ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 5 (468)

УДК 519.6

Л.А. КРУКИЕР, Л.Г. ЧИКИНА

ДВУЦИКЛИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНЫЙ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИЛЬНО НЕСИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ

Введение. В работе предложен новый итерационный метод, который позволяет эффективно решать сильно несимметричные системы уравнений, получаемые, например, в результате центрально-разностной аппроксимации уравнения конвекции-диффузии с преобладающей конвекцией. Приведены достаточные условия сходимости.

Известно [1], что итерационные методы, применяемые для решения линейных систем

$$Ay = f, \tag{1}$$

могут быть объединены общей формулой

$$B_j \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau_j} = -(Ay^j - f), \tag{2}$$

где $\{B_j\}$ — последовательность невырожденных матриц, $\{\tau_j\}$ — последовательность вещественных параметров, y^j — приближенное решение j-й итерации. Если ввести обозначение $H_j = \tau_j B_j^{-1}$, то итерационный процесс можно записать в эквивалентном виде

$$y^{j+1} = y^j - H_j(Ay^j - f).$$

Определение [2]. Циклическими называются итерационные методы, которые обладают свойством $H_j = H_{j+s}$ для любого $j \geq 0$ и некоторого фиксированного $s \geq 1$.

Любая матрица A разлагается в сумму

$$A = A_0 + A_1,$$

где $A_0 = \frac{1}{2}(A + A^*) = A_0^*$ — симметричная, а $A_1 = \frac{1}{2}(A - A^*) = -A_1^*$ — кососимметричная составляющие матрицы A. Любую кососимметричную матрицу A_1 можно представить в виде

$$A_1 = K_H + K_B,$$

где K_H и K_B — соответственно строго нижняя и строго верхняя треугольные части матрицы A_1, причем для них справедливы равенства $K_H = -K_B^*$, $K_B = -K_H^*$.

Идея, предложенная в [3], включать в оператор метода B треугольные части только кососимметрической составляющей A_1 исходной матрицы A позволяет получить новый класс неявных треугольных кососимметрических итерационных методов, которые одновременно имеют достаточно простую структуру и в то же время предназначены для решения систем с несамосопряженными сильно несимметрическими[1] матрицами.

В [3] предложена структура оператора B, удовлетворяющая равенству

$$B_1 = \tau A_1, \tag{3}$$

[1] Матрица A называется *сильно несимметричной*, если в какой-либо норме $\|A_1\| \gg \|A_0\|$.

Данная работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 00-01-00011.

где $B_1 = (B - B^*)/2$. При выполнении условия (3) оператор $B - \tau A$ является самосопряженным и $B - \tau A = B_0 - \tau A_0$. Операторное равенство (3) является основным при конструировании кососимметричных итерационных методов для сильно несимметричных задач.

В работе [4] рассмотрен оператор

$$B = E + 2\tau K_H \tag{4}$$

треугольного кососимметрического метода (ТКМ), а в [5] – оператор $B = (E + \tau K_H)(E - \tau K_B)$ попеременно-треугольного кососимметрического метода (ПТКМ). Там же даны оценки скорости сходимости методов и предложены пути выбора оптимального итерационного параметра. В работах [6]–[7] исследован оператор $B = E + \tau^2 K_H K_B + 2\tau K_H$, который имеет треугольную структуру только в одномерном случае.

1. *Двуциклический кососимметричный треугольный метод* (*ДТКМ*). Пусть оператор B имеет структуру (4). Будем искать решение системы (1) с помощью двуциклического итерационного метода ДТКМ [8]. С этой целью рассмотрим итерационный метод (2), в котором переход от j-й итерации к $(j+1)$-й осуществляется в два этапа.

На первом этапе находится значение $y^{j+1/2}$

$$(E + 2\tau_H K_H)\frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau_H} + Ay^j = f, \tag{5}$$

а затем из

$$(E + 2\tau_B K_B)\frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau_B} + Ay^{j+1/2} = f \tag{6}$$

ищется y^{j+1}. Здесь $\tau_H > 0$ и $\tau_B > 0$ — итерационные параметры, $B_H = E + 2\tau_H K_H$, $B_B = E + 2\tau_B K_B$ — операторы метода. Цикл вычислений состоит в поочередном применении итерационных методов (5) и (6).

2. *Достаточное условие сходимости ДТКМ.* Следуя [1], условия сходимости сформулируем в виде легко проверяемых операторных неравенств, связывающих операторы A и B.

Определим погрешности z^k, $z^{k+1/2}$ и z^{k+1} ДТКМ как разности $z^k = y^k - y$, $z^{k+1/2} = y^{k+1/2} - y$, $z^{k+1} = y^{k+1} - y$ между решениями y^k, $y^{k+1/2}$ и y^{k+1} в (5) и (6) и точным решением y исходной системы (1). Введенные погрешности удовлетворяют уравнениям

$$B_H z^{k+1/2} = (B_H - \tau_H A)z^k, \quad B_B z^{k+1} = (B_B - \tau_B A)z^{k+1/2},$$

исключив из которых $z^{k+1/2}$, получим уравнение, связывающее только z^k и z^{k+1}, $z^{k+1} = Gz^k$, где оператор перехода G имеет вид $G = B_B^{-1}(B_B - \tau_B A)B_H^{-1}(B_H - \tau_H A)$.

Кососимметрические составляющие B_{H1} и B_{B1} операторов $B_H = B_{H0} + B_{H1}$ и $B_B = B_{B0} + B_{B1}$ соответственно удовлетворяют равенствам

$$B_{H1} = \frac{1}{2}(B_H - B_H^*) = \tau_H A_1, \quad B_{B1} = \frac{1}{2}(B_B - B_B^*) = \tau_B A_1,$$

что дает самосопряженность операторов $(B_H - \tau_H A)$ и $(B_B - \tau_B A)$, и в этом случае оператор перехода имеет вид $G = B_B^{-1}(B_{B0} - \tau_B A_0)B_H^{-1}(B_{H0} - \tau_H A_0)$.

Для существования операторов $B_{H0}^{1/2}$, $B_{H0}^{-1/2}$ и $B_{B0}^{1/2}$, $B_{B0}^{-1/2}$ потребуем положительную определенность симметрических составляющих операторов метода

$$B_{H0} = B_{H0}^* > 0, \quad B_{B0} = B_{B0}^* > 0. \tag{7}$$

Введем операторы

$$P_{B0} = B_{B0}^{-1/2} A_0 B_{B0}^{-1/2} = P_{B0}^*, \quad P_{B1} = B_{B0}^{-1/2} A_1 B_{B0}^{-1/2} = -P_{B1}^*,$$
$$P_{H0} = B_{H0}^{-1/2} A_0 B_{H0}^{-1/2} = P_{H0}^*, \quad P_{H1} = B_{H0}^{-1/2} A_1 B_{H0}^{-1/2} = -P_{H1}^*.$$

Тогда оператор перехода G можно записать в виде произведения двух операторов: $G = G_B G_H$, где $G_B = B_{B0}^{-1/2}\widehat{G}_B B_{B0}^{1/2}$, $G_H = B_{H0}^{-1/2}\widehat{G}_H B_{H0}^{1/2}$, $\widehat{G}_B = (E + \tau_B P_{B1})^{-1}(E - \tau_B P_{B0})$, $\widehat{G}_H = (E + \tau_H P_{H1})^{-1}(E - \tau_H P_{H0})$. Отсюда видно, что оператор G_H подобен оператору $\widehat{G}_H$, а оператор G_B подобен оператору $\widehat{G}_B$.

Каждый из операторов B_{H0} и B_{B0} порождает энергетическую норму в гильбертовом пространстве H. Взяв спектральную норму оператора G

$$\|G_H\|_{B_{H0}} = \|\widehat{G}_H\|, \quad \|G_B\|_{B_{B0}} = \|\widehat{G}_B\|,$$

и используя свойства норм [10], получим

$$\|G\| \le \|\widehat{G}_H\|\,\|\widehat{G}_B\|.$$

Так как операторы P_{B1} и P_{H1} кососимметричные, то, как показано в [4], $\|(E+\tau_B P_{B1})^{-1}\| \le 1$ и $\|(E + \tau_H P_{H1})^{-1}\| \le 1$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Для сходимости итерационного метода* (5)–(6) *с операторами* B_B *и* B_H, *удовлетворяющими равенству* (3) *и неравенствам* (7), *достаточно, чтобы*

$$\|G\| \le \|E - \tau_B P_{B0}\|\,\|E - \tau_H P_{H0}\| < 1. \tag{8}$$

Теорема 2 ([8]). *Для сходимости итерационного метода* (5)–(6) *с операторами* B_B *и* B_H, *удовлетворяющими равенству* (3) *и неравенствам* (7), *достаточно выполнения операторных неравенств*

$$B_{B0} > \frac{\tau_B}{1+m}A_0 > \frac{1-m}{1+m}B_{B0}, \quad B_{H0} > \frac{\tau_H}{1+\frac{1}{m}}A_0 > \frac{m-1}{1+m}B_{H0}. \tag{9}$$

Доказательство. Если выполняется система неравенств

$$\|E - \tau_B P_{B0}\| < m, \quad \|E - \tau_H P_{H0}\| < 1/m,$$

где m — положительное число, то выполняется и неравенство (8). Отсюда в силу самосопряженности операторов P_{B0} и P_{H0} имеем

$$-mE < E - \tau_B P_{B0} < mE, \quad -\frac{1}{m}E < E - \tau_H P_{H0} < \frac{1}{m}E,$$

поэтому

$$(1-m)E < \tau_B P_{B0} < (1+m)E, \quad \left(1 - \frac{1}{m}\right)E < \tau_H P_{H0} < \left(1 + \frac{1}{m}\right)E.$$

Умножая обе части первого неравенства этой системы слева и справа на $B_{B0}^{1/2}$, а второго неравенства — на $B_{H0}^{1/2}$, получим (9). □

Замечание. При $m = 1$ каждое из операторных неравенств системы (9) имеет тот же вид, что и достаточное условие сходимости для ТКМ $B_0 > \frac{\tau}{2}A_0 > 0$, полученное в [9].

3. *Достаточные условия сходимости ДТКМ в ограничениях на итерационные параметры.* Учитывая самосопряженность операторов B_{H0}, B_{B0} и A_0 и свойства операторных неравенств [10], исключим из системы неравенств (9) параметр m. Операторные неравенства $B_{B0} > \frac{\tau_B}{1+m}A_0$, $B_{H0} > \frac{\tau_H}{1+1/m}A_0$ означают, что спектры этих операторов удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_k\left(B_{B0} - \frac{\tau_B}{1+m}A_0\right) > 0, \quad \lambda_k\left(B_{H0} - \frac{\tau_H}{1+1/m}A_0\right) > 0. \tag{10}$$

Рассмотрим симметрические составляющие операторов B_H и B_B:

$$B_{H0} = E + \tau_H(K_H + K_H^*) = E + \tau_H(K_H - K_B) = E + \tau_H K, \tag{11}$$

$$B_{B0} = E + \tau_B(K_B + K_B^*) = E + \tau_B(K_B - K_H) = E - \tau_B K, \tag{12}$$

где $K = K_H - K_B$.

Заметим, что C-нормы матриц K и A_1 совпадают, т. к. они имеют в строках одинаковые по модулю элементы. Учитывая нормальность матриц K и A_1, получаем, как и в [11], для спектральной нормы этих матриц неравенство $\|K\|_2 \leq \|K\|_\infty = \|A_1\|_\infty$.

Учитывая неравенства (11) и (12), получим оценки $(1-\tau_B\|A_1\|_\infty)E < B_{B0} < (1+\tau_B\|A_1\|_\infty)E$, $(1-\tau_H\|A_1\|_\infty)E < B_{H0} < (1+\tau_H\|A_1\|_\infty)E$. При этом достаточные условия (7) положительной определенности операторов B_H и B_B примут вид

$$0 < \tau_H < \frac{1}{\|A_1\|_\infty}, \quad 0 < \tau_B < \frac{1}{\|A_1\|_\infty}. \tag{13}$$

Если справедливы оценки $\alpha_1 E \leq A_0 \leq \alpha_n E$, то по свойствам операторных неравенств [11] из левой части системы неравенств (9) с учетом (13) следуют неравенства

$$1 - \tau_B\|A_1\|_\infty - \frac{\tau_B}{1+m}\alpha_n > 0, \quad 1 - \tau_H\|A_1\|_\infty - \frac{\tau_H}{1+1/m}\alpha_n > 0.$$

Учитывая положительность m, преобразуем предыдущую систему неравенств к виду $(1+m)(1-\tau_B\|A_1\|_\infty)-\tau_B\alpha_n > 0$, $(1+1/m)(1-\tau_H\|A_1\|_\infty)-\tau_H\alpha_n > 0$ или $m(1-\tau_B\|A_1\|_\infty) > \tau_B(\alpha_n+\|A_1\|_\infty)-1$, $\frac{1}{m}(1-\tau_H\|A_1\|_\infty) > \tau_H(\alpha_n+\|A_1\|_\infty)-1$. В силу неравенств (13) имеем

$$m > \frac{\tau_B(\alpha_n+\|A_1\|_\infty)-1}{1-\tau_B\|A_1\|_\infty}, \quad \frac{1}{m} > \frac{\tau_H(\alpha_n+\|A_1\|_\infty)-1}{1-\tau_H\|A_1\|_\infty}. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь два варианта ограничений на итерационные параметры. Если в (14)

$$\tau_H(\alpha_n+\|A_1\|_\infty)-1 > 0, \tag{15}$$

то (14) и (15) приводят к системе

$$\frac{\tau_B(\alpha_n+\|A_1\|_\infty)-1}{1-\tau_B\|A_1\|_\infty} < \frac{1-\tau_H\|A_1\|_\infty}{\tau_H(\alpha_n+\|A_1\|_\infty)-1}, \quad \tau_H(\alpha_n+\|A_1\|_\infty)-1 > 0.$$

Отсюда после несложных выкладок имеем две равносильных системы:

$$\tau_B(\tau_H(\alpha_n+2\|A_1\|_\infty)-1) < \tau_H, \quad \tau_H(\alpha_n+\|A_1\|_\infty)-1 > 0 \tag{16}$$

и

$$\tau_H(\tau_B(\alpha_n+2\|A_1\|_\infty)-1) < \tau_B, \quad \tau_H(\alpha_n+\|A_1\|_\infty)-1 > 0. \tag{17}$$

Предположим, что в (14)

$$\tau_B(\alpha_n+\|A_1\|_\infty)-1 > 0. \tag{18}$$

Используя условие (15), получаем $\tau_H(\alpha_n+2\|A_1\|_\infty)-1 = \tau_H(\alpha_n+\|A_1\|_\infty)-1+\tau_H\|A_1\|_\infty > 0$. При условии (18) имеем $\tau_B(\alpha_n+2\|A_1\|_\infty)-1 = \tau_B(\alpha_n+\|A_1\|_\infty)-1+\tau_B\|A_1\|_\infty > 0$. Преобразовав (16), получим достаточное условие сходимости метода в виде неравенств

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|A_1\|_\infty+\alpha_n} < \tau_B < \frac{\tau_H}{\tau_H(\alpha_n+2\|A_1\|_\infty)-1}, \\ &\frac{1}{\|A_1\|_\infty+\alpha_n} < \tau_H < \frac{1}{\|A_1\|_\infty}. \end{aligned} \tag{19}$$

Используя аналогичность выкладок для (17), запишем достаточное условие сходимости в виде

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|A_1\|_\infty+\alpha_n} < \tau_H < \frac{\tau_B}{\tau_B(\alpha_n+2\|A_1\|_\infty)-1}, \\ &\frac{1}{\|A_1\|_\infty+\alpha_n} < \tau_B < \frac{1}{\|A_1\|_\infty}. \end{aligned} \tag{20}$$

Теорема 3. *Пусть для оператора A исходной системы* (1) *выполнена оценка* $0 < \alpha_1 E \le A_0 \le \alpha_n E$. *Тогда для сходимости итерационного метода* (5), (6) *достаточно выполнения системы неравенств* (19) *или* (20).

Замечание 1. При $m = 1$ достаточные условия сходимости (19) и (20) принимают вид

$$0 < \tau_H < \frac{1}{\|A_1\|_\infty + \alpha_n/2} < \frac{1}{\|A_1\|_\infty},$$
$$0 < \tau_B < \frac{1}{\|A_1\|_\infty + \alpha_n/2} < \frac{1}{\|A_1\|_\infty}.$$

Полученные оценки совпадают с $\tau_{\text{сх}}$ для ТКМ [4].

Замечание 2. Системы неравенств (19) и (20) дают оценки интервалов сходимости методов, где надо искать оптимальные параметры. Наличие таких оценок облегчает решение этой задачи.

Замечание 3. Для нахождения оптимальных итерационных параметров, обеспечивающих наивысшую скорость сходимости ДТКМ, необходимо найти минимум нормы оператора перехода G или минимум произведения норм операторов $(E - \tau_B P_{B0})$ и $(E - \tau_H P_{H0})$ в силу достаточного условия сходимости (8). Частным случаем этой задачи является рассмотренная в [4] минимаксная задача нахождения оптимального параметра отдельно для каждого из этих операторов, сводящаяся к решению следующей задачи для τ_B или τ_H,

$$f(\tau) = \frac{\tau\alpha_1}{1 + \tau\|A_1\|_\infty} - 2 + \frac{\tau\alpha_n}{1 - \tau\|A_1\|_\infty} = 0.$$

Заметим, что

$$f\left(\frac{1}{\alpha_n + \|A_1\|_\infty}\right) = \frac{\alpha_1}{\alpha_n + 2\|A_1\|_\infty} - 1 < 0,$$
$$f\left(\frac{1}{\alpha_n/2 + \|A_1\|_\infty}\right) = \frac{\alpha_1}{\alpha_n/2 + 2\|A_1\|_\infty} > 0.$$

Отсюда можно сделать вывод, что достаточное условие сходимости гарантирует существование $\tau = \tau_{\text{опт}} \in \left(\frac{1}{\alpha_n + \|A_1\|_\infty}, \frac{1}{\alpha_n/2 + \|A_1\|_\infty}\right)$, и это значение $\tau_{\text{опт}}$ единственное, т. к. производная $f'(\tau)$ при этом сохраняет знак. Если дополнительно $\|A_1\| \gg \|A_0\|$, то значение $\tau_{\text{опт}}$ при расчетах можно брать равным $\frac{1}{\alpha_n/2 + \|A_1\|_\infty}$, т. к. величина $f\left(\frac{1}{\alpha_n/2 + \|A_1\|_\infty}\right)$ довольно близка к нулю.

Численное исследование было проведено для двух методов: ТКМ и ДТКМ. Отличие этих методов заключается в том, что в ТКМ оператор метода B содержит либо K_H, либо K_B, а в ДТКМ K_H и K_B чередуются.

Численное исследование итерационных методов проводилось на следующей модельной задаче. В замкнутой области $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ рассматривалось стационарное уравнение конвекции-диффузии

$$-\frac{1}{\mathrm{Pe}}\Delta s + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial (us)}{\partial x} + v\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial (vs)}{\partial y}\right) = f(x, y),$$

конвективные члены которого записаны в виде полусуммы дивергентной и недивергентной форм. На границе ставились условия 1-го рода. В рассматриваемой области строилась равномерная сетка с равными шагами по обоим направлениям

$$\omega_h = \{(ih, jh);\ i, j = 0, 1, \ldots, N,\ h = 1/N\}.$$

После аппроксимации этого уравнения на стандартном пятиточечном шаблоне, где конвективная часть аппроксимируется центральными разностями, получается система линейных алгебраических уравнений с диссипативной пятидиагональной матрицей A. Расчеты проводились при разных числах Pe.

Итерационный процесс прекращался, если $\|r^{(k)}\|_2/\|r^{(0)}\|_2 < \varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-6}$, где $r^{(k)}$ и $r^{(0)}$ — невязки соответственно на k-й и 0-й итерациях.

В качестве точного гладкого решения бралась функция $\widetilde{s}(x,y) = e^{xy}\sin\pi x\sin\pi y$, обращающаяся в нуль на границе. Точность определялась относительной погрешностью $\delta = \frac{\|s-\tilde{s}\|}{\|\tilde{s}\|}100\%$, где s — полученное решение, $\widetilde{s}$ — точное решение.

При проведении численного исследования было рассмотрено четыре варианта задания коэффициентов при конвективных членах (табл. 1).

Таблица 1.

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4
$u = 1,$ $v = -1$	$u = 1-2x,$ $v = 2y-1$	$u = x+y,$ $v = x-y$	$u = \sin 2\pi x,$ $v = -2\pi y\cos 2\pi x$

Исследовалось влияние числа Pe и итерационного параметра τ на величину n числа итераций. Численно подтвердилось существование таких значений $\tau_{\text{опт}}$, для которых при достижении заданной точности число итераций минимально. Приведенные в табл. 2 данные показывают, что чередование операторов K_H и K_B в треугольных кососимметричных методах дает выигрыш для всех рассмотренных задач по числу итераций от 2% до 37% только за счет поочередного их использования.

Таблица 2.

Pe	ТКМ	ДТКМ	$n_{\text{ТКМ}}/2n_{\text{ДТКМ}}$
$u = 1,\ v = -1$			
10^3	237	103	1.15
10^4	1779	753	1.18
10^5	12097	5725	1.05
$u = 1-2x,\ v = 2y-1$			
10^3	397	149	1.33
10^4	1368	611	1.12
10^5	9604	4733	1.02
$u = x+y,\ v = x-y$			
10^3	304	111	1.37
10^4	1400	603	1.16
10^5	10985	4457	1.22
$u = \sin 2\pi x,\ v = -2\pi y\cos 2\pi x$			
10^3	532	222	1.20
10^4	3936	1601	1.23
10^5	33344	13714	1.22

Литература

1. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1978. – 590 с.
2. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики.* – М.: Наука, 1989. – 608 с.
3. Крукиер Л.А. *Неявные разностные схемы и итерационный метод их решения для одного класса систем квазилинейных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1979. – № 7. – С. 41–52.
4. Крукиер Л.А. *Математическое моделирование гидродинамики Азовского моря при реализации проектов реконструкции его экосистемы* // Матем. моделир. – 1991. – Т. 3. – № 9. – С. 3–20.
5. Бочев М.А., Крукиер Л.А. *Об итерационном решении сильно несимметричных систем линейных алгебраических уравнений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т. 37. – № 11. – С. 1283–1293.
6. Крукиер Л.А., Чикина Л.Г. *Решение стационарного уравнения конвекции-диффузии в несжимаемых средах с преобладающей конвекцией итерационными методами* // Сб. тр. Международн. конф. "Применение математического моделирования для решения задач в науке и технике", ИММ, ИПМ УрО РАН. – Ижевск, 1996. – С. 190–201.

7. Чикина Л.Г. *Об одном методе решения уравнения конвекции-диффузии с преобладающей конвекцией* // Матем. моделир. – 1997. – Т. 9. – № 2. – С. 25–30.
8. Чикина Л.Г. *Двуциклические треугольные кососимметрические итерационные методы решения сильно несимметричных систем* // Тез. докл. на школе-семинаре "Актуальные проблемы математического моделирования". – Абрау-Дюрсо: Изд-во РГУ, 1997. – С. 155–159.
9. Крукиер Л.А. *Достаточное условие сходимости треугольного итерационного метода с несамосопряженным исходным оператором* // Изв. Северо-Кавказск. научн. центра высш. школы. ест. наук. – 1989. – № 4. – С. 52–54.
10. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы.* – М.: Наука, 1989. – 432 с.
11. Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* – М.: Мир, 1989. – 655 с.

Ростовский государственный университет

Поступила
14.04.1999