И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2002 МАТЕМАТИКА № 11 (486)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.9

Г.Ю. ВИНОГРАДОВА, В.М. ДЕУНДЯК

ОБ ИНДЕКСЕ И ГОМОТОПИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ СЕМЕЙСТВ СИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ДИЭДРАЛЬНОЙ ГРУППОЙ СДВИГОВ И PC-КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Статьи [1], [2], основанные на локальном методе И.Б. Симоненко [3], посвящены построению символического исчисления, стабильной гомотопической классификации и вычислению индекса семейств сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами в L_p-пространствах со степенным весом Хведелидзе на простом замкнутом контуре Ляпунова. В данной статье эти результаты распространены на банаховы алгебры операторов с диэдральной группой сдвигов, действующих в общих весовых L_p-пространствах.

1. Пусть $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве $\mathcal{X}$, $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ — идеал компактных операторов. Если $\mathcal{B}$ — банахова алгебра, то $G\mathcal{B}$ — группа ее обратимых элементов, $C(X;\mathcal{B})$ — банахова алгебра непрерывных отображений компакта X в $\mathcal{B}$, $L(n;\mathcal{B})$ — банахова алгебра $(n\times n)$-матриц над $\mathcal{B}$ с единицей $E^{(n)}$, $L(\infty;\mathcal{B}) = \lim\limits_{n\to\infty} L(n;\mathcal{B})$ — индуктивный предел. Если $\mathcal{A}$ — операторная алгебра, то $\mathrm{Fr}(\mathcal{A})$ — пространство фредгольмовых операторов из $\mathcal{A}$, а $\mathrm{IND}_X(\Phi)(\in K^0(X))$ — индекс семейства $\Phi\in C(X;\mathrm{Fr}(\mathcal{A}))$.

Пусть $L^m_{p,\kappa}(\Gamma)$ — весовое L_p-пространство m-вектор-функций на простом замкнутом контуре Ляпунова Γ с весом $\varkappa$ из класса Макенхаупта, $S_{\Gamma,\varkappa}$ — сингулярный интегральный оператор Коши, $P^{\pm}_{\Gamma,\varkappa} = (1/2)(I\pm S_{\Gamma,\varkappa})$. Пусть $\Delta\subset\Gamma$, а $PC(\Gamma;\Delta)$ — банахова алгебра кусочно-непрерывных на Γ и непрерывных на $\Gamma\setminus\Delta$ функций. Далее положим, что в вытекающем из теоремы Феффермана представлении $\ln(\varkappa) = u + S_{\Gamma,1}v$ ([4], сс. 247, 256), $u,v\in PC(\Gamma;\Delta)$.

Пусть ξ — диффеоморфизм контура Γ с ненулевой гёльдеровской производной. Оператор взвешенного сдвига $\tau_{\xi,\varkappa}$ в $L^m_{p,\varkappa}(\Gamma)$ определяется равенством $(\tau_{\xi,\varkappa}\varphi)(t) = (\varkappa(\xi(t))\varkappa(t)^{-1})^{1/p}\varphi(\xi(t))$ [5]. Пусть α,β — диффеоморфизмы контура Γ, образующие диэдральную группу $\{e,\alpha,\dots,\alpha^{n-1}, \beta,\alpha\beta,\dots,\alpha^{n-1}\beta\}$, где α является прямым сдвигом порядка n, а β — обратным сдвигом порядка 2. Через $\mathcal{D}$ обозначим диэдральную группу, образованную операторами $\tau_{\alpha,\varkappa}$, $\tau_{\beta,\varkappa}$. Далее положим, что Δ содержит неподвижные точки β и $\Delta = \alpha(\Delta) = \beta(\Delta)$.

Замкнутую подалгебру $\mathcal{L}(L^m_{p,\varkappa}(\Gamma))$, порожденную $S_{\Gamma,\varkappa}$ и операторами умножения M_a на $a\in L(m;PC(\Gamma;\Delta))$, обозначим $\mathcal{M}^m_{\varkappa}(S_{\Gamma,\varkappa},PC(\Gamma;\Delta))$. Пусть $\mathcal{M}^m_{\varkappa}(S_{\Gamma,\varkappa},PC(\Gamma;\Delta);\mathcal{D})$ — замкнутая подалгебра, порожденная операторами из $\mathcal{M}^m_{\varkappa}(S_{\Gamma,\varkappa},PC(\Gamma;\Delta))\cup\mathcal{D}$. Ниже при $\varkappa=1$ в различных обозначениях этот значок мы писать не будем.

2. Пусть $\mathbf{T}^+$ — верхняя полуокружность положительно ориентированной единичной окружности $\mathbf{T}$. Приведем вспомогательные результаты о сингулярных операторах без сдвига в $L^m_p(\mathbf{T}^+)$. Блочную матрицу A запишем в виде $(\mathrm{a}_{jk})^n_{j,k=1}$. Главную и побочную блочно-диагональные матрицы с блоками a_{jk} обозначим $\mathrm{diag}[a_{11},\dots,a_{nn}]$ и $\mathrm{diag}'[a_{n1},\dots,a_{1n}]$ соответственно. На $\mathbf{T}(\Xi) = (\mathbf{T}\setminus\Xi)\bigcup(\Xi\times\overline{\mathbf{R}})$, где $\Xi\subset\mathbf{T}$, а $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\bigcup\{\pm\infty\}$ — двуточечная компактификация прямой

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00917, и программы Министерства образования Российской Федерации, грант № Е00-1.0-166.

$\mathbf{R}$, рассмотрим описанную в [1] топологию, совпадающую при $\Xi = \mathbf{T}$ с топологией Гохберга–Крупника. Пусть $\mathbf{T}_-$ — единичная отрицательно ориентированная окружность, $C_p(\overline{\mathbf{R}})$ — замыкание пересечения $C(\overline{\mathbf{R}})$ и пространства функций с ограниченной вариацией по норме L_p-мультипликаторов, $\mathcal{N}_p^m(\mathbf{T};\Xi)$ — банахова алгебра таких отображений $M = (M_{jk})_{j,k=1}^2 : \mathbf{T}(\Xi) \to L(2m, \mathrm{C})$, что $M_{11}, M_{12}, M_{21} \in L(m; C(\mathbf{T}(\Xi)))$, $M_{22} \in L(m; C(\mathbf{T}_-(\Xi)))$, $M_{12}(t) = M_{21}(t) = 0$ для $t \in \mathbf{T} \setminus \Xi$, а если $t \in \Xi$, то $M|_{\{t\}\times\overline{R}} \in L(2m, C_p(\overline{\mathbf{R}}))$ и матрица $M(t, \pm\infty)$ диагональная. В статье ([1], с. 22) на основе локализации построен символ-гомоморфизм $S_p^m : C(X; \mathcal{M}^m(S_{\mathbf{T}}; PC(\mathbf{T};\Xi))) \to C(X; \mathcal{N}_p^m(\mathbf{T};\Xi))$. В $\mathbf{T}(\Xi^+)$, где $\{\pm 1\} \subset \Xi^+ \subset \mathbf{T}^+$, выделим подмножество $\mathbf{T}^+(\Xi^+) = (\mathbf{T}^+ \setminus \Xi^+) \bigcup (\Xi^+ \times \overline{\mathbf{R}})$ с индуцированной топологией и по аналогии с [6] введем множество $\mathcal{N}_p^m(\mathbf{T}^+;\Xi^+)$ всех таких наборов матриц-функций $\Psi = \{\Psi_{-1}; \Psi_0; \Psi_{+1}\}$, что $\Psi_{\pm 1} \in L(m; C_p(\overline{\mathbf{R}}))$, $\Psi_0 = \{\Psi_{0;ij}\}_{i,j=1,2}$ — ограничение на $\mathbf{T}^+(\Xi^+) \setminus (\{-1;+1\} \times \overline{\mathbf{R}})$ некоторого отображения из $\mathcal{N}_p^m(\mathbf{T};\Xi^+)$ и $\Psi_{-1}(-\infty) = \Psi_{0;22}(-1)$, $\Psi_{-1}(+\infty) = \Psi_{0;11}(-1)$, $\Psi_{+1}(-\infty) = \Psi_{0;11}(+1)$, $\Psi_{+1}(+\infty) = \Psi_{0;22}(+1)$. Ясно, что $\mathcal{N}_p^m(\mathbf{T}^+;\Xi^+)$ — банахова алгебра с естественными операциями и нормой $\|\Psi\| = \max\{\|\Psi_{-1}\|; \|\Psi_0\|; \|\Psi_{+1}\|\}$. Для компакта X определим символ-гомоморфизм

$$Q_p^m : C(X; \mathcal{M}^m(S_{\mathbf{T}^+}; PC(\mathbf{T}^+;\Xi^+))) \to C(X; \mathcal{N}_p^m(\mathbf{T}^+;\Xi^+)). \tag{1}$$

В точках из $\mathbf{T}_0^+ = \mathbf{T}^+ \setminus \{-1;+1\}$ оператор $A \in \mathcal{M}^m(S_{\mathbf{T}^+}; PC(\mathbf{T}^+;\Xi^+))$ локализуется так же, как и в случае окружности, поэтому в силу теоремы 1.2 [1] семейство локальных представителей $\{A_t\}_{t\in\mathbf{T}_0^+}$ преобразуется в отображение вида Ψ_0. В концевых точках $\{-1;+1\}$ локальные представители $\{A_{\pm 1}\}$ строятся так же, как в [6], и в силу теоремы 4 [6] они преобразуются в отображения $\Psi_{\pm 1}$. Непосредственно проверяется, что при этом выполняются условия связи. Таким образом, оператору A сопоставлен элемент $q_p^m(A) = \{\Psi_{-1}; \Psi_0; \Psi_{+1}\} \in \mathcal{N}_p^m(\mathbf{T}^+;\Xi^+)$. Символ (1) определим по формуле $(Q_p^m(\Phi))(x) = q_p^m(\Phi(x))$, где $x \in X$, $\Phi \in C(X; \mathcal{M}^m(S_{\mathbf{T}}; PC(\mathbf{T};\Xi)))$. Средствами теории операторов локального типа из теоремы 1.3 [1] и теоремы 4 [6] выводится

Лемма 1. *Символ-гомоморфизм* (1) *является эпиморфизмом банаховых алгебр с ядром* $\mathrm{C}(X; \mathcal{K}(L_p^m(\mathbf{T}^+)))$.

Опишем аналог известной в теории псевдодифференциальных операторов конструкции “пересаживания”. А именно, для любого $F \in C(X; \mathcal{M}^m(S_{\mathbf{T}^+}; PC(\mathbf{T}^+;\Xi^+)))$ определим $\eta_0(F) \in C(X; \mathcal{L}(L_p^m(\mathbf{T})))$ по формуле $(\eta_0(F))(x) = P_{\mathbf{T}^+} F(x) P_{\mathbf{T}^+} + P_{\mathbf{T}^-}$, где $P_{\mathbf{T}^\pm}$ — оператор умножения на характеристическую функцию $\mathbf{T}^\pm$. Локальный анализ позволяет доказать, что $\eta_0(F) \in C(X; (\mathcal{M}^m(S_{\mathbf{T}^+}; PC(\mathbf{T};\Xi^+))))$ и сопоставить каждому $f \in \mathcal{N}_p^m(\mathbf{T}^+;\Xi^+)$ такое отображение $\eta_1(f) \in \mathcal{N}_p^m(\mathbf{T};\Xi^+)$, что $\eta_1(Q_p^m(F)) = S_p^m(\eta_0(F))$.

Лемма 2. *Семейство* $F \in C(X; \mathcal{M}^m(S_{\mathbf{T}^+}; PC(\mathbf{T}^+;\Xi^+)))$ *фредгольмово тогда и только тогда, когда фредгольмово семейство* $\eta_0(F)$, *при этом* $\mathrm{IND}_X(F) = \mathrm{IND}_X(\eta_0(F))$.

3. Построим символ для алгебры $\mathcal{M}_\varkappa^m(S_{\Gamma,\varkappa}, PC(\Gamma;\Delta); \mathcal{D})$. Рассмотрим диффеоморфизмы $\widetilde{\alpha} : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ и $\widetilde{\beta} : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$, задаваемые формулами $\widetilde{\alpha}(t) = e^{i2\pi/n} t$, $\widetilde{\beta}(t) = \bar{t}$, где $t = e^{i\psi} \in \mathbf{T}$, и имеющий ненулевую гёльдеровскую производную диффеоморфизм $\rho : \Gamma \to \mathbf{T}$, удовлетворяющий условиям $\rho \circ \alpha = \widetilde{\alpha} \circ \rho$, $\rho \circ \beta = \widetilde{\beta} \circ \rho$. Определим блочные матрицы-функции $B = (B_{h,g})_{h,g=0}^{n-1}$, $W = (W_{h,g})_{h,g=0}^{n-1} \in GL(mn; C(\mathbf{T}))$

$$B_{h,g}(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i2\pi k(g-h)/n} t^{-k} E^{(m)}, \quad W_{h,g}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{h,k}(t) (B^{-1}(e^{i4\pi k/n} \bar{t}))_{k,g}.$$

Отображения $\eta : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$, $\nu : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ и $\gamma : \mathbf{T}^+ \to \mathbf{T}^+$ определим формулами $\eta(e^{i\psi}) = e^{i\psi/n}$, $\nu(t) = t^n$, $\gamma(t) = (i - k(t))/(i + k(t))$, где $k(t) = \sqrt{-i(t-1)/(t+1)}$. Оператор $N_\varkappa : \mathcal{L}(L_{p,\varkappa}^m(\Gamma)) \to \mathcal{L}(L_p^m(\Gamma))$ зададим равенством $N_\varkappa(A) = \varkappa^{1/p} A \varkappa^{-1/p} I$. Из теоремы 1 [7] вытекает, что $\mathcal{M}_\varkappa^m(S_{\Gamma,\varkappa}, PC(\Gamma;\Delta); \mathcal{D}) = \mathcal{M}_\varkappa^m(N_\varkappa^{-1}(P_\Gamma^+), PC(\Gamma;\Delta); \mathcal{D})$. Для оператора $A \in \{N_\varkappa^{-1}(P_\Gamma^+); M_a; \tau_{\alpha,\varkappa}; \tau_{\beta,\varkappa}\} \subset \mathcal{M}_\varkappa^m(S_{\Gamma,\varkappa}, PC(\Gamma;\Delta); \mathcal{D})$ положим $\sigma_p^m(A) = q_p^{mn}(F(A))$. Здесь $F(A) = \mathrm{diag}[M_{D\circ\eta\circ\gamma};$

$M_{D\circ\eta\circ\widetilde{\beta}\circ\gamma}]$, где $D = B(\delta_{h,g} a \circ \rho^{-1} \circ \widetilde{\alpha}_{-h})_{h,g=0}^{n-1} B^{-1}$ или $D = B(\delta_{-1+h,g} E^{(m)})_{h,g=0}^{n-1} B^{-1}$ ($\delta_{h,g}$ — символ Кронекера), если $A = M_a$ или $A = \tau_{\alpha,\varkappa}$ соответственно; $F(A) = \mathrm{diag}'[M_{D\circ\widetilde{\beta}\circ\gamma}; M_{D\circ\gamma}]$, где $D = W \circ \eta$, если $A = \tau_{\beta,\varkappa}$;

$$F(A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} K^+ + R^+ & K^+ - R^+ \\ K^- - R^- & K^- + R^- \end{pmatrix},$$

где $K^\pm = N_{\rho_+}(P^\pm_{\rho_+,\mathbf{T}^+})$, $R^\pm = N_{\rho_-}(P^\pm_{\rho_-,\mathbf{T}^+})$, $\rho_\pm = |t^2-1|^{-1/2}|t\pm 1|^{p/2}$, если $A = N_\varkappa^{-1}(P_\Gamma^+)$.

Пусть $\nabla = \gamma(\nu(\rho(\Delta)) \cap \mathbf{T}^+)$. Отметим, что $\{\pm 1\} \subset \nabla$.

Лемма 3. *Значения $\sigma_p^m(A)$, где $A \in \{N_\varkappa^{-1}(P_\Gamma^+), M_a, \tau_{\alpha,\varkappa}, \tau_{\beta,\varkappa}\}$, однозначно задают гомоморфизм $\sigma_p^m : \mathcal{M}_\varkappa^m(S_{\Gamma,\varkappa}, PC(\Gamma;\Delta);\mathcal{D}) \to \mathcal{N}_p^{mn}(\mathbf{T}^+;\nabla)$.*

Символ $\Sigma_p^m : C(X;\mathcal{M}_\varkappa^m(S_{\Gamma,\varkappa}, PC(\Gamma;\Delta);\mathcal{D})) \to C(X;\mathcal{N}_p^{mn}(\mathbf{T}^+;\nabla))$ для семейств определим равенством $(\Sigma_p^m(\Phi))(x) = \sigma_p^m(\Phi(x))$, где $x \in X$.

Теорема 1. *Пусть Σ_p^m — эпиморфизм с ядром $C(X;\mathcal{K}(L^m_{p,\varkappa}(\Gamma)))$. Если $F \in C(X;\mathcal{M}_\varkappa^m(S_{\Gamma,\varkappa}, PC(\Gamma;\Delta);\mathcal{D}))$, то*

$$F \in C(X;\mathrm{Fr}(\mathcal{M}_\varkappa^m(S_{\Gamma,\varkappa}, PC(\Gamma;\Delta);\mathcal{D}))) \Leftrightarrow \Sigma_p^m(F) \in C(X;G\mathcal{N}_p^{mn}(\mathbf{T}^+;\nabla)).$$

Замечание. Условия фредгольмовости и формулу для индекса операторов со сдвигом Карлемана порядка n часто получают сопоставлением оператору A со сдвигом вспомогательного матричного оператора $\widetilde{A}$ без сдвига, при этом фредгольмовость A равносильна фредгольмовости $\widetilde{A}$ и $n\,\mathrm{ind}(A) = \mathrm{ind}(\widetilde{A}) (\in \mathbf{Z})$ [5], [8]. В случае индекса семейств операторов со сдвигом аналогичное равенство не помогает, т. к. группа $K^0(X)$ может иметь периодическую часть. Поэтому в случае семейств при построении символического исчисления удобно использовать подход, предполагающий построение изоморфизма подобия исследуемой алгебры на некоторую модельную алгебру операторов без сдвига [7], [9]. Доказательство теоремы 1 основывается на построении изоморфизма подобия с модельной алгеброй $\mathcal{M}^m(S_{\mathbf{T}^+};\, PC(\mathbf{T}^+;\Xi^+))$.

4. В K-теории формула Кюннета задает эпиморфизм $\varrho_{\mathbf{T}(\nabla)} : K^{-1}(X \times \mathbf{T}(\nabla)) \to K^0(X) \otimes K^{-1}(\mathbf{T}(\nabla))$, а конструкция “сцепления” — изоморфизм $k_{X\times\mathbf{T}(\nabla)} : [X \times \mathbf{T}(\nabla); GL(\infty;\, C)] \to K^{-1}(X \times \mathbf{T}(\nabla))$. В ([1], с. 26) построен изоморфизм $b_{\mathbf{T}(\nabla)} : K^{-1}(\mathbf{T}(\nabla)) \to \mathbf{Z}$. Для $\psi = (\psi_{i,j})_{i,j=1}^2 \in GC(X;\mathcal{N}_p^m(\nabla))$ зададим $\mu(\psi)$ из $C(X \times \mathbf{T}(\nabla); GL(2m;\mathbf{C}))$, полагая $(\mu(\psi))(x,t) = \mathrm{diag}[\psi_{1,1}(x,t); (\psi_{2,2}(x,t))^{-1}]$ для $t \in \mathbf{T} \setminus \nabla$ и $(\mu(\psi))(x,t) = d_-\psi(x,t)d_+$ с $d_\pm = \mathrm{diag}[1; (\psi_{2,2}(x,(\tau,\pm\infty)))^{-1}]$ для $t = (\tau, y) \in \nabla \times \overline{\mathbf{R}}$. Пусть $\Lambda(\mathbf{T}_+, \nabla; X)$ — группа всех кусочно-непрерывных на $\mathbf{T}_+ \setminus \{+1\}$ и непрерывных на $\mathbf{T}_+ \setminus \nabla$ отображений в $K^{-1}(X)$.

Теорема 2. *Если $\Phi \in C(X;\mathrm{Fr}(\mathcal{M}_\varkappa^m(S_{\varkappa,\Gamma}, PC(\Gamma;\Delta);\mathcal{D})))$, то*

$$\mathrm{IND}_X(\Phi) = ((\mathrm{id}_{K^0(X)} \otimes b_{\mathbf{T}(\nabla)})\varrho_{\mathbf{T}(\nabla)} k_{X\times\mathbf{T}(\nabla)})([\mu(\eta_1(\Sigma_p^m(\Phi)))]).$$

Для групп классов гомотопической эквивалентности семейств фредгольмовых и обратимых операторов имеют место изоморфизмы

$$[X;\mathrm{Fr}(\mathcal{M}_\varkappa^\infty(S_{\varkappa,\Gamma}, PC(\Gamma;\Delta);\mathcal{D}))] \cong \Lambda(\mathbf{T}_+, \nabla; X) \oplus K^0(X),$$
$$[X;G\mathcal{M}_\varkappa^\infty(S_{\varkappa,\Gamma}, PC(\Gamma;\Delta);\mathcal{D})] \cong \Lambda(\mathbf{T}_+, \nabla; X).$$

Литература

1. Деундяк В.М., Симоненко И.Б., Чинь Нгок Минь. *Символы и гомотопическая классификация семейств одномерных сингулярных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами* // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 12. – С. 17–27.
2. Деундяк В.М. *О гомотопических свойствах обратимых матричных одномерных сингулярных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами* // Сообщ. АН ГрузССР. – 1988. – Т. 131. – № 3. – С. 131–134.

3. Симоненко И.Б., Чинь Нгок Минь. *Локальный метод в теории одномерных сингулярных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Нётеровость.* – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1986. – 60 с.
4. Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции.* – М.: Мир, 1984. – 469 с.
5. Антоневич А.Б. *Линейные функциональные уравнения. Операторный подход.* – Минск: Изд-во Университетское, 1988. – 230 с.
6. Деундяк В.М., Симоненко И.Б., Стукопин В.А. *Гомотопическая классификация семейств нетеровых сингулярных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами на сложном контуре* // Докл. РАН. – 1993. – Т. 329. – № 5. – С. 540–542.
7. Виноградова Г.Ю., Георгиев К.А., Деундяк В.М. *О структуре алгебр сингулярных интегральных операторов со сдвигом в весовых пространствах и вычисление индекса семейств* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 5. – С. 68–71.
8. Karapetiants N., Samko S. *Equations with Involutive Operators.* – Boston–Basel–Berlin: Birkhauser, 2001. – 427 p.
9. Деундяк В.М., Золотых А.Е. *О структуре алгебры сингулярных интегральных операторов с разрывными коэффициентами и конечной группой сдвигов* // Дифференциальные, интегральные уравнения и комплексный анализ. Сб. науч. тр. – Элиста, 1993. – С. 25–35.

Донской государственный технический университет

Поступила 22.01.2002