И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2006 МАТЕМАТИКА № 3 (526)

УДК 517.929

М.М. АРСЛАНОВ, Н. КЕХАЙОПУЛУ

СЛАБЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЫЧИСЛИМЫХ ЧАСТИЧНО-УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУПП

1. Введение

Частично-упорядоченная полугруппа с $\mathcal{S} = \langle S, +, <_L\rangle$ с основным множеством S называется вычислимой (или рекурсивной), если S конечно или $\langle S, +, <_L\rangle \simeq \langle \omega, +, <_{L'}\rangle$, с вычислимой функцией "+" вычислимым предикатом "L'" (т. е. следующая функция $L'(x, y)$ вычислима: $L'(x, y) = 1$, если $x <_{L'} y$, и $L'(x, y) = 0$ в противном случае). Следуя [1], определим слабое представление счетной частично-упорядоченной полугруппы $\langle S, +, <_L\rangle$ как частично-упорядоченную полугруппу $\langle P, +, L'\rangle$ с основным множеством $P \subset \omega$, с *потенциально вычислимыми* функцией "+" и предикатом "L'". (Говорят, что операция "+" и предикат "L'" потенциально вычислимы, если они имеют (всюду определенные) вычислимые расширения.) В этом случае также говорят (см. [1]), что множество P *поддерживает* S.

В данной работе рассматриваются слабые представления $\langle P, +, <_{L'}\rangle$ вычислимых частично-упорядоченных полугрупп $\langle S, +, <_L\rangle$ с вычислимо перечислимыми (в. п.) основными множествами P. Легко проверить, что если такая полугруппа $\langle S, +, L\rangle$ имеет слабое представление $\langle P, +, <_{L'}\rangle$ с в. п. основным множеством P, то $\langle S, +, <_L\rangle$ является вычислимой частично-упорядоченной полугруппой. Действительно, пусть для всех $i, j \in \omega$ по определению $i <_{L''} j$ тогда и только тогда, когда $a_i <_{L'} a_j$, где $a_0, a_1, \dots$ — эффективное перечисление P без повторений (без ограничения общности можно предположить, что P бесконечно). Теперь ясно, что $\langle M, <_L\rangle \simeq \langle \omega, <_{L''}\rangle$, и L'' — вычислимый предикат. Аналогично для функции "+". Вычислимые частично-упорядоченные полугруппы изучаются с точки зрения иметь или не иметь слабые представления с в. п. основными множествами. В теореме 4 доказывается, что любая коммутативная вычислимая полугруппа $\mathcal{S} = \langle S, +\rangle$ имеет слабое представление в каждой в. п. степени. Другими словами, любая в. п. степень содержит в. п. множество, которое ее поддерживает. С другой стороны, в теореме 1 доказывается, что существует такая вычислимая частично-упорядоченная полугруппа $\mathcal{S}$, что в каждой в. п. степени $\mathbf{a}$ существует не поддерживающее $\mathcal{S}$ в. п. множество A.

Используемые в данной статье определения и обозначения теории вычислимости стандартны и могут быть найдены, например, в [2]. Иногда будем идентифицировать частичные порядки на ω с их характеристическими функциями, т. е. вместо $x <_L y$ пишем $L(x, y) = 1$ и вместо $x \not<_L y$ пишем $L(x, y) = 0$. В частности, иногда пишем $\langle A, L\rangle$ вместо $\langle A, <_L\rangle$. Если A — некоторое множество, то пусть $A \upharpoonright x = \{y \in A : y < x\}$. Для функции f и множества A запись $f \upharpoonright A$ означает ограничение области определения f множеством A.

2. Степени слабых представлений

Предложение. *Существует счетная частично-упорядоченная полугруппа $\mathcal{S}$, имеющая слабое представление в каждом бесконечном множестве натуральных чисел.*

Авторы благодарят греческий фонд сотрудничества, частично поддержавший их исследование. Первый автор также был поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 05-01-00830.

Доказательство. Пусть $S = \{\emptyset, 1, 11, \dots\}$, и для всех $\alpha, \beta \in S$ определим $\alpha \times \beta = \max\{\alpha, \beta\}$. Пусть также по определению $\alpha \leq_S \beta$ тогда и только тогда, когда $|\alpha| \leq |\beta|$. (Ясно, что если $|\alpha| = |\beta|$, то $\alpha = \beta$.) Теперь пусть $A = \{a_0 < a_1 < \cdots\}$ — бесконечное подмножество ω. Определим вложение $\tau : \alpha \to a_i$, где $i = |\alpha|$. Легко проверить, что τ является изоморфизмом между $\{S, \times, \leq_S\}$ и $\{A, *, \leq_A\}$, где по определению $a_i * a_j = a_{\max\{i,j\}}$, и $a_i \leq_A a_j$ тогда и только тогда, когда $i \leq j$. Ясно также, что $x \leq_A y$ и $x * y$ — потенциально вычислимые предикат и функция: для предиката $\leq_A$ его всюду определенным вычислимым расширением является $\lambda x, y(x \leq y)$, а для функции $x*y$ таким расширением является функция $\lambda x, y(x*y = \max\{x, y\})$.

Докажем, что не каждая вычислимая полугруппа может иметь слабое представление в каждом бесконечном в. п. множестве. Более того, в теореме 1 построим такую вычислимую полугруппу $\mathcal{S}$, что каждая в. п. не вычислимая тьюринговая степень содержит в. п. множество, не поддерживающее $\mathcal{S}$.

Теорема 1. *Существует такая вычислимая полугруппа $\mathcal{S}$, что для любого в. п. не вычислимого множества A найдется в. п. множество $B \equiv_T A$, не поддерживающее $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Определим $\mathcal{S} = \{\omega, \mathbf{\Delta}\}$ как полугруппу с основным множеством $\omega = \{0, 1, \dots\}$ и следующей операцией $\mathbf{\Delta}$:

$i\mathbf{\Delta}j = 3$ для всех $i, j \leq 3$, $i \neq j$;
$0\mathbf{\Delta}2n = 2n\mathbf{\Delta}0 = 2n + 1$ для всех $n > 0$;
$0\mathbf{\Delta}(2n + 1) = (2n + 1)\mathbf{\Delta}0 = 2n + 1$ для всех $n \geq 1$;
$2n\mathbf{\Delta}2m = \max\{2n, 2m\}$ для всех $n, m \geq 1$;
$(2n + 1)\mathbf{\Delta}(2m + 1) = \max\{2n, 2m\} + 1$ для всех $n, m \geq 0$;
$(2n - 1)\mathbf{\Delta}2(m + 1) = 2(m + 1)\mathbf{\Delta}(2n - 1) = 2m + 3$ для всех $n \geq 1, m \geq n$;
$2n\mathbf{\Delta}(2(n + i) + 1) = (2(n + i) + 1)\mathbf{\Delta}2n = 2(n + i) + 1$ для всех $n \geq 1, i \geq 0$;
$a\mathbf{\Delta}a = a$ для всех $a \in \omega$.

Легко проверить, рассматривая все случаи, что $a\mathbf{\Delta}(b\mathbf{\Delta}c) = (a\mathbf{\Delta}b)\mathbf{\Delta}c$ для всех $a,\ b,\ c$. Пусть, например, $a = 2n - 1, b = 2n - 2, c = 2n + 1$. Тогда $(2n - 1)\mathbf{\Delta}((2n - 2)\mathbf{\Delta}(2n + 1)) = (2n - 1)\mathbf{\Delta}(2n + 1) = 2n + 1 = (2n + 1)\mathbf{\Delta}(2n + 1) = ((2n - 1)\mathbf{\Delta}(2n - 2))\mathbf{\Delta}(2n + 1)$.

Теперь предположим, что для полугруппы $\mathcal{S}$ существует слабое представление $\mathcal{S}' = \{S', \oplus\}$ с основным в. п. множеством S', и что $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}'$ посредством $1-1$-частичной функции $f : S \to S'$. Докажем сначала, что мы можем организовать такое эффективное перечисление $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ множества S', что для всех i справедливо $f(i) = a_i$, причем геделевский номер этого перечисления (в нумерации всех эффективных перечислений) может быть эффективно найден по номеру вычислимой функции h, являющейся продолжением для $\oplus$. Действительно, пусть $h : \omega^2 \to \omega$ — такая (всюду определенная) вычислимая функция, что для всех $x,\ y$ $(x, y) \in \operatorname{dom} \oplus \to h(x, y) = \oplus(x, y)$. Сначала заметим, что существуют в точности две тройки $\tau_0 = \{a_0, a_1, a_2\}$ и $\tau_1 = \{a_0, a_1, a_4\}$ элементов $\mathcal{S}'$ со следующим свойством: если $x,\ y,\ z$ — все три элемента τ_i, $i \leq 1$, то $x \oplus y \notin \{x, y\}$, $x \oplus z \notin \{x, z\}$, $y \oplus z \notin \{y, z\}$. Кроме того, a_0 — единственный элемент τ_0 со следующим свойством: в $\mathcal{S}' - \tau_0$ существуют ровно два элемента a_4 и a_6 такие, что $a_0 \oplus a_4 \neq a_4$ и $a_0 \oplus a_6 \neq a_6$. Далее, a_1 — единственный элемент $\tau_0 - \{a_0\}$ такой, что в $\mathcal{S}' - \tau_0$ существует элемент a_4 с аналогичным свойством.

Поэтому, эффективно перечисляя элементы множества ω и вычисляя значения h на этих перечисленных элементах, можно последовательно определить элементы $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$. Далее, операция $\oplus$ на $\mathcal{S}'$ обладает следующим свойством: для всех $i \geq 0$ и любых $x > 2i+1$ справедливо $a_{2i+1} \oplus a_x = a_x$, и для всех i существуют в точности два элемента a_{2i+2} и a_{2i+4} такие, что $a_{2i+2} \oplus a_{2i+4} \neq a_{2i+4}$. Кроме того, a_{2i+3} есть единственный элемент множества $\{a_x, x > 2i + 1\}$ такой, что $a_{2i+3} \oplus a_{2i+4} \neq a_{2i+4}$. Таким образом, можно определить все остальные элементы $f(3), f(4), \dots$, перечисляя ω и вычисляя все значения h на этих элементах.

Теперь построим в. п. множество D такое, что множество $B = A \oplus D$ имеет все необходимые свойства, а именно, $D \leq_{\mathrm{T}} A$, и B не поддерживает $\mathcal{L}$. Так как каждая не вычислимая в. п. степень содержит простое множество, то без ограничения общности можно предположить, что A — простое множество.

Условие $D \leq_{\mathrm{T}} A$ в ходе конструкции будет выполнено с помощью метода разрешения. Для выполнения последнего условия для всех e методом приоритета удовлетворяем следующим требованиям:

$$S_e : \Phi_e \text{ всюду определена и } \langle \omega, \mathbf{\Delta} \rangle \simeq \langle B, \oplus \rangle \text{ для некоторой бинарной}$$
$$\text{операции } \oplus \to \Phi_e \text{ не является расширением } \oplus\,.$$

Здесь $\{\Phi_e\}_{e\in\omega}$ — стандартная нумерация всех частично-вычислимых функций.

Для каждого $e \in \omega$ определим множество чисел $R_e = \{2\langle e, x\rangle + 1 : x \in \omega\}$, из которого берем числа для удовлетворения требования S_e.

Основная стратегия удовлетворения требования S_e без учета условия $B \leq_{\mathrm{T}} A$ заключается в следующем: в процессе пошаговой конструкции с требованием S_e связываем пары различных чисел $(n_0, m_0), (n_1, m_1), \ldots$ из множества R_e и ждем наступления таких шагов $s_0, s_1, \ldots,$ что $\Phi_{e,s_i}(n_i, m_i)$ определены (если это для некоторой пары n_i, m_i никогда не случится, то n_i, m_i удовлетворяют S_e) и $\Phi_e(n_i, m_i) = k_i \in A_{s_i}$ для некоторого $i \in \omega$. Легко проверить, что для каждого k существует только конечное множество пар n, m таких, что $n\mathbf{\Delta}m = k$. Так как A — простое множество, то для некоторой пары n_i, m_i мы должны иметь либо $\Phi_e(n_i, m_i) = k_i \in A_{s_i}$, либо k_i является нечетным числом. (В противном случае Φ_e не подходит для слабого представления $\langle \omega, \mathbf{\Delta} \rangle$ в $A \oplus D$, и поэтому требование S_e удовлетворено.) Пусть $\{A_s \oplus D_s\}_{s\in\omega}$ является перечислением множества $A \oplus D$, определенное вышеописанным образом, и при предположении, что $\langle A \oplus D, \oplus \rangle$ является слабым представлением для $\langle \omega, \mathbf{\Delta} \rangle$, а функция Φ_e расширяет $\oplus$.

Случай 1. $\Phi_{e,s'}(n, m) = k = 2k'$ для некоторых k', s' и $k \in A_{s'}$. Тогда

шаг 1. перечисляем m в множество $A \oplus D$;

шаг 2. ждем наступления такого шага $s'' > s'$, что

$$\langle \{x : x \in A_{s''} \oplus D_{s''}\}, \oplus \rangle \simeq \langle \{a_0, a_1, \ldots, a_{\max\{m,n,k\}}\}, \mathbf{\Delta} \rangle$$

(если такого шага s'' не существует, то требование S_e очевидным образом удовлетворено);

шаг 3. перечисляем n в $D_{s''+1}$ и удовлетворяем требование S_e.

Случай 2. $\Phi_{e,s'}(n, m) = k = 2k' + 1$ для некоторой пары k', s'. Тогда

шаг 1. перечисляем m, k в $A \oplus D$;

шаг 2. ждем наступления такого шага $s' > s$, что

$$\langle \{x : x \in A_{s'} \oplus D_{s'}\}, \oplus \rangle \simeq \langle \{a_0, a_1, \ldots, a_{\max\{m,n,k\}}\}, \mathbf{\Delta} \rangle$$

(если нет такого шага s', то, очевидно, требование S_e удовлетворено);

шаг 3. перечисляем n в D_{s^*+1} и удовлетворяем требование S_e.

Теперь надо выполнить условие $D \leq_{\mathrm{T}} A$ с помощью метода "разрешения". В случае 1 надо, чтобы A "разрешило" числам m и n войти в D соответственно на шагах 1 и 3. В случае 2 надо, чтобы A "разрешило" числам m, k и n войти в D соответственно на шагах 1 и 3.

С этой целью делаем бесконечное множество попыток удовлетворить S_e с помощью ω-последовательности "циклов", где каждый цикл t действует следующим образом.

Шаг 1. Выбираем ранее неиспользованную пару чисел $m_{i,t}, n_{i,t} \in R_e$, $i \in \omega$, и ждем наступления такого шага s, на котором выполняется для пары $n_t = n_{i,t}$, $m_t = m_{i,t}$ один из следующих двух случаев.

Случай 1. $\Phi_e(n_t, m_t) = k_t = 2k'$ для некоторых k' и $k_t \in A_s$. Здесь действуем следующим образом:

шаг 2. перечисляем m_t в $A \oplus D$ (имея на это "разрешение" от A через $k_t \in (A_s - A_{s-1})$);

шаг 3. ждем наступления шага $s' > s$ такого, что

$$\langle \{x : x \in A_{s'} \oplus D_{s'}\}, \oplus \rangle \simeq \langle \{a_0, a_1, \ldots, a_{\max\{m_t,n_t,k_t\}}\}, \mathbf{\Delta} \rangle$$

(ясно, что если такого шага s' не существует, то требование S_e удовлетворено);

шаг 4. ждем изменения $A \restriction t$ на некотором шаге $\widetilde{s}$, и открываем цикл $t+1$ для одновременной работы с циклом t;

шаг 5. перечисляем n_t в $D_{\tilde{s}+1}$ и удовлетворяем требование S_e.

Случай 2. $\Phi_{e,s}(n, m) = k = 2k' + 1$ для некоторого k'. Здесь действуем следующим образом:

шаг 2. ждем изменения $A \upharpoonright k$ на некотором шаге s' и открываем цикл $t+1$ для одновременной работы с циклом t;

шаг 3. останавливаем все циклы $t' > t$;

шаг 4. перечисляем $m_t,\ k_t$ в $A \oplus D$;

шаг 5. ждем наступления такого шага $s' > s$, что
$\langle\{x : x \in A_{s'} \oplus D_{s'}\}, \oplus\rangle \simeq \langle\{a_0, a_1, \dots, a_{\max\{m_t, n_t, k_t\}}\}, \mathbf{\Delta}\rangle$

(ясно, что если такого шага s' не существует, то требование S_e удовлетворено);

шаг 6. ждем нового изменения $A \upharpoonright t$ (скажем, на некотором шаге $s^\star$) и открываем цикл $t+1$ для одновременной работы с циклом t;

шаг 7. перечисляем n_t в $D_{s^\star+1}$ и удовлетворяем требование S_e.

Описанная стратегия удовлетворения требования S_e имеет следующие возможные выходы.

(A) Каждый цикл t в конечном итоге застревает либо на шаге 4 в случае 1, либо на одном из шагов 2 или 6 в случае 2, в ожидании изменения $A \upharpoonright k$. В этом случае множество A вычислимое, что противоречит условию теоремы.

(B) Некоторый (наименьший) цикл k_0 застревает либо на шаге 1, либо на шаге 3 в случае 1, либо на шаге 5 в случае 2. В этом случае удовлетворяем требование S_e в цикле k.

Таким образом, удовлетворяем требование S_e либо на выходе (B) описанной стратегии, либо S_e удовлетворяется с помощью пары чисел (m_k, n_k) или на шаге 5 (случай 1), или на шаге 7 (случай 2).

Остальные части конструкции, так же как и подробное ее описание, теперь очевидны и здесь не приводятся.

Ниже доказываются две теоремы в противоположном направлении. Сначала строим не вычислимую полугруппу, которая имеет слабое представление в множестве, являющемся разностью двух в. п. множеств (d-в. п. множество). Потом доказывается, что каждая коммутативная вычислимая полугруппа имеет слабое представление в каждой в. п. степени $\mathbf{a}$. По-видимому, доказательство этой последней теоремы может быть также получено с помощью идей статьи [1] и одного результата о вложении из [3], но здесь приводится ее прямое доказательство.

Теорема 2. *Существуют не вычислимая счетная полугруппа $\mathcal{S} = \langle\omega, \oplus\rangle$ и в. п. множество A такие, что d-в. п. множество $\omega - A$ поддерживает $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Определим на ω следующую бинарную операцию $\oplus$: для всех x и y

$$3x \oplus (3y+1) = \begin{cases} 3x, & \text{если } x \geq y+2; \\ 3(x+1), & \text{если } x = y+1; \\ 3y+4, & \text{если } x = y \neq 0; \\ 3y+1, & \text{если } x < y; \\ 1, & \text{если } x = y = 0, \end{cases}$$

$$3x \oplus (3y+2) = \begin{cases} 3(y+1), & \text{если } x \leq y; \\ 3x, & \text{если } x > y, \end{cases}$$

$$3x \oplus 3y = \begin{cases} 3x, & \text{если } x \geq y; \\ 3y, & \text{если } x < y, \end{cases}$$

$$(3x+1) \oplus (3y+1) = \begin{cases} 3x+1, & \text{если } x \geq y; \\ 3y+1, & \text{если } x < y, \end{cases}$$

$$(3x+2) \oplus (3y+2) = \begin{cases} 3x+1, & \text{если } x \geq y; \\ 3y+1, & \text{если } x < y. \end{cases}$$

Кроме того, по определению $x \oplus y = y \oplus x$ для всех $x,\ y$.

Легко проверить, что $\mathcal{S} = \langle \omega, \oplus \rangle$ является коммутативной полугруппой. Так же, как в теореме 1, проверяется, что если $\langle P, +_P \rangle$ является слабым представлением для $\mathcal{S}$ с основным в. п. множеством P и $\mathcal{S} \simeq \langle P, +_P \rangle$ посредством $1-1$-частично-вычислимой функции $f : \omega \to P$, то существует такое эффективное перечисление $\{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ множества P, что $p_i = f(i)$ для всех $i > 0$. Как и раньше, перечисление $\{p_0, p_1, \dots\}$ множества P может быть найдено эффективно по номеру вычислимой функции h, являющейся расширением $+_P$.

Искомое в. п. множество A строим по шагам, удовлетворяя для всех $e \in \omega$ требованиям

$$R_e : \Phi_e \text{ всюду определена } \to \langle \omega, \Phi_e \rangle \not\simeq \langle \bar{A}, \oplus \restriction \bar{A} \rangle.$$

Тогда, очевидно, множество $\langle \bar{A}, \oplus \restriction \bar{A} \rangle$ не вычислимое, но множество $\bar{A}$ с в. п. дополнением его поддерживает.

Из конструкции будет следовать, что в множество A перечисляются только числа из множества $\{3i+2 : i \in \omega\}$. Поэтому все числа из множества $\{3i, 3i+1 : i \in \omega\}$ принадлежат его дополнению $\bar{A}$.

Для удовлетворения требованию R_e при фиксированном e не кладем число $3e+2$ в множество A до тех пор, пока на некотором шаге s не обнаружим, что для некоторого $D \subseteq \omega \restriction s$

$$\langle D, \Phi_{e,s} \restriction D \rangle \simeq \langle S_e, \oplus \restriction S_e \rangle, \quad \text{где } S_e = \{0, 1, 3, 4, \dots, 3e, 3e+1\}.$$

Если такого шага не существует, то требование R_e автоматически удовлетворено. Если же такой шаг s существует, то перечисляем $3e+2$ в A_{s+1}, удовлетворяя R_e.

Очевидным образом комбинируя эту стратегию со стратегиями кодирования и разрешения, получаем утверждение:

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ *— в. п. степень. Существует такое в. п. множество* $A \in \mathbf{a}$ *и не вычислимая счетная полугруппа* $\mathcal{S}$ *такие, что* $\omega - A$ *поддерживает* $\mathcal{S}$.

Теорема 4. *Для любой коммутативной вычислимой полугруппы* $\mathcal{S}$ *и любой в. п. степени* $\mathbf{a}$ *существует в. п. множество* $A \in \mathbf{a}$*, поддерживающее* $\mathcal{S}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{S} = \langle \omega, +_S \rangle$ — вычислимая коммутативная полугруппа. Сначала определим вспомогательную полугруппу $\mathcal{R} = \langle \omega, +_R \rangle$ на множестве ω следующим образом: для каждого $x \geq 0$ положим $(2x+1) +_R (2x+2) = x$ и назовем $2x+1$ и $2x+2$ главными $+_R$-слагаемыми для x. Ясно, что каждое число $t > 0$ является главным $+_R$-слагаемым для некоторого (и только одного) x. Теперь для всех x, y определим $x +_R y$ таким образом: пусть x является главным $+_R$-слагаемым для некоторого u_1, и y является главным $+_R$-слагаемым для некоторого v_1. Пусть u_1 является главным $+_R$-слагаемым для некоторого u_2 и пусть v_1 является главным $+_R$-слагаемым для некоторого v_2 и т. д.

Легко убедиться, что имеет место в точности одна из следующих возможностей.

Случай 1. Для некоторого i справедливо $u_i = y$. Полагаем $x +_R y = y$.

Случай 2. Для некоторого i справедливо $v_i = x$. Полагаем $x +_R y = x$.

Случай 3. Предыдущие два случая не имеют места. Это значит, что существуют такие i, j и z, что u_i и v_j являются главными $+_R$-слагаемыми для z. Полагаем $x +_R y = z$, и называем x и y $+_R$-слагаемыми для z.

Кроме того, полагаем $x +_R x = x$ для всех x.

Легко проверить, что $\mathcal{R} = \langle \omega, +_R \rangle$ является коммутативной вычислимой полугруппой.

Теперь для каждого $i \in \omega$ определяем множество $[i]$ в виде конечного множества $\{x : 2^i - 1 \leq x < 2^{i+1} - 1\}$. Ясно, что $\omega = \bigcup\limits_{i \in \omega} [i]$. Пусть $[i] = \{a_{i,0} < a_{i,1} < \dots < a_{i,2^i-1}\}$.

Предположим, что $A \in \mathbf{a}$ — произвольное в. п. множество. Фиксируем такое эффективное перечисление $\{A_s\}_{s \in \omega}$ множества A, что для любого s имеет место $|A_{s+1} - A_s| \leq 1$.

Построим в. п. множество $B \equiv_{\mathrm{T}} A$, а также вычислимую функцию $P = \bigcup\limits_s P_s$ и частично-вычислимую функцию $g = \bigcup\limits_s g_s$ таким образом, что g обеспечит изоморфное отображение между полугруппами $\langle \omega, +_S \rangle$ и $\langle B \oplus \omega, P \restriction B \oplus \omega \rangle$.

Конструкция.

Шаг $s=0$. Определим $B=\emptyset$, $g_0=\emptyset$ и $P_0(2x,2y)=2z$ тогда и только тогда, когда $x+_R y=z$.

Шаг $s+1$, $s\geq 0$. Пусть x — наименьшее свободное число. (Число $x\in\omega$ называется *свободным* на шаге s, если $x\notin \operatorname{rang} g$.) Пусть $g'=g_s\cup\{\langle 2s+1,x\rangle\}$. Для любого $t\in\operatorname{dom} g_s$ назначаем t слагаемым для $2s+1$, если $g_s(t)$ является некоторым $+_S$-слагаемым для x, и назначаем $2s+1$ слагаемым для t, если x является некоторым $+_S$-слагаемым для $g_s(t)$. Для любого $2k\notin\operatorname{dom} g_s$ назначаем $2s+1$ слагаемым для $2k$.

Если x и y — два различных слагаемых для z, то определим $P_{s+1}(x,y)=z$.

Если $A_{s+1}-A_s=\emptyset$, то полагаем $B_{s+1}=B_s$, $g_{s+1}=g'$. В противном случае пусть $m\in A_{s+1}-A_s$. Пусть $n_m\in[m]$ является таким наибольшим элементом $[m]$, что $\forall y<m\ (y\notin A_s\to\forall j\in[y]\ (n_m$ является $+_R$-слагаемым для $j))$.

Пусть $z\in\omega$ — наибольшее натуральное число такое, что $\forall k\in\operatorname{dom} g'\quad g'(k)$ является $+_S$-слагаемым для z. Определим $g_{s+1}=g'\cup\langle 2n,z\rangle, B_{s+1}=B_s\cup\{n\}$.

В каждом случае полагаем $P_{s+1}(i,j)=P_s(i,j)$ для всех $\langle i,j\rangle\in\operatorname{dom} P_s$.

Конец конструкции.

Лемма. $A\equiv_T B\oplus\omega$.

Доказательство. Из конструкции следует

$$\forall i(\operatorname{card}\{B\cap[i]\}\leq 1) \tag{1}$$

и для всех i

$$i\in A\leftrightarrow [i]\cap B\neq\emptyset. \tag{2}$$

Теперь из (2) вытекает, что $A\leq_{\mathrm{T}} B$. Чтобы проверить условие $x\in B$, находим такое i, что $x\in[i]$, и проверяем выполнение условия $i\in A$. Если $i\notin A$, то $x\notin B$, благодаря S_i. Если $i\in A$, то $[i]\cap B\neq\emptyset$. Перечисляя B, можем найти такое y, что $y\in[i]\cap B$. Теперь из (1) следует, что $x\in B$ тогда и только тогда, когда $x=y$.

Из конструкции непосредственно следует, что $g: B\oplus\omega\to\omega$ является частично-вычислимой функцией (следовательно, $g^{-1}:\omega\to B\oplus\omega$ является всюду определенной вычислимой функцией), которая обеспечивает требуемый изоморфизм $\langle B\oplus\omega, P\restriction B\oplus\omega\rangle\simeq\langle\omega,+_S\rangle$.

Литература

1. Jockusch C.G. Jr., Shlapentokh A. *Weak presentations of computable fields* // J. Symb. Logic. – 1995. – V. 60. – P. 199–208.
2. Soare R.I. *Computably Enumerable Sets and Degrees.* – Berlin: Springer-Verlag, 1987. – 576 p.
3. Kehayopulu N., Tsingelis M. *The embedding of some ordered semigroups into ordered groups* // Semigroup Forum. – 2000. – V. 60. – P. 344–350.

Казанский государственный университет

Афинский университет (Греция)

Поступила
25.03.2005