}$ однородную систему (1) можно записать в виде

$$u'(t) = Au(t). \tag{2}$$

Напомним ([4], сс. 38, 76), что решением уравнения (2) называется функция, удовлетворяющая (2) на замкнутом отрезке $[0, T]$, а ослабленным решением (2) называется функция, непрерывная на $[0, T]$ и удовлетворяющая (2) на $(0, T]$, причем на $(0, T]$ ее производная предполагается непрерывной.

Обозначим через $\widetilde{L}^{-2}$ оператор в $\widetilde{H}$, определяемый равенством

$$\widetilde{L}^{-2} = \begin{pmatrix} L^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & L^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & L^{-2} \end{pmatrix}.$$

Из свойств перестановочных операторов следует, что $\widetilde{L}^{-2}$ и A^{-1} перестановочны.

Теорема 1. *Задача Коши для уравнения* (2) *с начальным условием*

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

имеет единственное решение, если $u_0 \in A^{-2}\widetilde{L}^{-2}(\widetilde{H})$, и единственное ослабленное решение, если $u_0 \in A^{-1}\widetilde{L}^{-4}(\widetilde{H})$.

Доказательство основано на приводимых ниже оценках резольвенты оператора A. Далее решение строится по резольвенте так же, как в ([4], гл. 1, § 3, с. 78), с помощью обратного преобразования Лапласа.

Пусть $\lambda = \sigma + i\tau$. Определим операторы $\Delta_1 = \Delta_1(\lambda)$, $\Delta_2 = \Delta_2(\lambda)$ в H формулами

$$\Delta_1 = (\lambda^2 E + L^2) - \lambda L^2 C(M - \lambda E)^{-1}C^*,$$
$$\Delta_2 = (M - \lambda E) - \lambda L^2(L^2 + \lambda^2 E)^{-1}C^*C.$$

Лемма 2. *При $\sigma = \operatorname{Re}\lambda > 0$ операторы Δ_1, Δ_2 имеют ограниченные обратные и*

$$\|\Delta_1^{-1}\| \le \frac{1}{\sigma|\lambda|}, \quad \|\Delta_2^{-1}\| \le \frac{1}{\sigma}.$$

Доказательство. Обозначим $S = \frac{1}{\lambda}\Delta_1$. Тогда для любого $f \in D(L^2)$ имеем

$$(Sf, f) = (\sigma + i\tau)(f, f) + \frac{1}{|\lambda|^2}(\sigma - i\tau)(L^2 f, f) -$$
$$- ((M - \sigma E + i\tau E)|M - \lambda E|^{-1}LC^*f,\ |M - \lambda E|^{-1}LC^*f).$$

Отсюда и из отрицательной определенности M вытекает $\operatorname{Re}(Sf,f) \geq \sigma\|f\|^2$. Следовательно, $\|Sf\| \geq \sigma\|f\|$. Аналогично получим $\|S^*g\| \geq \sigma\|g\|$. Поэтому оператор S^{-1} существует, ограничен, определен на всем H и $\|S^{-1}\| \leq \frac{1}{\sigma}$. Отсюда следует утверждение леммы об операторе Δ_1.

Из равенства $-\lambda L^2(L^2+\lambda^2 E)^{-1} = -L^2(\lambda L^2 + |\lambda|^2\overline{\lambda}E)|L^2+\lambda^2 E|^{-2}$ вытекает $\operatorname{Re}(-\lambda L^2(L^2+\lambda^2 E)^{-1}C^*Cg,g) \leq 0$ $(g \in H)$. Отсюда и из отрицательной определенности оператора M получим $\operatorname{Re}(\Delta_2 f,f) \leq -\sigma(f,f)$ $(f \in D(\Delta_2))$. Поэтому $|\operatorname{Re}(\Delta_2 f,f)| \geq \sigma\|f\|^2$ и, следовательно, $\|\Delta_2 f\| \geq \sigma\|f\|$. Аналогично получим $\|\Delta_2^* f\| \geq \sigma\|f\|$. Два последних неравенства влекут утверждение леммы об операторе Δ_2. $\square$

Лемма 3. *При* $\operatorname{Re}\lambda > 0$ *оператор* A *имеет резольвенту*

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda\Delta_1^{-1} + L^2\Delta_1^{-1}C(M-\lambda E)^{-1}C^* & -\Delta_1^{-1} & -\Delta_1^{-1}LC(M-\lambda E)^{-1} \\ L^2\Delta_1^{-1} & -\lambda\Delta_1^{-1} & -\lambda\Delta_1^{-1}LC(M-\lambda E)^{-1} \\ -L^3(L^2+\lambda^2 E)^{-1}\Delta_2^{-1}C^* & \lambda L(L^2+\lambda^2 E)^{-1}\Delta_2^{-1}C^* & \Delta_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Непосредственной проверкой с учетом перестановочности L и M^{-1} можно убедиться, что произведение $R(\lambda)(A_0 - \lambda E)$ дает единичную операторную матрицу. Кроме того, область значений оператора $A_0 - \lambda E$ плотна в $\widetilde{H}$. Действительно, пусть найдется такой элемент $x = (x_1, x_2, x_3) \in \widetilde{H}$, что $(A_0 - \lambda E)^* x = 0$. Это равенство равносильно следующим трем равенствам:

$$-\overline{\lambda}x_1 - L^2 x_2 = 0, \quad x_1 - \overline{\lambda}x_2 + CLx_3 = 0, \quad -C^*Lx_2 + (M - \overline{\lambda}E)x_3 = 0.$$

Выражая из первого равенства x_1, из последнего x_3 и подставляя во второе, получим $\Delta_1(\overline{\lambda})x_2=0$. Из леммы 2 вытекает, что $x_2 = 0$. Следовательно, $x_1 = x_3 = 0$. Поэтому $x = 0$. $\square$

Лемма 4. *При достаточно больших* $\sigma = \operatorname{Re}\lambda > 0$ *справедливы оценки*

$$\|R(\lambda)\| \leq k|\lambda|/\sigma, \quad \|R(\lambda)\widetilde{L}^{-2}\| \leq k/|\lambda|. \tag{4}$$

Здесь и далее k обозначает постоянную (не зависящую от λ), различную, вообще говоря, в различных неравенствах.

Доказательство. Установим сначала неравенство

$$\|L^2\Delta_1^{-1}\| \leq |\lambda|/\sigma. \tag{5}$$

Так же, как в доказательстве леммы 2, имеем при $g \in H$

$$(SL^{-2}g,g) = (\sigma + i\tau)(L^{-2}g,g) + \frac{1}{|\lambda|^2}(\sigma - i\tau)(g,g) - \\ - ((M - \sigma E - i\tau E)|M-\lambda E|^{-1}C^*g,\ |M-\lambda E|^{-1}C^*g).$$

Следовательно, $\operatorname{Re}(SL^{-2}g,g) \geq \sigma/|\lambda|^2$. Отсюда получаем $\|L^2S^{-1}\| \leq |\lambda|^2/\sigma$; поэтому (5) выполняется.

Обозначим через a_{ij} элементы операторной матрицы, определяющей $R(\lambda)$. Тогда

$$\begin{aligned} &\|a_{11}\| \leq \frac{k}{\sigma}, && \|a_{12}\| \leq \frac{1}{|\lambda|\sigma}, && \|a_{13}\| \leq \frac{k}{|\lambda|\sigma}, \\ &\|a_{21}\| \leq \frac{|\lambda|}{\sigma}, && \|a_{22}\| \leq \frac{1}{\sigma}, && \|a_{23}\| \leq \frac{k}{\sigma}, \\ &\|a_{11}L^{-2}\| \leq \frac{k}{|\lambda|}, && \|a_{12}L^{-2}\| \leq \frac{k}{|\lambda|\sigma}, && \|a_{13}L^{-2}\| \leq \frac{k}{|\lambda|^2\sigma}, \\ &\|a_{21}L^{-2}\| \leq \frac{1}{|\lambda|\sigma}, && \|a_{22}L^{-2}\| \leq \frac{k}{|\lambda|}, && \|a_{23}L^{-2}\| \leq \frac{k}{|\lambda|\sigma}. \end{aligned}$$

Эти оценки элементов первых двух строк матрицы $R(\lambda)$ сразу же получаются из (5), леммы 2, неравенств $\|L(M-\lambda E)^{-1}\| \le k$,

$$\|(M-\lambda E)^{-1}\| \le \frac{1}{|\lambda|}, \tag{6}$$

а также из следующих двух равенств:

$$a_{11} = -\frac{1}{\lambda}E - \frac{1}{\lambda}L^2\Delta_1^{-1}, \quad a_{22}L^{-2} = -\frac{1}{\lambda}L^{-2} + \frac{1}{\lambda}\Delta_1^{-1} + \Delta_1^{-1}C(M-\lambda E)^{-1}C^*,$$

которые доказываются элементарными преобразованиями. Для оценки элементов третьей строки матрицы $R(\lambda)$ установим некоторые вспомогательные неравенства. Так как $\mathrm{Re}\left((\frac{1}{\lambda}L^2 + \lambda E)f, f\right) \ge \sigma(f,f)$ для любого $f \in D(L^2)$, то $\left\|\left(\frac{1}{\lambda}L^2+\lambda E\right)^{-1}\right\| \le \frac{1}{\sigma}$. Отсюда вытекает

$$\|(L^2+\lambda^2 E)^{-1}\| \le \frac{1}{|\lambda|\sigma}. \tag{7}$$

Из этого неравенства элементарными преобразованиями получаем

$$\|L^2(L^2+\lambda^2 E)^{-1}\| \le |\lambda|/\sigma. \tag{8}$$

Докажем, что

$$\|L\Delta_2^{-1}\| \le m, \tag{9}$$

где m не зависит от λ. Для любого $f \in D(\Delta_2 L^{-1})$ имеем

$$(\Delta_2 L^{-1}f, f) = (ML^{-1}f, f) - (\sigma+i\tau)(L^{-1}f, f) - (\sigma - i\tau)|\lambda|^2(Lg, g) - (\sigma+i\tau)(L^3 g, g),$$

где $g = \sqrt{|L^2+\lambda^2 E|^{-2}C^*C}f$. Из отрицательной определенности L следует $\mathrm{Re}(\Delta_2 L^{-1}f, f) \ge \mathrm{Re}(ML^{-1}f, f) \ge k\|f\|^2$. Последнее неравенство вытекает из положительной определенности ограниченного оператора LM^{-1}, обратного к ML^{-1}. Таким образом, (9) выполняется.

Равенство $\Delta_2^{-1}L^{-1} = (M-\lambda E)^{-1}L^{-1} + (L\Delta_2^{-1})(L^2+\lambda^2 E)^{-1}C^*C\lambda(M-\lambda E)^{-1}$ и неравенства (6), (7), (9) влекут

$$\|\Delta_2^{-1}L^{-1}\| \le k/|\lambda|. \tag{10}$$

Теперь неравенства (7)–(10) и лемма 2 позволяют получить оценки элементов третьей строки матрицы $R(\lambda)$

$$\|a_{31}\| \le k\frac{|\lambda|}{\sigma}, \qquad \|a_{32}\| \le \frac{k}{\sigma}, \qquad \|a_{33}\| \le \frac{1}{\sigma},$$
$$\|a_{31}L^{-2}\| \le \frac{k}{|\lambda|\sigma}, \quad \|a_{32}L^{-2}\| \le \frac{k}{|\lambda|\sigma}, \quad \|a_{33}L^{-2}\| \le \frac{k}{|\lambda|}.$$

Из полученных оценок a_{ij} следует утверждение леммы. □

Отметим, что некоторые оценки можно улучшить. Например, $\|a_{12}L^{-2}\| \le \frac{k}{|\lambda|^2}$, однако для дальнейшего этого не требуется.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы. Следуя ([4], с. 78), решение задачи Коши (2), (3) ищем в виде

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda)u(0)d\lambda,$$

где интегрирование ведется по прямой, параллельной мнимой оси и проходящей через точку $(\sigma, 0)$ ($\sigma > 0$ достаточно большое).

Пусть $u_0 \in A^{-2}\widetilde{L}^{-2}(\widetilde{H})$, т. е. $u_0 = R^2(0)\widetilde{L}^{-2}x_0$ ($x_0 \in \widetilde{H}$, $R(0) = A^{-1}$). Из резольвентного тождества имеем

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda)R^2(0)\widetilde{L}^{-2}x_0 d\lambda =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\Big(\frac{1}{\lambda^2}R(\lambda) - \frac{1}{\lambda^2}R(0) - \frac{1}{\lambda}R^2(0)\Big)\widetilde{L}^{-2}x_0 d\lambda. \quad (11)$$

Существование интеграла в (11) вытекает из леммы 4. Из той же леммы и из равенства $\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}d\lambda = 1$ следует непрерывность $u(t)$ на $[0,T]$ и равенство $u(0) = R^2(0)\widetilde{L}^{-2}x_0$. Кроме того, $u(t)$ имеет непрерывную на $[0,T]$ производную

$$u'(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\Big(\frac{1}{\lambda}R(\lambda)\widetilde{L}^{-2}x_0 - \frac{1}{\lambda}R(0)\widetilde{L}^{-2}x_0\Big)d\lambda$$

и удовлетворяет уравнению (2). Таким образом, функция (11) является решением задачи Коши (2), (3).

Пусть теперь $u_0 \in A^{-1}\widetilde{L}^{-4}(\widetilde{H})$, т. е. $u_0 = R(0)\widetilde{L}^{-4}z_0$ ($z_0 \in \widetilde{H}$). Рассмотрим функцию

$$\widetilde{u}(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda)R(0)\widetilde{L}^{-4}z_0 d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\Big(\frac{1}{\lambda}R(\lambda)\widetilde{L}^{-4}z_0 - \frac{1}{\lambda}R(0)\widetilde{L}^{-4}z_0\Big)d\lambda. \quad (12)$$

Из леммы 4 вытекает существование интеграла, непрерывность $\widetilde{u}(t)$ на $[0,T]$ и равенство $\widetilde{u}(0) = R(0)\widetilde{L}^{-4}z_0$. Применяя к первому интегралу в (12) формулу интегрирования по частям, с учетом леммы 4 получим

$$\widetilde{u}(t) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}R^2(\lambda)R(0)\widetilde{L}^{-4}z_0 d\lambda.$$

Отсюда следует, что $\widetilde{u}(t)$ имеет на $(0,T]$ непрерывную производную

$$\widetilde{u}'(t) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t^2}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}R^2(\lambda)R(0)\widetilde{L}^{-4}z_0 d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\lambda R^2(\lambda)R(0)\widetilde{L}^{-4}z_0 d\lambda$$

и удовлетворяет уравнению (2).

Единственность решения вытекает из оценки (4) и из результатов, изложенных в ([4], с. 81). Отметим также, что из той же оценки и из ([4], с. 49) следует существование решения задачи (2), (3) при $u_0 \in D(A^4)$. □

Замечание. Для функций (11), (12) выполняются неравенства $\|u(t)\| \le k\|R(0)x_0\|$, $\|\widetilde{u}(t)\| \le k\|\widetilde{L}^{-2}z_0\|$. Это вытекает из леммы 4 и резольвентного тождества, примененного в первом интеграле (11).

Перейдем к рассмотрению неоднородного уравнения

$$u'(t) = Au(t) + f(t). \quad (13)$$

Обозначим через $U(t)$ оператор

$$U(t)x = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda)x\, d\lambda, \quad 0 \le t \le T,$$

определенный при всех $x \in \widetilde{H}$, для которых последний интеграл существует. Из леммы 4 и равенства

$$U(t)R(0)\widetilde{L}^{-2}z = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\frac{1}{\lambda}(R(\lambda) - R(0))\widetilde{L}^{-2}z\, d\lambda \quad (z \in \widetilde{H})$$

следует, что $U(t)R(0)\widetilde{L}^{-2}$ является при фиксированном t ограниченным оператором в $\widetilde{H}$, а операторная функция $U(t)R(0)\widetilde{L}^{-2}$ сильно непрерывна на $[0,T]$. Из доказательства теоремы 1 вытекает, что при $u_0 \in R^2(0)\widetilde{L}^{-2}(\widetilde{H})$ ($u_0 \in R(0)\widetilde{L}^{-4}(\widetilde{H})$) функция $U(t)u_0$ является решением (ослабленным решением) задачи Коши (2), (3).

Теорема 2. *Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) *$f(t) \in R^2(0)\widetilde{L}^{-2}(\widetilde{H})$ при любом t и функция $\widetilde{L}^2A^2f(t)$ непрерывна;*

2) *$f(t)$ имеет производную такую, что $f'(t) \in R(0)\widetilde{L}^{-2}(\widetilde{H})$ при любом t, функция $\widetilde{L}^2Af'(t)$ непрерывна, и $f(0) \in R(0)\widetilde{L}^{-2}(\widetilde{H})$.*

Тогда функция

$$y(t) = \int_0^t U(t-s)f(s)ds \tag{14}$$

является решением уравнения (13).

Доказательство. Пусть f удовлетворяет условию 1). Обозначим $g(t) = \widetilde{L}^2A^2f(t)$. Тогда функция (14) и ее производная будут иметь вид

$$y(t) = \int_0^t U(t-s)R^2(0)\widetilde{L}^{-2}g(s)ds,$$

$$y'(t) = R^2(0)\widetilde{L}^{-2}g(t) + \int_0^t U'_t(t-s)R^2(0)\widetilde{L}^{-2}g(s)ds =$$

$$= f(t) + \int_0^t AU(t-s)R^2(0)\widetilde{L}^{-2}g(s)ds = f(t) + Ay(t).$$

В силу непрерывности g все интегралы в этих равенствах существуют. Следовательно, $y(t)$ — решение (13).

Пусть теперь f удовлетворяет условию 2). Тогда из равенства $f(t) = f(0) + \int\limits_0^t f'(s)ds$ и свойств $U(t)$ вытекает существование интеграла в (14). Несложными преобразованиями с использованием формулы интегрирования по частям так же, как в ([4], с. 164), получим

$$y(t) = \int_0^t U(t-s)f(s)ds = \int_0^t U(t-s)R(0)f'(s)ds - R(0)f(t) + U(t)R(0)f(0).$$

Отсюда, вычисляя $y'(t)$, так же, как в первой части доказательства, получим, что $y(t)$ — решение (13). □

Литература

1. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.* – 2-е изд. – М.: Мир, 1979. – 588 с.
2. Бабаков И.М. *Теория колебаний.* – М.: Наука, 1965. – 559 с.
3. Беляев Н.М., Рядно А.А. *Методы теории теплопроводности.* – М.: Высш. школа, 1982. – 325 с.
4. Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1967. – 464 с.

Саратовский государственный технический университет

Поступили
первый вариант 28.03.2000
окончательный вариант 22.05.2003