ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 12 (439)

УДК 517.97

В.А. СРОЧКО, С.Н. ДУШУТИНА, Е.И. ПУДАЛОВА

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА И МЕТОДОВ УЛУЧШЕНИЯ В КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим задачу на минимум квадратичного функционала

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1)\rangle + \frac{1}{2}\langle x(t_1), Dx(t_1)\rangle + \frac{1}{2}\int_T \langle x(t), Q(t)x(t)\rangle dt, \tag{1}$$

определенного на траекториях линейной по состоянию динамической системы

$$\dot{x} = A(u,t)x + b(u,t), \quad x(t_0) = x^0 \tag{2}$$

при ограничениях на управление в каждый момент времени

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1]. \tag{3}$$

Класс допустимых управлений V определим как множество кусочно-непрерывных на T вектор-функций $u(t)$, удовлетворяющих условию (3). Предположим, что в задаче (1)–(3) $n \times n$-матрицы D, $Q(t)$, $t \in T$, симметричны, матричная функция $Q(t)$ кусочно-непрерывна на T, правая часть $f(x,u,t)$ системы (2) непрерывна по $u \in U$ и кусочно-непрерывна по $t \in T$, множество $U \subset R^r$ является компактным, начальное состояние x^0 задано, промежуток времени T фиксирован.

Выделим из (1)–(3) частные классы задач, имеющих самостоятельное значение. Если система (2) линейна по управлению, то получаем билинейно-квадратичную задачу (билинейная система, квадратичный функционал). Выпуклая задача характеризуется условиями

$$A(u,t) \equiv A(t), \quad D \geq 0, \quad Q(t) \geq 0, \quad t \in T. \tag{4}$$

В настоящее время метод приращений [1] представляется в принципе наиболее эффективным средством численного решения задач (1)–(3). Основные характеристики метода — операция на максимум функции Понтрягина, необходимость интегрирования разрывных систем, свойство нелокального спуска по функционалу (отсутствие параметрического поиска), возможность улучшения управлений, удовлетворяющих принципу максимума. Для билинейно-квадратичных задач в [2] разработан метод проекций, использующий операцию проектирования на множество U. Метод сохраняет свойство нелокальности и (в отличие от метода приращений) улучшает любое управление, не удовлетворяющее принципу максимума. При этом однако теряется свойство улучшения управлений, удовлетворяющих принципу максимума (в методе проекций отсутствуют разрывные системы). Думается, что указанные методы альтернативно дополняют друг друга и в совокупности открывают дополнительные возможности для качественного решения квадратичных задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00359).

В данной работе проводится модификация метода приращений на основе фазовой регуляризации целевого функционала. В результате получаются новые условия оптимальности, усиливающие принцип максимума в рассматриваемом классе задач. Как следствие, повышаются качественные свойства метода в невыпуклых задачах — появляется возможность улучшения управлений, удовлетворяющих принципу максимума (в частности, особых управлений). В выпуклых задачах предлагаемый метод вырабатывает минимизирующую последовательность управлений со свойством среднеквадратичной сходимости соответствующей последовательности фазовых траекторий. При этом сохраняются все положительные характеристики стандартного метода приращений (нелокальное улучшение, вычислительные затраты на каждой итерации).

1. Первая процедура улучшения

Пусть $(u^0(t), x(t, u^0))$, $t \in T$, — допустимая пара в задаче (1)–(3). Введем вспомогательный функционал

$$F_\alpha(u, u^0) = \Phi(u) + \alpha J(u, u^0), \quad \alpha \geq 0, \tag{5}$$

где $J(u, u^0)$ — среднеквадратичное фазовое отклонение

$$J(u, u^0) = \frac{1}{2}\left(\|x(t_1, u) - x(t_1, u^0)\|^2 + \int_T \|x(t, u) - x(t, u^0)\|^2 dt\right).$$

Функционал F_α определяет обычную процедуру регуляризации в экстремальных задачах ([3], гл. 2). В данном случае она связана с базовым управлением u^0 и использует только фазовое приращение $\Delta x(t, u^0)$. Другой вариант регуляризации (по приращению $\Delta u^0(t)$) критически обсуждается ниже. Для задач оптимального управления подобная структура регуляризации использовалась, например, в [4]. С другой стороны, процедуру (5) можно рассматривать как способ варьирования задачи (1)–(3) вдоль допустимого процесса $(u^0(t), x(t, u^0))$.

Поставим задачу улучшения управления u^0 по функционалу F_α: найти управление $v^\alpha \in V$ с условием $F_\alpha(v^\alpha, u^0) \leq F_\alpha(u^0, u^0)$. При этом управление v^α обеспечивает уменьшение функционала Φ с оценкой

$$\Phi(v^\alpha) - \Phi(u^0) \leq -\alpha J(v^\alpha, u^0). \tag{6}$$

Отметим, что функционал F_α сохраняет свойство квадратичности исходного функционала, поэтому для построения процедур улучшения можно использовать известные результаты в квадратичных задачах [1], [2]. Определим необходимые в данном случае конструкции применительно к α-функционалу:

функция Понтрягина

$$H_\alpha(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle - \frac{1}{2}\langle x, Q(t)x \rangle - \frac{1}{2}\alpha \|x - x(t, u^0)\|^2,$$

векторная сопряженная система $(\psi_\alpha(t, u))$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -A(u, t)^T \psi + Q(t)x(t, u) + \alpha(x(t, u) - x(t, u^0)), \\ \psi(t_1) &= -(c + Dx(t_1, u)) - \alpha(x(t_1, u) - x(t_1, u^0)), \end{aligned} \tag{7}$$

матричная сопряженная система $(\Psi_\alpha(t, u))$

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= -A(u, t)^T \Psi - \Psi A(u, t) + Q(t) + \alpha E, \\ \Psi(t_1) &= -D - \alpha E. \end{aligned} \tag{8}$$

Отметим, что при $u = u^0$ решение системы (7) не зависит от α и совпадает с сопряженной траекторией $\psi(t, u^0)$, соответствующей управлению u^0 в исходной задаче (1)–(3). Далее, обозначим через $\Psi_\alpha(t, u)$ решение симметричной матричной системы (8) и введем вспомогательную вектор-функцию

$$p_\alpha(t, u^0, x) = \psi(t, u^0) + \Psi_\alpha(t, u^0)(x - x(t, u^0)).$$

Формула приращения функционала F_α на управлениях u, u^0 имеет вид [1]

$$\Delta F_\alpha(u, u^0) = -\int_T \Delta_{u(t)} H(p_\alpha(t, u^0, x(t, u)), x(t, u), u^0(t), t)dt, \tag{9}$$

где $H = H_0$ — гамильтониан исходной задачи, $\Delta_u H$ — частное приращение по управлению.

Данное представление является конструктивным и служит основой для построения α-параметрической процедуры улучшения управления u^0 в рамках следующей схемы. Предварительно найдем явное выражение для максимизирующего управления

$$u^*(\psi, x, t) = \arg\max_{u \in U} H(\psi, x, u, t)$$

и предположим, что вектор-функция $u^*(\psi, x, t)$ кусочно-непрерывна по совокупности своих аргументов.

Процедура улучшения:

1) найдем решения $\psi(t, u^0)$, $\Psi_\alpha(t, u^0)$ сопряженных систем (7), (8) при $u = u^0$, образуем вектор-функцию $p_\alpha(t, u^0, x)$ и управление

$$v^*(x, t, \alpha) = u^*(p_\alpha(t, u^0, x), x, t);$$

2) найдем решение $x_\alpha(t)$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, v^*(x, t, \alpha), t), \quad x(t_0) = x^0 \tag{10}$$

вместе с управлением $v^\alpha(t) = v^*(x_\alpha(t), t, \alpha)$.

Понятно, что $x_\alpha(t) = x(t, v^\alpha)$, $t \in T$, причем управление v^α определяется экстремальным соотношением

$$v^\alpha(t) = \arg\max_{u \in U} H(p_\alpha(t, u^0, x_\alpha(t)), x_\alpha(t), u, t).$$

Следовательно, на основании формулы (9) при $u = v^\alpha$ имеет место улучшение $\Delta F_\alpha(v^\alpha, u^0) \le 0$, т. е. управление v^α для любого $\alpha \ge 0$ обеспечивает невозрастание функционала $\Phi(u)$ с оценкой (6).

Специфика процедуры 1), 2) состоит в том, что фазовая система (10) за счет управления является, вообще говоря, разрывной по состоянию x. Поэтому задача Коши (10) может иметь неединственное решение $x_\alpha(t)$, что приводит к множеству управлений $v^\alpha(t)$ на выходе процедуры. Этот факт имеет существенное значение в плане возможностей улучшения.

Обсудим качественные характеристики процедуры 1), 2). В первую очередь сформулируем принцип максимума в терминах описанной процедуры: *для оптимальности управления* $u^0(t)$ *в задаче* (1)–(3) *необходимо, чтобы траектория* $x(t, u^0)$ *была решением задачи Коши* (10) *хотя бы для одного* $\alpha \ge 0$.

Действительно, если траектория $x^0(t) = x(t, u^0)$ является решением системы (10), то

$$f(x^0(t), u^0(t), t) = f(x^0(t), v^*(x^0(t), t, \alpha), t), \quad t \in T. \tag{11}$$

Поскольку $p_\alpha(t, u^0, x^0(t)) = \psi(t, u^0)$, то согласно определению $v^*(x^0(t), t, \alpha) = u^*(\psi(t, u^0), x^0(t), t)$. Остается заметить, что в силу (11)

$$H(\psi(t, u^0), x^0(t), u^0(t), t) = H(\psi(t, u^0), x^0(t), v^*, t),$$

т. е. $u^0(t) = u^*(\psi(t, u^0), x^0(t), t)$ (управление $u^0(t)$ удовлетворяет принципу максимума). Обратное рассуждение проводится также элементарно.

Сформулируем теперь условие оптимальности (условие неулучшения), лежащее в основе процедуры 1), 2).

Условие A_1: *для оптимальности управления $u^0(t)$ в задаче (1)–(3) необходимо, чтобы траектория $x(t,u^0)$ была единственным решением задачи Коши (10) для всех $\alpha>0$.*

Справедливость утверждения вполне очевидна. Если для какого-то $\alpha>0$ система (10) имеет решение $x_\alpha(t)$, отличное от $x(t,u^0)$ на T, то в силу оценки (6) имеет место строгое улучшение: $\Phi(v^\alpha)<\Phi(u^0)$.

Понятно, что принцип максимума является следствием условия A_1. Это значит, что процедура 1), 2) может улучшать управления, удовлетворяющие принципу максимума (в частности, особые управления). Такое впечатляющее свойство реализуется через возможную неединственность решения системы (10), которая в свою очередь связана с попаданием фазовой траектории на многообразие разрыва правой части (поверхность переключения управления). При этом отметим, что решение системы (10), проходящее по поверхности разрыва (особое решение, скользящий режим), определяется естественным образом через дифференцирование по времени функции переключения. К примеру, если $v^*(x,t,\alpha)=\operatorname{sign} g_\alpha(x,t)$, $\operatorname{sign}0\in[-1,1]$, и траектория $x_\alpha(t)$ в момент τ попадает на поверхность разрыва: $g_\alpha(x_\alpha(\tau),\tau)=0$, то особое решение характеризуется тождеством $g_\alpha(x_\alpha(t),t)=0$, $t>\tau$, причем порождающее управление находится из уравнения $\frac{d}{dt}g_\alpha(x_\alpha(t),t)=0$, $t>\tau$, с последующей проверкой на выполнение ограничений (3).

Отметим возможную патологию: система (10) не имеет решения на T. Это означает, что управление $u^0(t)$ не удовлетворяет принципу максимума. В этом особом случае процедура 1), 2) не действует и нужно перейти на стандартные способы локального улучшения.

Приведем иллюстрирующие примеры.

Пример 1 (улучшение управления, строго удовлетворяющего принципу максимума).

$$\Phi(u)=-x(2)+2\int_0^2 x(t)(2-3u(t))dt\to\min,$$
$$\dot x=2(u-1)t,\quad x(0)=1,\quad u(t)\in[0,1],\quad t\in T.$$

В данном случае функция $H=2\psi(u-1)t-2x(2-3u)$, сопряженные уравнения: $\dot\psi=2(2-3u)$, $\psi(2)=1$, $\dot\Psi=\alpha$, $\Psi(2)=-\alpha$, $\alpha\ge0$. Следовательно, независимо от управления $\Psi_\alpha(t)=\alpha(t-3)$. Максимизирующее управление $u^*(\psi,x,t)=\begin{cases}0, & H_u(\psi,x,t)<0;\\ 1, & H_u(\psi,x,t)>0.\end{cases}$ Рассмотрим управление $u^0(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 1;\\ 0, & 1<t\le 2.\end{cases}$ Ему соответствуют траектории

$$x(t,u^0)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 1,\\ 2-t^2, & 1<t\le 2,\end{cases}\qquad \psi(t,u^0)=\begin{cases}-2t-1, & 0\le t\le 1,\\ 4t-7, & 1<t\le 2.\end{cases}$$

Нетрудно видеть, что управление $u^0(t)$ строго удовлетворяет принципу максимума ($u^0(t)=u^*(\psi(t,u^0),x(t,u^0),t)$, $t\in T$) с особой точкой $t=1$ (точка переключения).

Проверим условие A_1. Функция переключения управления $v^*(x,t,\alpha)$ имеет вид

$$g_\alpha(x,t)=\begin{cases}-4t^2-2t+2t\alpha(t-3)(x-1)+6x, & 0\le t\le 1,\\ 8t^2-14t+6+2t\alpha(t-3)(x+t^2-2)+6x, & 1<t\le 2.\end{cases}$$

Решим уравнение

$$\dot x=2(v^*-1)t,\quad x(0)=1. \tag{12}$$

Для $t\in[0,1]$ решение единственно и совпадает с $x(t,u^0)$. При $t=1$ траектория попадает на линию разрыва управления v^* ($g_\alpha(x^0(1),1)=0$) и появляется возможность неединственности решения. Функция $x^0(t)=x(t,u^0)$ является решением уравнения (12), ибо $g_\alpha(x^0(t),t)<0$, $t\in(1,2]$, независимо от α. Исследуем альтернативную возможность $g_\alpha(x^0(t),t)>0$, $t\in(1,2]$. Это значит, что $v^* = 1$, т. е. $x_\alpha(t) = 1$. Тогда $g_\alpha(x_\alpha(t), t) = 8t^2 - 14t + 6 + 2t\alpha(t-3)(t^2-1)$. Нетрудно проверить, что при $\alpha \in [0, 1/12]$ $g_\alpha(x_\alpha(t), t) > 0$, $t \in (1, 2]$. Таким образом, фазовое уравнение (12) для указанных значений α имеет решение $x_\alpha = 1$ ($v^\alpha(t) = 1$), отличное от $x(t, u^0)$. Это значит, что условие A_1 не выполнено (управление u^0 не оптимально), причем управление $v^\alpha(t) = 1$ является улучшающим.

Отметим, что уравнение (12) имеет также особое решение ($g_\alpha(x_\alpha(t), t) = 0$, $t \in [1, 2]$), которое обеспечивает улучшение для $\alpha > 0$.

Пример 2 (улучшение особого управления).

$$\Phi(u) = -\int_0^1 x(t)u(t)dt \to \min,$$
$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad |u(t)| \le 1, \quad t \in [0, 1].$$

В данном случае $H = \psi u + ux$, $\dot{\psi} = -u$, $\psi(1) = 0$. Максимизирующее управление $u^*(\psi, x) = \operatorname{sign}(\psi + x)$. Рассмотрим управление $u^0 = 0$. Ему соответствуют траектории $x(t, u^0) = 0$, $\psi(t, u^0) = 0$. Данное управление является особым: $H_u(\psi(t, u^0), x(t, u^0)) = 0$, т. е. удовлетворяет принципу максимума с вырождением.

Проверим условие A_1. Вторая сопряженная функция имеет вид $\Psi_\alpha(t, u^0) = \alpha(t-2)$, $\alpha \ge 0$. При этом $p_\alpha(t, u^0, x) = \alpha(t-2)x$, $v^*(x, t, \alpha) = \operatorname{sign}(\alpha(t-2)+1)x$. Рассмотрим уравнение $\dot{x} = v^*$, $x(0) = 0$. Оно имеет особое решение $x^0(t) = 0$ при любом $\alpha \ge 0$. Соответствующее управление $u^0 = 0$. Кроме того, для $\alpha \in [0, 1/2]$ (когда $\alpha(t-2) + 1 > 0$, $t \in (0, 1]$) уравнение имеет еще два решения: $x(t) = \pm t$ с порождающими управлениями $v(t) = \pm 1$.

Следовательно, условие A_1 не выполнено, и управление u^0 улучшается управлениями $v(t) = \pm 1$, $t \in [0, 1]$, при $\alpha \in [0, 1/2]$.

Пример 3 (уравнение (10) не имеет решения).

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2(t) - u^2(t))dt \to \min,$$
$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad |u(t)| \le 1, \quad t \in [0, 1].$$

В данном случае $H = \psi u - \frac{1}{2}(x^2 - u^2)$, $\dot{\psi} = x$, $\psi(1) = 0$. Максимизирующее управление

$$u^*(\psi) = \begin{cases} \operatorname{sign}\psi, & \psi \ne 0, \\ \pm 1, & \psi = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим управление $u^0(t) = 0$ с траекториями $x(t, u^0) = 0$, $\psi(t, u^0) = 0$. Реализуем условие A_1. Вторая сопряженная функция определяется уравнением $\dot{\Psi} = 1 + \alpha$, $\Psi(1) = -\alpha$, т. е. $\Psi_\alpha(t, u^0) = (1+\alpha)t - 1 - 2\alpha$. Тогда $p_\alpha(t, u^0, x) = \Psi_\alpha(t, u^0)x$, $v^*(x, t, \alpha) = u^*(p_\alpha(t, u^0, x))$. Отметим, что $\Psi_\alpha(t, u^0) < 0$ для $\alpha \ge 0$, $t \in [0, 1]$. Нетрудно видеть, что уравнение $\dot{x} = v^*$, $x(0) = 0$ не имеет решений на $[0, 1]$. Это значит, что управление u^0 не удовлетворяет принципу максимума (тем более условию A_1). При этом вопрос об улучшающем управлении остается открытым.

По сути ситуации отметим, что отсутствие решения связано с невыпуклостью правой части уравнения $\dot{x} = v^*$ при $x = 0$: $v^* = \pm 1$. Это нарушает основное условие теоремы существования решения разрывных систем ([5], гл. 2, § 7). Дополнительная патология состоит в том, что задача оптимального управления в данном примере также не имеет решения. В этой связи интересно отметить, что численное интегрирование уравнения $\dot{x} = v^*$, $x(0) = 0$, например, методом Эйлера приводит к минимизирующей последовательности управлений в данной задаче (пошаговое переключение ± 1), если шаг интегрирования последовательно уменьшать.

Пример 4 (эффект регуляризации).

$$\Phi(u) = \int_0^1 x(t)(u(t) - 1)dt \to \min,$$
$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad |u(t)| \le 1, \quad t \in [0, 1].$$

Здесь $H = \psi u - x(u-1)$, $\dot{\psi} = u-1$, $\psi(1) = 0$, $u^*(\psi, x) = \mathrm{sign}(\psi - x)$. Рассмотрим управление $u^0 = 0$ с траекториями $x(t, u^0) = 1$, $\psi(t, u^0) = 1 - t$. В данном случае $p_\alpha(t, u^0, x) = 1 - t + \alpha(t-2)(x-1)$, $v^*(x, t, \alpha) = \mathrm{sign}\, g_\alpha(x, t)$, $g_\alpha(x, t) = p_\alpha(t, u^0, x) - x$. Найдем решение уравнения $\dot{x} = v^*$, $x(0) = 1$. Начальная точка лежит на линии переключения: $g_\alpha(x(0), 0) = 0$. Нетрудно проверить, что уравнение не имеет неособых решений с условием $g_\alpha(x(t), t) \neq 0$, $t \in (0, 1]$. Единственное решение является особым (скользящий режим) и определяется условием $g_\alpha(x(t), t) = 0$, $t \in [0, 1]$. Отсюда

$$x_\alpha(t) = 1 - \frac{t}{1 - \alpha(t-2)}.$$

Соответствующее управление

$$v^\alpha(t) = \frac{-1 - 2\alpha}{(1 + 2\alpha - \alpha t)^2}$$

является допустимым для всех $\alpha \geq 0$, $t \in [0, 1]$. Поскольку $x_\alpha \neq x^0$, $\alpha \geq 0$, то управление u^0 не удовлетворяет принципу максимума. Однако при $\alpha = 0$ (когда регуляризация отсутствует) улучшения не происходит: $\Phi(v^0) = \Phi(u^0)$. Если $\alpha > 0$, то в силу оценки (6) имеет место строгое улучшение: $\Phi(v^\alpha) < \Phi(u^0)$. В этом состоит один из эффектов регуляризации: при $\alpha = 0$ особое решение системы (10), отличное от $x^0(t)$, не дает улучшения по функционалу. При $\alpha > 0$ строгое улучшение гарантируется оценкой (6) (вот почему условие A_1 сформулировано для $\alpha > 0$).

Продолжим работу с условием A_1, которое, как выяснилось (пример 2), действует и в случае особых управлений. Установим связь условия A_1 с известным условием Габасова оптимальности особых управлений ([6], гл. 4). Для упрощения выкладок предположим, что система (2) является линейной по управлению, и ограничение (3) имеет модульный характер: $|u(t)| \leq 1$, $t \in T$ (билинейно-квадратичная задача). В этой ситуации максимизирующее управление имеет вид

$$v^*(x, t, \alpha) = \mathrm{sign}\, g_\alpha(x, t), \quad g_\alpha(x, t) = H_u(p_\alpha(t, u^0, x), x, t).$$

Предположим, что управление $u^0(t)$ является особым на промежутке $T_0 = (\tau_0, \tau_1) \subset T$, т. е. по определению $H_u(\psi(t, u^0), x(t, u^0), t) = 0$, $t \in T_0$. Поскольку $p_\alpha(t, u^0, x(t, u^0)) = \psi(t, u^0)$, то $g_\alpha(x(t, u^0), t) = 0$, $t \in T_0$. Это значит, что траектория $x(t, u^0)$ является особым решением фазовой системы (10) на T_0.

Допустим, что на управлении $u^0(t)$, $t \in T$, условие A_1 выполнено, т. е. для любого $\alpha > 0$ траектория $x(t, u^0)$ является единственным решением фазовой системы (10). Выделим точку $\tau \in T_0$, в которой управление $u^0(t)$ непрерывно справа, и предположим, что $u^0(\tau) \neq 1$. Рассмотрим фазовую систему $\dot{x} = f(x, v^*, t)$ с начальным условием $x(\tau) = x(\tau, u^0)$ в правой окрестности точки $\tau : t \in [\tau, \tau + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Поскольку $x(t, u^0)$ — единственное решение этой системы на $[\tau, \tau + \varepsilon)$, то выбор управления $v(t) = 1$, $t \in [\tau, \tau + \varepsilon)$, приводит к неравенству $g_\alpha(x(t, v), t) \leq 0$, $t \in [\tau, \tau + \varepsilon)$, $\alpha > 0$ (в случае $g_\alpha(x(t, v), t) > 0$ вектор-функция $x(t, v)$ является решением фазовой системы на $[\tau, \tau + \varepsilon)$, что невозможно в силу условия A_1). Таким образом, имеет место неравенство

$$\int_\tau^{\tau+\varepsilon} H_u(\psi(t, u^0) + \Psi_\alpha(t, u^0)(x(t, v) - x(t, u^0)), x(t, v), t)dt \leq 0. \tag{13}$$

Остается выделить главный член по ε в левой части. Фазовое приращение $\Delta x(t) = x(t, v) - x(t, u^0)$ представляется в виде

$$\Delta x(t) = f_u(x(\tau, u^0), \tau)(v(\tau) - u^0(\tau))(t - \tau) + o(t - \tau).$$

Для функции под знаком интеграла используем разложение

$$g_\alpha(x(t, v), t) = H_u(\psi(t, u^0), x(t, u^0), t) + \langle f_u(x(t, u^0), t), \Psi_\alpha(t, u^0)\Delta x(t)\rangle + \\ + \langle H_{ux}(\psi(t, u^0), t), \Delta x(t)\rangle + o(\|\Delta x(t)\|).$$

Принимая во внимание, что $H_u(\psi(t,u^0),x(t,u^0),t)=0$, получаем выражение для главного члена

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 B_\alpha(\tau,u^0)(v(\tau)-u^0(\tau)),$$
$$B_\alpha(\tau,u^0)=\langle f_u[\tau,u^0],\Psi_\alpha(\tau,u^0)f_u[\tau,u^0]\rangle+\langle H_{ux}[\tau,u^0],f_u[\tau,u^0]\rangle.$$

Поскольку $v(\tau)-u^0(\tau)=1-u^0(\tau)>0$, то неравенство $B_\alpha(\tau,u^0)\le 0$, $\tau\in T_0$, $\alpha>0$, является следствием (13) (условия A_1). Далее заметим, что $\Psi_\alpha(t,u^0)=\Psi_0(t,u^0)+\alpha\Psi(t,u^0)$, где матричная функция $\Psi(t,u^0)$ определяется уравнением

$$\dot\Psi=-A(u^0,t)^T\Psi-\Psi A(u^0,t)+E,\quad \Psi(t_1)=-E.$$

Отсюда следует, что $\Psi(t,u^0)$, $t\in T$, — отрицательно определенная матрица, т. е.

$$\langle y,\Psi_\alpha(t,u^0)y\rangle\le\langle y,\Psi_0(t,u^0)y\rangle,\quad \alpha>0,\quad y\in R^n.$$

Из неравенства $B_\alpha(\tau,u^0)\le 0$ при $\alpha\to 0$ получаем $B_0(\tau,u^0)\le 0$, $\tau\in T_0$. Это известное условие Габасова для оптимальности особых управлений ([6], гл. 4), которое в данном случае получено как следствие условия A_1. Остается заметить, что в силу указанного выше свойства отрицательной определенности матрицы $\Psi(t,u^0)$ регуляризованное условие $B_\alpha(\tau,u^0)\le 0$ является следствием неравенства $B_0(\tau,u^0)\le 0$, т. е. процедура регуляризации не усиливает этот результат.

Сделаем замечание по части возможностей регуляризации в случае, когда стабилизатор (добавочный функционал) содержит среднеквадратичное отклонение по управлению

$$J_1(u,u^0)=\frac{1}{2}\int_T\|u(t)-u^0(t)\|^2dt+J(u,u^0).$$

Предположим, что задача является линейной по управлению с выпуклым множеством U. Тогда функция H_α, $\alpha>0$, в отличие от $H=H_0$ является сильно вогнутой по $u\in U$, и максимизирующее управление определяется как проекция

$$u^*(\psi,x,t)=P_U\Big(u^0(t)+\frac{1}{\alpha}H_u(\psi,x,t)\Big).$$

В силу свойства проекции вектор-функция $u^*(\psi,x,t)$ удовлетворяет условию Липшица по совокупности (ψ,x). Следовательно, управление $v^*(x,t,\alpha)$ обладает этим свойством относительно переменной x в любой ограниченной области $X\subset R^n$. В результате фазовая система (10) становится “нормальной”, т. е. имеет, вообще говоря, единственное решение $x_\alpha(t)$, $t\in T$. Это значит, что условие типа A_1 становится эквивалентным принципу максимума, т. е. процедура теряет возможность улучшения управлений, удовлетворяющих принципу максимума. Приведенные выше примеры хорошо иллюстрируют эту ситуацию (в примерах 1, 2 управление $u^0(t)$ не улучшается, в примере 3 управление $u^0(t)$, не удовлетворяющее принципу максимума, при $\alpha>1$ оказывается на выходе процедуры: $v^\alpha=u^0$).

Таким образом, полная регуляризация с функционалом $J_1(u,u^0)$ ликвидирует в общем случае разрывность максимизирующего управления и снимает вопрос о неединственности решения соответствующей фазовой системы. В результате снижается потенциал улучшения (“барьер” принципа максимума не преодолевается), поэтому целесообразность использования полной регуляризации в рамках описанной схемы представляется пока проблематичной.

2. Вторая процедура улучшения

Рассмотрим задачу (1)–(3) с регуляризацией (5). Возьмем за основу вторую формулу приращения функционала $F_\alpha(u,u^0)$ [1]

$$\Delta F_\alpha(u,u^0)=-\int_T\Delta_{u(t)}H(p_\alpha(t,u,x(t,u^0)),x(t,u^0),u^0(t),t)dt,\tag{14}$$
$$p_\alpha(t,u,x)=\psi_\alpha(t,u)+\Psi_\alpha(t,u)(x-x(t,u)).$$

Учитывая сопряженные системы (7), (8), нетрудно получить дифференциальное описание вектор-функции $p_\alpha(t,u,x(t,u^0))$ в виде уравнения

$$\begin{gathered}\dot p=-A(u,t)^Tp+Q(t)x(t,u^0)-\Psi_\alpha(t,u)\Delta_u f(x(t,u^0),u^0(t),t),\\ p(t_1)=-(c+Dx(t_1,u^0)).\end{gathered}\tag{15}$$

Отметим, что система (15) не зависит от траектории $x(t,u)$, что открывает возможность конструктивного использования формулы (14).

Приведем альтернативное выражение для вектор-функции $p_\alpha(t,u,x)$, которое применяется в дальнейшем и имеет вид

$$p_\alpha(t,u,x)=p_\alpha(t,u,x(t,u^0))+\Psi_\alpha(t,u)(x-x(t,u^0)).\tag{16}$$

Процедура улучшения:

1) образуем экстремальное управление $v^*(p,t)=u^*(p,x(t,u^0),t)$,
2) найдем решение $p_\alpha(t)$, $\Psi_\alpha(t)$ сопряженных систем (15), (8) при $u=v^*(p,t)$ вместе с управлением $v^\alpha(t)=v^*(p_\alpha(t),t)$, $t\in T$.

Понятно, что выходное управление $v^\alpha(t)$ характеризуется соотношением

$$v^\alpha(t)=\arg\max_{u\in U}H(p_\alpha(t,v^\alpha,x(t,u^0)),x(t,u^0),u,t),$$

поэтому на основании формулы (14) при $u=v^\alpha$ имеет место улучшение $\Delta F_\alpha(v^\alpha,u^0)\le 0$ с оценкой уменьшения (6) для функционала $\Phi(u)$.

В данном случае разрывными относительно переменной p являются сопряженные системы (15), (8). Отметим качественные характеристики процедуры 1), 2) в терминах управлений.

Обозначим через $V_\alpha(u^0)$ множество управлений $v^\alpha(t)$, $t\in T$, на выходе процедуры 1), 2). Тогда принцип максимума описывается очевидным утверждением: *для оптимальности управления $u^0(t)$ в задаче* (1)–(3) *необходимо, чтобы $u^0\in V_\alpha(u^0)$ хотя бы для одного $\alpha\ge 0$* .

Предположим выполнение следующего условия регулярности: если $v^\alpha\ne u^0$, $\alpha>0$, то $J(v^\alpha,u^0)\ne 0$ (если управления v^α, u^0 не совпадают, то соответствующие фазовые траектории $x(t,v^\alpha)$, $x(t,u^0)$ также не совпадают).

Сформулируем условие оптимальности, лежащее в основе процедуры 1), 2).

Условие $\mathbf{A}_2$: *для оптимальности управления $u^0(t)$ в задаче* (1)–(3) *необходимо, чтобы $V_\alpha(u^0)=\{u^0\}$ для всех $\alpha>0$.*

С учетом условия регулярности утверждение вполне очевидно. Понятно, что принцип максимума является следствием условия A_2. Дальнейшая характеризация условия A_2 вполне аналогична предыдущему (см. п. 1). Отметим только, что условия A_1, A_2 работают, вообще говоря, независимо, что в определенной мере подтверждается приведенными выше примерами.

3. Метод приращений

Метод приращений объединяет обе процедуры улучшения в рамках единого итерационного процесса, что позволяет уменьшить вычислительные затраты в расчете на одно улучшение по функционалу.

Зафиксируем параметр регуляризации $\alpha>0$ (в дальнейшем зависимость от α не выделяется) и опишем общую итерацию метода. Напомним, что $u^*(\psi,x,t)=\arg\max\limits_{u\in U}H(\psi,x,u,t)$.

Пусть $k=0,1,\dots$, $(u^k(t),x^k(t))$ — допустимая пара в задаче (1)–(3). Найдем решение $p^k(t)$, $\Psi^k_\alpha(t)$ векторно-матричной системы при $v^*=u^*(p,x^k(t),t)$

$$\begin{gathered}\dot p=-A(v^*,t)^Tp+Q(t)x^k(t)-\Psi\Delta_{v^*}f(x^k(t),u^k(t),t),\\ \dot\Psi=-A(v^*,t)^T\Psi-\Psi A(v^*,t)+Q(t)+\alpha E,\\ p(t_1)=-(c+Dx^k(t_1)),\quad \Psi(t_1)=-D-\alpha E.\end{gathered}$$

Выделим управление $v^k(t) = u^*(p^k(t), x^k(t), t)$ и образуем вектор-функцию

$$p(t, v^k, x) = p^k(t) + \Psi_\alpha^k(t)(x - x^k(t)).$$

Найдем решение $x^{k+1}(t)$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, v^*, t), \quad x(t_0) = x^0$$

при $v^* = u^*(p(t, v^k, x), x, t)$. Соответствующее управление есть $u^{k+1}(t)$. Итерация $k \to k+1$ завершена.

Отметим, что переход $u^k \to v^k$ (первая фаза итерации) есть реализация второй процедуры улучшения для управления u^k. Оценка уменьшения функционала имеет вид $\Phi(v^k) - \Phi(u^k) \leq -\alpha J(v^k, u^k)$.

Вторая фаза итерации ($v^k \to u^{k+1}$) реализует первую процедуру улучшения для управления v^k с использованием формулы пересчета (16). Соответствующая оценка: $\Phi(u^{k+1}) - \Phi(v^k) \leq -\alpha J(u^{k+1}, v^k)$.

Величина $\delta_k = \Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1})$ является невязкой принципа максимума для управления $v^k : \delta_k = 0 \Longrightarrow \Phi(v^k) = \Phi(u^{k+1}) \Longrightarrow J(u^{k+1}, v^k) = 0$. Поскольку функционал $\Phi(u)$ ограничен снизу на V (множество U ограничено), и последовательность $\{\Phi(u^k)\}$, $k = 0, 1, \ldots$, монотонно убывает, имеет место сходимость метода по невязке принципа максимума: $\delta_k \to 0$, $k \to \infty$. Отсюда, в частности, следует, что отклонения по фазовым траекториям стремятся к нулю: $J(v^k, u^k) \to 0$, $J(u^{k+1}, v^k) \to 0$, $k \to \infty$.

Изучим асимптотические свойства метода на уровне выпуклых задач (1)–(3), (4). Регуляризация (5) сохраняет свойство выпуклости, причем в рассматриваемом случае $\Delta_u H(\psi, u^0, t) = \langle \psi, \Delta_u b(u^0, t)\rangle$, и матричная функция $\Psi_\alpha(t, u)$ не зависит от управления: $\Psi_\alpha(t, u) = \Psi_\alpha(t)$ (в методе приращений $\Psi_\alpha^k(t)$ не зависит от номера итерации $k : \Psi_\alpha^k(t) = \Psi_\alpha(t)$). Формула приращения (9) для функционала $F_\alpha(u, u^0)$ принимает вид

$$\Delta F_\alpha(u, u^0) = -\int_T \langle \psi(t, u^0) + \Psi_\alpha(t)(x(t, u) - x(t, u^0)), \Delta_{u(t)} b(u^0(t), t)\rangle dt.$$

В силу выпуклости функционала F_α относительно переменной x имеет место оценка

$$\Delta F_\alpha(u, u^0) \geq -\int_T \langle \psi(t, u^0), \Delta_{u(t)} b(u^0(t), t)\rangle dt.$$

Сравнивая с предыдущим выражением, получаем вспомогательное неравенство

$$\int_T \langle \Psi_\alpha(t)(x(t, u) - x(t, u^0)), \Delta_{u(t)} b(u^0(t), t)\rangle dt \leq 0. \tag{17}$$

Сформулируем основное утверждение о сходимости метода.

Теорема. *В выпуклой задаче* (1)-(3), (4) *сходимость метода приращений для любого* $\alpha > 0$ *характеризуется соотношениями*

$$\Phi(u^k) \to \Phi(u^*), \quad J(u^k, u^*) \to 0, \quad k \to \infty,$$

где $u^* \in V$ *— оптимальное управление.*

Доказательство. В соответствии с методом имеем

$$p^k(t) = \psi(t, v^k) + \Psi_\alpha(t)(x^k(t) - x(t, v^k)),$$
$$v^k(t) = \arg\max_{u \in U} \langle p^k(t), b(u, t)\rangle.$$

Рассмотрим приращение функционала $F_\alpha(u, u^*)$ на паре u^*, v^k. На основании формулы (14) получаем

$$\Delta F_\alpha(v^k, u^*) = \int_T \langle \psi(t, v^k) + \Psi_\alpha(t)(x(t, u^*) - x(t, v^k)),\ \Delta_{u^*(t)} b(v^k(t), t)\rangle dt.$$

Используя неравенство (17), приходим к оценке

$$\Delta F_\alpha(v^k, u^*) \le \int_T \langle \psi(t, v^k), \Delta_{u^*(t)} b(v^k(t), t)\rangle dt.$$

Согласно определению $v^k(t)$ выполняется неравенство

$$\langle \psi(t, v^k) + \Psi_\alpha(t)(x^k(t) - x(t, v^k)), \Delta_{u^*(t)} b(v^k(t), t)\rangle \le 0, \quad t \in T.$$

Следовательно,

$$\Delta F_\alpha(v^k, u^*) \le \int_T \langle \Psi_\alpha(t)(x(t, v^k) - x^k(t)), \Delta_{u^*(t)} b(v^k(t), t)\rangle dt.$$

Далее используем оценки ограниченности

$$\|\Psi_\alpha(t)\| \le C_\alpha, \quad \|\Delta_{u^*(t)} b(v^k(t), t)\| \le B, \quad t \in T.$$

В результате получаем

$$\Phi(v^k) - \Phi(u^*) + \alpha J(v^k, u^*) \le C_\alpha B \int_T \|x(t, v^k) - x^k(t)\| dt. \tag{18}$$

Поскольку $J(v^k, u^k) \to 0$, $k \to \infty$, то

$$\int_T \|x(t, v^k) - x^k(t)\| dt \to 0, \quad k \to \infty.$$

Отсюда с учетом (18)

$$\Phi(v^k) - \Phi(u^*) \to 0, \quad J(v^k, u^*) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Далее заметим, что $\Phi(u^{k+1}) \le \Phi(v^k)$. Кроме того, на основании неравенства треугольника для нормы приходим к заключению, что $J(u^{k+1}, u^*) \to 0$, $k \to \infty$ ($J(u^{k+1}, v^k) \to 0$, $J(v^k, u^*) \to 0$). В результате получаем утверждение теоремы. $\square$

Подведем итог. Метод приращений с регуляризацией в выпуклой задаче порождает минимизирующую последовательность $\{u^k(t)\}$ управлений для любого $\alpha > 0$. При этом последовательности фазовых траекторий $\{x^k(t)\}$ и концевых точек $\{x^k(t_1)\}$ сходятся к оптимальной траектории $x^*(t)$ по нормам пространств $L_2^n(T)$ и R^n соответственно. Подчеркнем, что при $\alpha = 0$ (без регуляризации) данные утверждения не имеют места.

Обсудим, наконец, вопрос о приемлемом выборе параметра регуляризации α. С этой целью обратимся к оценке сходимости (18). Величина C_α определяется оценкой $\|\Psi_\alpha(t)\| \le C_\alpha$, $t \in T$. Поскольку $\Psi_\alpha(t) = \Psi_0(t) + \alpha\Psi(t)$, то коэффициент C_α имеет аналогичную структуру: $C_\alpha = C_0 + \alpha C_1$. Поэтому уменьшение α, вообще говоря, улучшает оценку (18). В этом плане представляется целесообразным работать с малыми значениями α. К этому же выводу приводят и рассмотренные выше примеры 1, 2 (улучшение экстремальных управлений обеспечивается при условии $0 \le \alpha \le \beta$). Вот почему уместно связать выбор параметра регуляризации α с номером итерации k, т. е. реализовать метод с последовательностью α_k, $k = 0, 1, \ldots$, при условии $\alpha_k \to 0$, $k \to \infty$. Такой вывод вполне согласуется с классическим вариантом метода регуляризации для экстремальных задач ([3], гл. 2) и с результатами численного эксперимента, проведенного на ряде тестовых задач.

Литература

1. Захарченко В.С., Срочко В.А. *Метод приращений для решения квадратичных задач оптимального управления* // Изв. РАН. Сер. теория и системы управления. – 1995. – № 6. – С. 145–154.
2. Антоник В.Г., Срочко В.А. *Метод проекций в линейно-квадратичных задачах оптимального управления* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т. 38. – № 4. – С. 564–572.
3. Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач. Задачи минимизации в функциональных пространствах, регуляризация, аппроксимация.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
4. Батурин В.А., Урбанович Д.Е. *Методы улучшения второго порядка для задач оптимального управления* // Изв. РАН. Сер. теория и системы управления. – 1997. – № 3. – С. 99–103.
5. Филиппов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* – М.: Наука, 1985. – 224 с.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Особые оптимальные управления.* – М.: Наука, 1973. – 256 с.

Иркутский государственный университет

Поступила
25.05.1998