ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 5 (492)

УДК 517.98

М.Р. ТИМЕРБАЕВ

ПРОСТРАНСТВА С НОРМОЙ ГРАФИКА И УСИЛЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА. I

Введение

Пусть Ω — ограниченная плоская область с кусочно-гладкой границей $\Gamma_0 = \partial\Omega$, $\Gamma_i \subset \overline{\Omega}$, $i = 1, 2, \dots, m$, — гладкие кривые с концами на Γ_0. Известно, что если функция u принадлежит пространству Соболева $W_p^1(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$, то ее след $u|_{\Gamma_i}$ является элементом пространства Соболева–Слободецкого $W_p^{1-1/p}(\Gamma_i)$. Пусть V — подмножество функций из $W_p^1(\Omega)$, следы которых на Γ_i обладают дополнительной гладкостью, а именно, принадлежат, кроме того, и классу $W_q^1(\Gamma_i)$ $(1 < q < \infty)$. Определим на V норму

$$\|u\|_V = \|u\|_{W_p^1(\Omega)} + \sum_{i=0}^{m} \|u\|_{W_q^1(\Gamma_i)}. \tag{1}$$

Далее, на цилиндре $Q = (0, 1) \times \Omega$ определим множество функций W с конечной нормой

$$\|u\|_W = \left(\int_0^1 \|u(t)\|^p_{W_p^1(\Omega)} dt\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=0}^{m} \int_0^1 \|u(t)\|^q_{W_q^1(\Gamma_i)} dt\right)^{1/q}. \tag{2}$$

Определенные выше пространства естественным образом возникают во многих приложениях, к примеру, при описании совместного движения поверхностных и грунтовых вод, в гидродинамической теории смазки, в теории упругости [1]–[4]. Вариационные задачи и задачи на собственные значения, а также их конечноэлементные аппроксимации в пространствах с нормой (1) в случае многоугольной области Ω и отрезков (стержней) Γ_i при $p = q = 2$ рассматривались в [5]–[8], где эти пространства называются усиленными пространствами Соболева.

В данной статье пространства Соболева с усиленной метрикой рассматриваются как частный случай следующей абстрактной конструкции. Пусть имеются B-пространства U и Y и линейный непрерывный оператор $\gamma \in L(U, Y)$. Для B-пространства $X \subset Y$ определим пространство

$$\gamma(U, X) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in U : \gamma u \in X\},$$

наделенное нормой графика

$$\|u\|_{\gamma(U,X)} = \|u\|_U + \|\gamma u\|_X.$$

Многие пространства устроены подобным образом. В частности, для пространств с нормами (1) или (2) роль оператора γ играет оператор следа на $\Gamma = \bigcup_{i=0}^{m} \Gamma_i$. В статье в предположении о дополняемости ядра $\ker\gamma$ устанавливаются общие свойства пространств $\gamma(U, X)$ в контексте свойств U и X: интерполяционное свойство, критерии компактности и плотности множеств. Приводятся примеры реализаций описанной конструкции. В пространствах с нормами (1) и (2) установлена плотность гладких функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00616).

1. Предварительные результаты

Через Φ, Ψ обозначаются топологические векторные пространства (ТВП). Всюду, если не оговорено особо, для ТВП включение $U \subset \Phi$ будет пониматься не только в теоретико-множественном, но и в топологическом смысле; таким образом, равенство $U = V$ для B-пространств будет означать также эквивалентность норм этих пространств. Отметим также следующее: если B-пространства $U, V \subset \Phi$ таковы, что V является подмножеством U, то V непрерывно вложено в U — это следует из теоремы Банаха о замкнутом графике, которую нужно применить к тождественному отображению.

Как обычно, через $L(\Phi, \Psi)$ обозначается множество линейных непрерывных отображений из Φ в Ψ. Пусть $\gamma \in L(\Phi, \Psi)$ и $U \subset \Phi$. Тогда, очевидно, $\gamma \in L(U, \Psi)$ (сужение γ на U здесь и далее будет обозначаться тем же символом γ). Если $U \subset \Phi$ — B-пространство, то линейное множество $\gamma(U)$ (образ U при отображении γ), наделенное фактор-нормой

$$\|x\|_{\gamma(U)} = \inf\{\|u\|_U : u \in U,\ \gamma u = x\},$$

будет B-пространством, изометричным, очевидно, фактор-пространству $U/(\ker\gamma \cap U)$, причем $\gamma(U) \subset \Psi$ и $\gamma \in L(U, \gamma(U))$. Кроме того, если B-пространство X непрерывно вложено в Ψ, то, для того чтобы γ непрерывно отображало U в X, достаточно (и, разумеется, необходимо), чтобы $\gamma(U)$ было подмножеством пространства X. Если γ непрерывно отображает B-пространство U на B-пространство X, то фактор-норма пространства $\gamma(U)$ эквивалентна норме пространства X.

Пусть B-пространства U_1, U_2 вложены в ТВП Φ. Линейные множества $U_1 \cap U_2$ и $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 : u_j \in U_j,\ j = 1, 2\}$ являются B-пространствами относительно норм ([9], с. 15)

$$\|u\|_{U_1 \cap U_2} = \|u\|_{U_1} + \|u\|_{U_2},$$
$$\|u\|_{U_1 + U_2} = \inf\{\|u_1\|_{U_1} + \|u_2\|_{U_2}\}$$

(inf берется по всем представлениям $u = u_1 + u_2$, $u_j \in U_j$). Операции (функторы) $\cap$ и $+$ двойственны друг другу в следующем смысле: $(U_1 \cap U_2)^* = {U_1}^* + {U_2}^*$, $(U_1 + U_2)^* = {U_1}^* \cap {U_2}^*$ [10].

Оператор $\gamma \in L(U, X)$ называется ретракцией, если существует оператор $\beta \in L(X, U)$, называемый коретракцией такой, что

$$\gamma\beta x = x \quad \forall x \in X,$$

т. е. оператор γ – ретракция, если для него существует правый обратный на X, называемый коретракцией. Заметим, что оператор $\gamma \in L(U, X)$ будет являться ретракцией с соответствующей коретракцией $\beta \in L(X, U)$ тогда и только тогда, когда сопряженный к β оператор $\beta^* \in L(U^*, X^*)$ будет ретракцией с соответствующей ему коретракцией $\gamma^* \in L(X^*, U^*)$. Это следует из того, что произведение операторов $\gamma\beta \in L(X, X)$ будет тождественным оператором в X тогда и только тогда, когда произведение $\beta^*\gamma^* = (\gamma\beta)^* \in L(X^*, X^*)$ будет тождественным оператором в сопряженном X^*.

Одним из содержательных и важных примеров ретракций в функциональных пространствах является оператор следа на некоторое многообразие. Для открытого множества $\Omega \subset R^n$, $p, q \in (1, \infty)$, $s \in (0, \infty)$, мы используем стандартные обозначения: через $W_p^s(\Omega)$ и $B_{p,q}^s(\Omega)$ обозначаются пространства Соболева–Слободецкого и Бесова соответственно. Тогда, например, для $\Omega = R_+^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : x_n > 0\}$, $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ отображение γ, задаваемое формулой

$$\gamma u = \left(u(x', 0), \frac{\partial u(x', 0)}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^m u(x', 0)}{\partial x_n^m}\right),$$

является ретракцией пространства $W_p^s(R_+^n)$ на $\prod\limits_{j=0}^{m} W_p^{s-1/p-j}(R^{n-1})$, где $m = \max\{k \in \mathbf{Z} : k < s - 1/p\}$ ([9], с. 267).

Для более короткой записи всюду в дальнейшем, когда это не вызывает недоразумений, для $\gamma \in L(\Phi, \Psi)$ и $U \subset \Phi$ через U_0 обозначается ядро сужения оператора γ на U, т. е. $U_0 = \ker\gamma \cap U$. Отметим, что коретракция β осуществляет изоморфизм на дополнение к ядру U_0 в пространстве U ([9], с. 21) и пространство U представляется алгебраической и топологической прямой суммой $U = U_0 \oplus \beta(X)$. Дополняемость ядра есть характеризущее свойство ретракции, как показывает следующая

Лемма 1.1. *Оператор $\gamma \in L(U, X)$ является ретракцией тогда и только тогда, когда U_0 дополняемо в U и область значений $\gamma(U) = X$. Если это выполнено и π — оператор проектирования на U_0, то отображение Π, определяемое формулой*

$$\Pi u = (\pi u, \gamma u), \tag{3}$$

осуществляет изоморфизм пространства U на $U_0 \times X$.

Доказательство. Необходимость. Из определения ретракции следует, что $\gamma(U) = X$. Пусть $\beta : X \to U$ — коретракция для γ. Определим оператор $\pi \in L(U, U)$ формулой $\pi u = u - \beta\gamma u$. Тогда $\gamma\pi u = \gamma u - \gamma\beta\gamma u = \gamma u - \gamma u = 0$, т. е. $\pi u \in U_0$; кроме того, для $u \in U_0$ $\pi u = u - \beta\gamma u = u$, откуда следует, что π является проектором на U_0.

Достаточность. Покажем сначала, что отображение Π, определенное формулой (3), осуществляет изоморфизм пространства U на $U_0 \times X$. Очевидно, оператор Π непрерывен. Если $Tu = 0$, то $\gamma u = 0$, т. е. $u \in U_0$; с другой стороны, $0 = \pi u = u$, откуда следует, что Π взаимнооднозначен. Пусть теперь $(v, x) \in U_0 \times X$ — произвольный элемент. Так как $\gamma(U) = X$, то найдется элемент $w \in U$ такой, что $\gamma w = x$. Положим $u = v + w - \pi w$. Тогда $\pi u = \pi v + \pi w - \pi^2 w = \pi v = v$ и $\gamma u = \gamma v + \gamma w - \gamma\pi w = \gamma w = x$, т. е. $(v, x) = \Pi u$. Тем самым установлено, что отображение Π есть отображение “на”. Итак, оператор Π взаимнооднозначно и непрерывно отображает U на $U_0 \times X$. По теореме Банаха об открытом отображении обратный оператор Π^{-1} также непрерывен, т. е. Π — изоморфизм.

Положим теперь $\beta x = \Pi^{-1}(0, x)$ для каждого $x \in X$. Очевидно, определяемый таким образом оператор β линеен, непрерывен и, кроме того, $(0, x) = \Pi\beta x = (\pi\beta x, \gamma\beta x)$, т. е. $\gamma\beta x = x$, откуда по определению следует, что оператор γ является ретракцией. □

Замечание 1. Из леммы, в частности, вытекает, что топологические и структурные свойства B-пространства U такие, как сепарабельность, рефлексивность, существование базиса Шаудера, изоморфность гильбертову пространству и т. п., определяются соответствующими свойствами ядра ретракции и ее области значений.

Замечание 2. Если полунорма p непрерывна на U и эквивалентна норме пространства U на ядре ретракции U_0, то норма

$$u \to p(u) + \|\gamma u\|_X$$

эквивалентна норме пространства U на всем U. Это следует из свойств отображения (3).

Замечание 3. Если $\gamma \in L(U, X)$ и U_0 дополняемо в U, то оператор γ является ретракцией U на $\gamma(U)$. В частности, если оператор γ имеет конечномерное ядро, т.е. $\dim U_0 < \infty$, то γ является ретракцией U на $\gamma(U)$.

Замечание 4. Если пространство U изоморфно гильбертову пространству, то любое замкнутое подпространство этого пространства дополняемо в U. Из доказанного утверждения следует, что в этом случае любое непрерывное отображение из U на некоторое B-пространство X будет являться ретракцией, причем само это пространство X с необходимостью должно быть изоморфно гильбертову пространству.

Всюду далее в этом пункте будем предполагать, что γ есть ретракция U на X. Для $u \in U$, $u^* \in U^*$ полагаем $\langle u, u^* \rangle = \langle u, u^* \rangle_U = u^*(u)$.

Лемма 1.2. *Для любого линейного непрерывного функционала $u^* \in U^*$ существует единственная пара $v^* \in U_0{}^*$, $x^* \in X^*$ такая, что*

$$\langle u, u^* \rangle_U = \langle \pi u, v^* \rangle_{U_0} + \langle \gamma u, x^* \rangle_X \quad \forall u \in U. \tag{4}$$

Очевидно, справедливо и обратное: каждая пара $(v^*, x^*) \in U_0{}^* \times X^*$ формулой (4) определяет линейный непрерывный функционал $u^* \in U^*$.

Доказательство. Сопряженное к декартовому произведению $U_0 \times X$ естественным образом отождествим с $U_0{}^* \times X^*$ отношением двойственности

$$\langle (v, x), (v^*, x^*) \rangle_{U_0 \times X} = \langle v, v^* \rangle_{U_0} + \langle x, x^* \rangle_X$$

для $v \in U_0$, $x \in X$, $v^* \in U_0{}^*$, $x^* \in X^*$. По лемме 1.1 оператор в формуле (3) является изоморфизмом U на $U_0 \times X$, следовательно, сопряженный оператор Π^* является изоморфизмом $U_0{}^* \times X^*$ на U^*. С каждым элементом $u^* \in U^*$ формулой $(v^*, x^*) = {\Pi^*}^{-1} u^*$ свяжем пару $(v^*, x^*) \in U_0{}^* \times X^*$. Тогда для $u \in U$ имеем следующую цепочку равенств:

$$\langle u, u^* \rangle_U = \langle u, \Pi^*(v^*, x^*) \rangle_U = \langle Tu, (v^*, x^*) \rangle_{U_0 \times X} = \\ = \langle (\pi u, \gamma u), (v^*, x^*) \rangle_{U_0 \times X} = \langle \pi u, v^* \rangle_{U_0} + \langle \gamma u, x^* \rangle_X,$$

что доказывает как разложение (4), так и его единственность. □

Замечание. Из формулы (4) следует, что для $u \in U_0$

$$\langle u, u^* \rangle_U = \langle \pi u, v^* \rangle_{U_0} = \langle u, v^* \rangle_{U_0},$$

т. е. функционал $v^* \in U_0{}^*$ есть сужение функционала $u^* \in U^*$ на подпространство U_0.

В следующей теореме дается критерий плотности подмножества в терминах ядра ретракции и ее области значений.

Теорема 1.1. *Для того чтобы линейное множество $L \subset U$ было плотно в U, необходимо и достаточно, чтобы замыкание L содержало ядро U_0 и множество $\gamma(L)$ было плотно в X.*

Доказательство. Необходимость. Так как замыкание L совпадает с U, то оно содержит в качестве подпространства ядро U_0. Далее, по лемме 1.1 оператор Π, определяемый формулой (3), есть изоморфизм U на $U_0 \times X$, следовательно, множество $\Pi(L)$ плотно в последнем пространстве, следовательно, $\gamma(L)$ плотно в X.

Достаточность. Пусть M — замыкание L в U. Нужно показать, что $M = U$; последнее равносильно тому (в силу замкнутости M), что если $u^* \in U^*$ — любой функционал такой, что $M \subset \ker u^*$, то $u^* = 0$. Итак, пусть $u^* \in U^*$ и $M \subset \ker u^*$. По предыдущей лемме для u^* найдется пара элементов $(v^*, x^*) \in U_0{}^* \times X^*$, для которой будет справедлива формула (4). Так как по условию $U_0 \subset M$, то, подставляя в эту формулу элементы $u \in U_0$, получим $\langle u, v^* \rangle_{U_0} = 0$ $\forall u \in U_0$, т. е. $v^* = 0$. Но тогда $\langle \gamma u, x^* \rangle_X = 0$ $\forall u \in L \subset M$. В силу плотности $\gamma(L)$ в X из последнего тождества заключаем, что $x^* = 0$. Из представления (4) теперь следует $u^* = 0$. □

Лемма 1.3. *Пусть линейное множество $L \subset U$ плотно в U и $L \bigcap U_0$ плотно в U_0. Если $u \in U$ и $\gamma u \in \gamma(L)$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $u_\varepsilon \in L$ такой, что*

$$\|u - u_\varepsilon\|_U \le \varepsilon \quad \text{и} \quad \gamma u_\varepsilon = \gamma u.$$

Доказательство. Пусть элемент $u \in U$ и $\gamma u \in \gamma(L)$, т. е. найдется $w \in L$, что $\gamma w = \gamma u$. Тогда $v = u - w \in U_0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем элемент $v_\varepsilon \in L \bigcap U_0$ такой, что $\|v - v_\varepsilon\|_U \le \varepsilon$. Положим $u_\varepsilon = v_\varepsilon + w \in L$. По построению

$$\|u - u_\varepsilon\|_U = \|v - v_\varepsilon\|_U \le \varepsilon \quad \text{и} \quad \gamma u_\varepsilon = \gamma v_\varepsilon + \gamma w = \gamma w = \gamma u. \quad \square$$

В качестве иллюстрации к лемме рассмотрим пространство Соболева $W_p^1(\Omega)$, $1 < p < \infty$, и $\Gamma = \partial\Omega \in C^\infty$ (Ω — ограниченное множество). Пусть $\gamma u = u|_\Gamma$. Оператор γ является ретракцией из $W_p^1(\Omega)$ на $W_p^{1-1/p}(\Gamma)$. Как известно, класс функций $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотен в $W_p^1(\Omega)$, а множество финитных функций $C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \bigcap \ker\gamma$ плотно в подпространстве $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) = W_p^1(\Omega) \bigcap \ker\gamma$. Пусть функция $u \in W_p^1(\Omega)$ и $\gamma u \in C^\infty(\Gamma)$. По теореме для $u|_\Gamma = \gamma u$ найдется сколь угодно близкое к u в метрике пространства $W_p^1(\Omega)$ продолжение с Γ на Ω из класса $C^\infty(\overline{\Omega})$.

2. B-пространства с нормой графика

Как и в п. 1, здесь также предполагается, что оператор $\gamma \in L(\Phi, \Psi)$. Пусть $U \subset \Phi$ и $X \subset \Psi$ — два B-пространства. Определим пространство

$$\gamma(U, X) \overset{\text{def}}{=} \{u \in U : \gamma u \in X\},$$

наделенное нормой графика

$$\|u\|_{\gamma(U,X)} = \|u\|_U + \|\gamma u\|_X. \tag{5}$$

Из определения нормы (5) и полноты пространств U, X с очевидностью вытекает, что $\gamma(U, X)$ является B-пространством, непрерывно вложенным в пространство U, причем $\gamma(U, X) = U$ тогда и только тогда, когда $\gamma(U)$ является подмножеством пространства X.

Далее установим некоторые общие свойства пространств $\gamma(U, X)$ в терминах "усиливаемого" пространства U и “усиливающего” X при фиксированном отображении $\gamma \in L(\Phi, \Psi)$.

Теорема 2.1. *Для пространства $V = \gamma(U, X)$ справедливы следующие утверждения*:

(i) *оператор γ непрерывно отображает V на $X \cap \gamma(U)$;*

(ii) *отображение $u \to (u, \gamma u)$ осуществляет изометрию V на замкнутое подпространство пространства $U \times X$.*

Если, кроме того, $U_0 = \ker\gamma \cap U$ дополняемо в V, то

(iii) *сужение γ на V есть ретракция V на $X \cap \gamma(U)$;*

(iv) *отображение* (3)*, где π — проектор на U_0, есть изоморфизм V на $U_0 \times (X \cap \gamma(U))$;*

(v) *V плотно в U тогда и только тогда, когда $X \cap \gamma(U)$ плотно в $\gamma(U)$.*

Доказательство. Утверждения (i), (ii) непосредственно вытекают из определения нормы (5).

(iii), (iv). В силу (i) $\gamma \in L(V, X \cap \gamma(U))$, причем $\gamma(V) = X \cap \gamma(U)$. Из леммы 1.1 следует теперь, что γ есть ретракция V на $X \cap \gamma(U)$ и отображение (3) есть изморфизм V на $U_0 \times (X \cap \gamma(U))$.

Утверждение (v) следует из теоремы 1.1, т. к. $V \supset U_0$ и $\gamma(V) = X \cap \gamma(U)$. □

Замечание. Если подпространство $U_0 \subset V$ дополняемо в U, то оно дополняемо и в пространстве V.

Следствие 1. Пусть $V \subset U$, $X \subset \Psi$. Для того чтобы $V = \gamma(U, X)$, необходимо и достаточно, чтобы сужение γ на V непрерывно отображало V на $X \cap \gamma(U)$ и было выполнено включение $U_0 \subset V$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы.

Достаточность. Из условия следует, что $V \subset \gamma(U, X)$. Пусть $u \in \gamma(U, X)$. Так как $\gamma(V) = X \cap \gamma(U)$, то найдется такой элемент $v \in V$, что $\gamma u = \gamma v$. Но тогда $u - v \in \ker\gamma \cap U = U_0 \subset V$. Отсюда $u = v + (u - v) \in V$. В силу произвольности u заключаем, что множества V и $\gamma(U, X)$ совпадают между собой. Так как норма усиленного пространства $\gamma(U, X)$ слабее нормы V, то из теоремы Банаха об открытом отображении следует, что нормы пространств V и $\gamma(U, X)$ эквивалентны. □

Следствие 2. Пусть $V = \gamma(U, X)$. Для того чтобы подмножество $K \subset V$ было относительно компактным в V, необходимо и достаточно, чтобы K было относительно компактным в U и $\gamma(K)$ было относительно компактным в X.

Доказательство следует из утверждения (ii) теоремы 2.1.

Из утверждения (ii) теоремы 2.1 вытекает также, что если пространства U и X оба обладают одним из таких свойств, как сепарабельность, рефлексивность, изоморфность гильбертову пространству, то соответствующим свойством будет обладать и пространство $V = \gamma(U, X)$. $\square$

Следствие 3. Пусть U_0 дополняемо в пространстве $V = \gamma(U, X)$. Для того чтобы линейное множество L было плотно в пространстве V, необходимо и достаточно, чтобы замыкание L в V содержало подпространство U_0 и множество $\gamma(L)$ было плотно в пространстве $X \bigcap \gamma(U)$.

Доказательство. По теореме оператор γ является ретракцией пространства V на пространство $Y = X \bigcap \gamma(U)$. Поэтому утверждение немедленно следует из теоремы 1.1. $\square$

Пример. Пусть $\Omega \subset R^n$ — открытое множество с границей $\partial\Omega \in C^\infty$. Тогда оператор следа $\gamma u \equiv u|_{\partial\Omega}$ является ретракцией пространства $W_p^1(\Omega)$ на $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ ([11], с. 103). Пусть $q \in (1, \infty)$, $q \geq (n-1)p/n$. Тогда $W_q^1(\partial\Omega)$ непрерывно и плотно вложено в $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$. Из доказанной выше теоремы следует, что усиленное пространство Соболева

$$V_{p,q}^{1,1} \equiv \gamma(W_p^1(\Omega), W_q^1(\partial\Omega)) = \{u \in W_p^1(\Omega) : \gamma u \in W_q^1(\partial\Omega)\}$$

будет сепарабельным рефлексивным B-пространством, непрерывно и плотно вложенным в пространство Соболева $W_p^1(\Omega)$, причем оператор следа на $\partial\Omega$ является ретракцией $V_{p,q}^{1,1}$ на $W_q^1(\partial\Omega)$. Если $p = q = 2$, то усиленное пространство Соболева $V_{2,2}^{1,1}$ будет гильбертовым пространством.

Теорема 2.2. *Пусть $\gamma \in L(U, X)$ — ретракция и $\beta \in L(X, U)$ — соответствующая γ коретракция. Если B-пространство $Y \subset \Psi$, то для пространства $V = \gamma(U, Y)$ имеет место двойственная формула*

$$U^* = \beta^*(V^*, X^*),$$

т. е. U^* есть усиление V^* полунормой $\|\beta^* v^*\|_{X^*}$.

Доказательство. Как было отмечено в п. 1, сопряженный к коретракции β оператор

$$\beta^* \in L(U^*, X^*) \cap L(V^*, Y^*)$$

является ретракцией как из U^* на X^*, так и из V^* на $(X \cap Y)^* = X^* + Y^*$ (в силу утверждения (ii) теоремы 2.1). Поэтому для $u^* \in U^*$ имеем

$$\|u^*\|_{\beta^*(V^*, X^*)} = \|u^*\|_{V^*} + \|\beta^* u^*\|_{X^*} \leq c\|u^*\|_{U^*}.$$

Отсюда следует включение $U^* \subset \beta^*(V^*, X^*)$. Пусть $u^* \in \beta^*(V^*, X^*)$ — произвольный элемент, т. е. $\beta^* u^* \in X^*$. Нужно установить, что $u^* \in U^*$. Формула $\pi u = u - \beta\gamma u$ определяет проектор на U_0. Через $v^* \in {U_0}^*$ обозначим сужение u^* на U_0. Тогда для $u \in U$ имеем

$$\langle u, u^* \rangle_V = \langle \pi u, u^* \rangle_V + \langle \beta\gamma u, u^* \rangle_V = \langle \pi u, v^* \rangle_{U_0} + \langle \gamma u, \beta^* u^* \rangle_{X \cap Y}.$$

Отсюда (т. к. $\beta^* u^* \in X^*$) вытекает непрерывность u^* в топологии пространства U, т. е. $u^* \in U^*$. В силу произвольности $u^* \in \beta^*(V^*, X^*)$ это доказывает теорему.

Теорема 2.3. *Пусть W непрерывно и плотно вложено в U, γ является ретракцией на W и на U и пусть $X = \gamma(W)$. Тогда W плотно в $V = \gamma(U, X)$ и V плотно в U, причем для любого $u \in V$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $u_\varepsilon \in W$ такой, что*

$$\|u - u_\varepsilon\|_V \leq \varepsilon \quad \text{и} \quad \gamma u_\varepsilon = \gamma u.$$

Доказательство. Так как $W \subset U$, то $X \subset \gamma(U)$, а потому $X = \gamma(V)$ (утверждение (i) теоремы 2.1). Пусть $\beta \in L(X, W)$ — коретракция для $\gamma \in L(W, X)$, т. е.

$$\gamma\beta x = x \quad \forall x \in X.$$

Но тогда отсюда и из равенства $X = \gamma(V)$ по определению следует, что γ есть ретракция из V на X с соответствующей коретракцией $\beta \in L(X, V)$. Поскольку W плотно в U, то $X = \gamma(W)$ плотно в $\gamma(U)$. По утверждению (v) теоремы 2.1 пространство V плотно в U.

Положим для $u \in U$ $\pi u = u - \beta\gamma u$. Оператор π является проектором в W на $W \bigcap \ker\gamma$, а также в V и U на $V \bigcap \ker\gamma = U \bigcap \ker\gamma$. Следовательно, $\pi(W) = W \bigcap \ker\gamma$ плотно в $\pi(V) = \pi(U) = V \bigcap \ker\gamma$. Возьмем произвольный элемент $u \in V$. Найдется такое $w \in W$, что $\gamma w = \gamma u$. Тогда $v = u - w \in V \bigcap \ker\gamma$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем $v_\varepsilon \in W \bigcap \ker\gamma$ такой, что $\|v - v_\varepsilon\|_V \leq \varepsilon$. Положим $u_\varepsilon = v_\varepsilon + w \in W$. По построению $\|u - u_\varepsilon\|_V = \|v - v_\varepsilon\|_V \leq \varepsilon$ и $\gamma u_\varepsilon = \gamma v_\varepsilon + \gamma w = \gamma w = \gamma u$. □

Следствие. Пусть W непрерывно и плотно вложено в U и задано конечное семейство линейных непрерывных функционалов $u_i^* \in U^*$, $i = \overline{1, m}$. Тогда для любых $u \in U$ и $\varepsilon > 0$ найдется $u_\varepsilon \in W$ такой, что

$$\|u - u_\varepsilon\|_U \leq \varepsilon \quad \text{и} \quad \langle u_\varepsilon, u_i^* \rangle_U = \langle u, u_i^* \rangle_U \quad \forall i = \overline{1, m}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что функционалы u_i^* образуют линейно независимое множество. Формулой

$$\gamma u = (\langle u, u_i^* \rangle_U)_{i=1,m}$$

определим линейный непрерывный оператор из U на R^m. В силу конечномерности, γ является ретракцией на W и на U. По теореме для любых $u \in V = \gamma(U, R^m) = U$ и $\varepsilon > 0$ найдется $u_\varepsilon \in W$ такой, что $\|u - u_\varepsilon\|_U \leq \varepsilon$ и $\gamma u_\varepsilon = \gamma u$. □

В следующей теореме устанавливается интерполяционное свойство усиленных пространств.

Теорема 2.4. *Пусть $U_j \subset \Phi$, $X_j \subset \gamma(U_j)$ и $U_j \cap \ker\gamma$ дополняемо в U_j для $j = 1, 2$. Тогда для произвольного интерполяционного функтора F имеет место равенство*

$$F\{\gamma(U_1, X_1), \gamma(U_2, X_2)\} = \gamma(F\{U_1, U_2\}, F\{X_1, X_2\}).$$

Доказательству теоремы предпошлем два вспомогательных утверждения.

Лемма 2.1. *Пусть оператор $\pi \in L(U, U)$ — проектор (т. е. $\pi^2 = \pi$). Если $V \subset U$ и $\pi(V) \subset V$, то $\pi \in L(V, V)$ является оператором проектирования на подпространство $\pi(V) = V \cap \pi(U)$.*

Доказательство. Ясно, что $\pi(V) \subset V \cap \pi(U)$. С другой стороны, если $v \in V \cap \pi(U)$, то найдется элемент $u \in U$ такой, что $v = \pi u$. Тогда $v = \pi u = \pi^2 u = \pi(\pi u) \in \pi(V)$. Это доказывает, что $\pi(V) = V \cap \pi(U)$. □

Лемма 2.2. *Пусть $U_j \subset \Phi$ и $\pi \in L(U_j, U_j)$ является проектором в U_j ($j = 1, 2$). Положим $W = \pi(U_1 + U_2)$. Тогда для произвольного интерполяционного функтора F имеет место равенство $F\{U_1 \cap W, U_2 \cap W\} = F\{U_1, U_2\} \cap W$.*

Доказательство утверждения можно найти, например, в ([9], с. 138).

Доказательство теоремы 2.4. Введем обозначения

$$U = F\{U_1, U_2\}, \quad X = F\{X_1, X_2\}, \quad Y_j = \gamma(U_j), \quad Y = F\{Y_1, Y_2\},$$
$$V_j = \gamma(U_j, X_j), \quad j = 1, 2, \quad V = F\{V_1, V_2\}.$$

Необходимо показать, что $V = \gamma(U, X)$. Поскольку $V_j \subset U_j$, то $V \subset U$. Далее, т. к. $\gamma \in L(V_j, X_j)$ — ретракция (утверждение (iii) теоремы 2.1), то γ является также ретракцией, как U на Y, так и V на $X \subset Y$ ([9], с. 21). По следствию 1 теоремы 2.1 осталось показать, что $\ker\gamma \cap U \subset V$. Положим $\pi u = u - \beta\gamma u$ для $u \in U_1 + U_2$, где $\beta \in L(Y_1 + Y_2, U_1 + U_2)$ — коретракция для γ. Как видно из доказательства леммы 1.1, оператор π проектирует $U_1 + U_2$ на $W = (U_1 + U_2) \cap \ker\gamma$, а также каждое U_j на $U_j \cap \ker\gamma$ и U на $U \cap \ker\gamma$. Но согласно лемме 2.1 $U_j \cap \ker\gamma = U_j \cap W$ и $U \cap \ker\gamma = U \cap W$. Теперь по лемме 2.2 получаем

$$U \cap \ker\gamma = U \cap W = F\{U_1 \cap W, U_2 \cap W\}.$$

Поскольку $U_j \cap W = U_j \cap \ker\gamma \subset V_j$, то $U \cap \ker\gamma = F\{U_1 \cap W, U_2 \cap W\} \subset F\{V_1, V_2\} = V$. $\square$

Установим условия компактного вложения одного усиленного пространства в другое.

Лемма 2.3. *Если пространство U_2 компактно вложено в U_1 (т. е. единичный шар пространства U_2 относительно компактен в пространстве U_1), то пространство $\gamma(U_2)$ компактно вложено в $\gamma(U_1)$.*

Доказательство. Пусть $K = \{u \in U_2 : \|u\|_{U_2} < 1\}$. Множество K открыто в U_2, с другой стороны, K относительно компактно в U_1. По теореме Банаха об открытом отображении (см., напр., [12], с. 112) оператор γ является открытым отображением U_2 на $\gamma(U_2)$. Поэтому $\gamma(K)$ является окрестностью нуля в $\gamma(U_2)$. С другой стороны, непрерывный оператор переводит относительно компактные множества в относительно компактные. Поэтому $\gamma(K)$ относительно компактно в $\gamma(U_1)$. Таким образом, $\gamma(K)$ является окрестностью нуля в пространстве $\gamma(U_2)$, которая относительно компактна в пространстве $\gamma(U_1)$. Это доказывает компактность тождественного отображения из $\gamma(U_2)$ в $\gamma(U_1)$, т. е. компактность вложения $\gamma(U_2)$ в $\gamma(U_1)$.

Теорема 2.5. *Пусть $U_2 \subset U_1 \subset \Phi$, $X_1, X_2 \subset \Psi$. Введем обозначения*: $V_j = \gamma(U_j, X_j)$, $U_{j,0} = U_j \cap \ker\gamma$. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) *если U_2 компактно вложено в U_1 и $X_2 \cap \gamma(U_2)$ компактно вложено в X_1, то V_2 компактно вложено в V_1;*

(ii) *если V_2 компактно вложено в V_1, то $U_{2,0}$ компактно вложено в $U_{1,0}$ и $X_2 \cap \gamma(U_2)$ компактно вложено в $X_1 \cap \gamma(U_1)$;*

(iii) *если каждое из $U_{j,0}$ дополняемо в V_j, то утверждение* (ii) *обратимо.*

Доказательство. Положим $Y_j = X_j \cap \gamma(U_j)$.

(i). Пусть K — единичный шар пространства V_2. Тогда K ограничено в U_2 и, следовательно, относительно компактно в U_1. Далее, $\gamma(K)$ ограничено в Y_2 и потому, как следует из условия, относительно компактно в X_1. Из следствия 2 теоремы 2.1 теперь вытекает относительная компактность K в V_1.

(ii). Так как $U_{j,0}$ замкнуто в V_j, то из компактности вложения V_2 в V_1 следует компактность вложения $U_{2,0}$ в $U_{1,0}$. Поскольку $\gamma(V_j) = Y_j$, то из леммы 2.3 следует, что Y_2 компактно вложено в Y_1.

Утверждение (iii) является очевидным следствием утверждения (iv) теоремы 2.1. $\square$

Следствие. Пространство $\gamma(U, X)$ компактно вложено в U тогда и только тогда, когда подпространство $U_0 = U \cap \ker\gamma$ конечномерно и $X \cap \gamma(U)$ компактно вложено в $\gamma(U)$.

Доказательство. В силу утверждения (ii) теоремы, из компактности вложения $\gamma(U, X)$ в $U = \gamma(U, \gamma(U))$ вытекает, что, во-первых, U_0 компактно вкладывается само в себя, что может быть только в случае его конечномерности; во-вторых, $X \cap \gamma(U)$ компактно вкладывается в $\gamma(U)$. $\square$

Теорема 2.6. *Рассмотрим следующие утверждения*:

1) *$\gamma(U, X)$ компактно вложено в U;*
2) *$X \cap \gamma(U)$ компактно вложено в $\gamma(U)$;*
3) *множество $X \cap \gamma(U)$ замкнуто в X;*

4) *на множестве $X \cap \gamma(U)$ норма пространства $\gamma(U)$ слабее нормы X, т. е. для некоторой постоянной $c > 0$ имеет место неравенство*

$$\|x\|_{\gamma(U)} \leq c\|x\|_X \quad \forall x \in X \cap \gamma(U);$$

5) *для некоторой постоянной $c > 0$ справедливо неравенство*

$$\inf\{\|u+v\|_U : v \in U_0\} \leq c\|\gamma u\|_X \quad \forall u \in \gamma(U, X);$$

6) *для некоторой постоянной $c > 0$ справедливо неравенство*

$$\inf\{\|u+v\|_{\gamma(U,X)} : v \in U_0\} \leq c\|\gamma u\|_X \quad \forall u \in \gamma(U, X).$$

Тогда имеют место импликации 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4) $\Leftrightarrow$ 5) $\Leftrightarrow$ 6).

Лемма 2.4. *Если B-пространства $X, Y \subset \Psi$ таковы, что $X \cap Y$ компактно вложено в Y, то $X \cap Y$ замкнуто в X, или, что равносильно, на множестве $X \cap Y$ норма Y слабее нормы X.*

Доказательство. Нужно показать, что

$$\|x\|_Y \leq c\|x\|_X \quad \forall x \in X \cap Y.$$

Если это не так, то для каждого натурального $n \geq 1$ найдется элемент $x_n \in X \cap Y$ такой, что $\|x_n\|_Y > n\|x_n\|_X$. Положим $y_n = x_n/\|x_n\|_Y$. Тогда для каждого $n \geq 1$ $\|y_n\|_Y = 1$ и $\|y_n\|_X < 1/n$, откуда следует, что последовательность (y_n) ограничена в $X \cap Y$. Разрежая, если это необходимо, последовательность (y_n), добьемся ее сходимости в Y к некоторому элементу $y \in Y$ (это можно сделать в силу компактности вложения $X \cap Y$ в Y). Так как $\|y_n\|_Y = 1$, то и $\|y\|_Y = 1$. С другой стороны, $y_n \to 0$ в X, а потому $y_n \to 0$ в Ψ. Так как Y непрерывно вложено в Ψ, то $y = 0$, что противоречит равенству $\|y\|_Y = 1$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Доказательство теоремы 2.6. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) установлена в следствии теоремы 2.5. Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) получается из леммы 2.4.

Докажем, что 3) равносильно 4). Замкнутость B-пространства $X \cap \gamma(U)$ в X равносильна тому, что на $X \cap \gamma(U)$ нормы $\|x\|_{\gamma(U)} + \|x\|_X$ и $\|x\|_X$ эквивалентны, что в свою очередь равносильно 4).

Эквивалентность 4) $\Leftrightarrow$ 5) вытекает из равенств $\inf\{\|u+v\|_U : v \in U_0\} = \|\gamma u\|_{\gamma(U)}$ $\forall u \in U$ и $\gamma(\gamma(U, X)) = X \cap \gamma(U)$.

Эквивалентность 5) $\Leftrightarrow$ 6) следует из определения нормы пространства $\gamma(U, X)$. $\square$

Как показывает следующий пример, теорема 2.6 обобщает на абстрактные B-пространства хорошо известную в теории пространств Соболева теорему Дени–Лионса.

Пример. Пусть $\Omega \subset R^n$ — область со свойством конуса. Для мультииндекса $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ через D^i обозначим оператор дифференцирования порядка $|i| = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$. Линейное отображение $\gamma u = (D^i u)_{|i|=m}$ (m — натуральное число) непрерывно как отображение из пространства $D'(\Omega)$ в $D'(\Omega)^N$, где N — мощность множества мультииндексов i таких, что $|i| = m$. Пространство Соболева $W_p^m(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ можно рассматривать как усиленное пространство $\gamma(U, X)$, где $U = L_p(\Omega) \subset \Phi = D'(\Omega)$ и $X = L_p(\Omega)^N \subset \Psi = D'(\Omega)^N$. Заметим, что ядро $\ker \gamma$ совпадает с пространством полиномов $P_m(\Omega)$ степени меньшей m по совокупности переменных ([13], с. 64), следовательно, конечномерно и дополняемо в $L_p(\Omega)$. Из компактности вложения $W_p^m(\Omega) = \gamma(U, X)$ в $L_p(\Omega) = U$ следует (в силу импликации 1) $\Rightarrow$ 6) теоремы 2.6) оценка

$$\inf\{\|u+v\|_{W_p^m(\Omega)} : v \in P_m(\Omega)\} \leq c \sum_{|i|=m} \|D^i u\|_{L_p(\Omega)} \quad \forall u \in W_p^m(\Omega).$$

Это неравенство и является содержанием теоремы Дени–Лионса.

Следствие. Пусть Z — некоторое нормированное пространство и $A : \gamma(U, X) \to Z$ — непрерывный оператор, причем $Au = 0$ при $u \in U_0$. Если $X \cap \gamma(U)$ замкнуто в X, то справедлива оценка

$$\|Au\|_Z \le c\|\gamma u\|_X \quad \forall u \in \gamma(U, X).$$

Доказательство. Для произвольного элемента $v \in U_0$ имеем при фиксированном $u \in \gamma(U, X)$

$$\|Au\|_Z = \|A(u + v)\|_Z \le \|A\| \, \|u + v\|_{\gamma(U,X)},$$

откуда получаем

$$\|Au\|_Z \le \|A\| \inf\{\|u + v\|_{\gamma(U,X)} : v \in U_0\} \le c\|\gamma u\|_X.$$

Последнее неравенство справедливо в силу теоремы. □

Пример (лемма Брэмбла-Гильберта). Применим следствие к пространству Соболева (см. предыдущий пример). Пусть линейный оператор A непрерывно действует из $W_p^m(\Omega)$ в некоторое нормированное пространство Z. Если ядро оператора A содержит пространство полиномов $P_m(\Omega)$, то имеет место неравенство

$$\|Au\|_Z \le c \sum_{|i|=m} \|D^i u\|_{L_p(\Omega)} \quad \forall u \in W_p^m(\Omega).$$

Теорема 2.7. *Пусть подпространство $U_0 = \ker \gamma \cap U$ дополняемо в $V = \gamma(U, X)$ и $X \cap \gamma(U)$ замкнуто в X. Если непрерывная на V полунорма p эквивалентна на U_0 норме U, то функционал $u \to p(u) + \|\gamma u\|_X$ является нормой на V, эквивалентной норме усиленного пространства V.*

Доказательство. Функционал $u \to p(u) + \|\gamma u\|_X$, очевидно, является нормой, которая в силу непрерывности полунормы p слабее нормы усиленного пространства V. Нужно показать, что норма V оценивается сверху нормой $u \to p(u) + \|\gamma u\|_X$, помноженной на некоторую постоянную. Пусть π — оператор проектирования V на U_0. Тогда оператор $A : V \to V$, действующий по формуле $Au = u - \pi u$, непрерывен и удовлетворяет условию $Au = 0$ при $u \in U_0$. В силу следствия предыдущей теоремы имеем оценку

$$\|Au\|_V \le c_0\|\gamma u\|_X \quad \forall u \in V.$$

Используя эту оценку и то, что полунорма p на U_0 эквивалентна норме U, получаем цепочку неравенств

$$\|u\|_V \le \|\pi u\|_V + \|Au\|_V \le c_1 p(\pi u) + \|Au\|_V \le c_1 p(u) + c_1 p(Au) + \|Au\|_V \le$$
$$\le c_1 p(u) + c_2\|Au\|_V \le c_1 p(u) + c_2 c_0\|\gamma u\|_X \le c(p(u) + \|\gamma u\|_X). \quad \square$$

Следствие. Пусть $\gamma(U, X)$ компактно вложено в U. Если непрерывная на $\gamma(U, X)$ полунорма p такова, что $\ker p \cap U_0 = \{0\}$, то функционал $u \to p(u) + \|\gamma u\|_X$ является нормой, эквивалентной норме усиленного пространства $\gamma(U, X)$.

Доказательство. В силу следствия теоремы 2.5 подпространство U_0 конечномерно, поэтому из условия $\ker p \cap U_0 = \{0\}$ следует, что сужение p на U_0 является нормой. Так как на конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, то на U_0 полунорма p эквивалентна норме пространства U. Далее, в силу теоремы 2.6 подмножество $X \cap \gamma(U)$ замкнуто в X. Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.7, применение которой к рассматриваемому случаю доказывает утверждение.

Пример (теорема Соболева об эквивалентных нормировках). В качестве иллюстрации снова рассмотрим пространство Соболева $W_p^m(\Omega)$ как усиленное пространство $\gamma(U, X)$, где $\gamma u =$

$(D^i u)_{|i|=m}$, $U = L_p(\Omega)$, $X = L_p(\Omega)^N$. В данной реализации доказанное выше утверждение дает хорошо известную теорему Соболева о перенормировках: если полунорма p непрерывна на $W_p^m(\Omega)$ и $\ker p \cap P_m(\Omega) = \{0\}$, то норма

$$u \to p(u) + \sum_{|i|=m} \|D^i u\|_{L_p(\Omega)}$$

эквивалентна норме пространства $W_p^m(\Omega)$.

Литература

1. Антонцев С.Н., Мейрманов А.М. *Математические модели движения поверхностных и подземных вод.* – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1979. – 79 с.
2. Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф. *Разностная схема решения задачи совместного движения грунтовых и поверхностных вод* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 9. – С. 72–75.
3. Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф. *О разрешимости одного нелинейного эволюционного неравенства теории совместного движения поверхностных и подземных вод* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 4. – С. 20–31.
4. Даутов Р.З., Карчевский М.М., Федотов Е.М. *Об одном методе решения трехмерных стационарных задач типа сосредоточенной емкости* // Тез. докл. Всесоюзн. конф. "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики", Новосибирск, ВЦ СО АН СССР. – 1987. – С. 68.
5. D'akonov E.G. *Optimization in solving elliptic problems.* – Boca Raton, 1996.
6. Дьяконов Е.Г. *Новых подход к краевым условиям Дирихле, основанный на использовании усиленных пространств Соболева* // Докл. РАН. – 1997. – Т. 352. – № 5. – С. 590–594.
7. Дьяконов Е.Г. *Усиленные пространства Соболева и некоторые новые типы эллиптических краевых задач* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 4. – С. 532–539.
8. Дьяконов Е.Г. *Оценки N-поперечников в смысле Колмогорова для некоторых компактов в усиленных пространствах Соболева* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 4. – С. 32–50.
9. Трибель Х. *Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.* – М.: Мир, 1980. – 664 с.
10. Aronszain N., Gagliardo E. *Interpolation spaces and interpolation methods* // Ann. Mat. Pura Appl. – 1965. – V. 68(4) – P. 51–117.
11. Necas J. *Les Methodes Directes en Theorie des Equations Elliptiques.* – Masson, Paris/Academia, Pragua, 1967. – 346 p.
12. Иосида К. *Функциональный анализ.* – М.: Мир, 1967. – 624 с.
13. Соболев С.Л. *Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций.* – М.: Наука, 1989. – 254 с.

Казанский государственный университет

Поступила 19.11.2001