ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 2 (453)

УДК 517.544

Р.Б. САЛИМОВ

НОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Предлагается новый подход к решению краевой задачи Гильберта, основанный на непосредственном построении решения однородной задачи Гильберта.

Пусть D является $(m+1)$-связной областью, ограниченной замкнутыми простыми непересекающимися кривыми $L_0, L_1, \dots, L_m$ Ляпунова, расположенными в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, из которых L_0 охватывает остальные. Требуется найти функцию $F(z) = u(z) + iv(z)$, аналитическую и однозначную в области D, непрерывно продолжимую на ее границу $L = \bigcup\limits_{k=0}^{m} L_k$, по краевому условию

$$\mathrm{Re}[(a(t) + ib(t))F(t)] = a(t)u(t) - b(t)v(t) = c(t), \tag{1}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — заданные на L действительные функции точки t контура L, удовлетворяющие условию Гёльдера, причем $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ всюду на L.

На L установим положительное направление обхода, при котором область D остается слева.

Пусть t_{j0} — фиксированная точка кривой L_j. В дальнейшем для функции $f(t)$, заданной на L_j, под $f(t_{j0}+0)$ и $f(t_{j0}-0)$ будем понимать пределы, к которым стремится $f(t)$, когда точка t стремится к t_{j0} соответственно в отрицательном и положительном направлениях. Через s будем обозначать длину дуги кривой L_j, отсчитываемую от точки t_{j0} в положительном направлении.

Краевое условие (1) запишем так:

$$\mathrm{Re}[e^{-i\nu(t)}F(t)] = \frac{c(t)}{|G(t)|}, \tag{2}$$

где $G(t) = a(t) - ib(t)$, $\nu(t) = \arg G(t)$ — ветвь, непрерывная всюду на L, за исключением, быть может, точек t_{j0}, для которых $\nu(t_{j0}-0) - \nu(t_{j0}+0) = 2\pi\frac{k_j}{2}$, причем $k_j/2$ — целое число, $j = \overline{0,m}$.

Число $k = \sum\limits_{j=0}^{m} k_j$ назовем индексом задачи Гильберта (2), следуя Мусхелишвили ([1], с. 144) (заметим, что в ([2], с. 385) индексом этой задачи называется число $k/2$).

Рассмотрим однородную задачу (2), когда $c(t) \equiv 0$ на L, т. е. задачу

$$\mathrm{Re}[e^{-i\nu(t)}F(t)] = 0, \tag{3}$$

или

$$|F(t)|\,\mathrm{Re}[e^{-i\nu(t)}e^{i\phi(t)}] = 0, \tag{4}$$

где $\phi(t) = \arg F(t)$.

Будем искать частное решение $F_0(z)$ последней задачи, отличное от нуля всюду на L. При этом согласно (4) имеем $\cos[\phi(t) - \nu(t)] = 0$, следовательно, на L_j $\phi(t) = \nu(t) + \frac{\pi}{2} + \pi n_j$, где n_j — произвольное целое число, $j = \overline{0,m}$, $n_0 = 0$. Таким образом, нам известны граничные значения $\phi(t) = \arg F_0(t)$ функции $\arg F_0(z)$ с точностью до слагаемого вида πn_j. Остается найти функцию $F_0(z)$.

Так как

$$\phi(t_{j0}-0)-\phi(t_{j0}+0)=\nu(t_{j0}-0)-\nu(t_{j0}+0)=2\pi\frac{k_j}{2},$$

то число $2\pi(k/2)$ равно приращению $\arg F_0(t)$ при обходе кривой L в положительном направлении, поэтому $k/2$ есть число нулей функции $F_0(z)$, расположенных внутри области D (с учетом их кратности) в соответствии с принципом аргумента.

1. Исследуем вначале случай, когда $k/2\ge m$. Пусть $z_1,z_2,\dots,z_m$ — простые нули, z_0 — нуль кратности $k/2-m$ функции $F_0(z)$ в области D, q_j — заданная точка, лежащая внутри контура L_j, $j=\overline{1,m}$. Пусть $\arg(z-z_k)$ есть однозначная непрерывная ветвь в области D, разрезанной по линии, соединяющей точки z_k, t_{00} и имеющей с кривой L лишь одну общую точку t_{00}, $\arg(z-q_j)$, $j=\overline{1,m}$, — однозначная непрерывная ветвь во внутренности контура L_0, разрезанной по линии, соединяющей точки q_j, t_{j0}, t_{00} и имеющей с кривой L только две общие точки t_{j0} и t_{00}. Используя эти выбранные ветви, получаем

$$\operatorname{Im}\ln(z-z_k)=\arg(z-z_k),\quad \operatorname{Im}\ln(z-q_j)=\arg(z-q_j).$$

Так как функция $F_0(z)\prod\limits_{j=1}^{m}(z-q_j)^{k_j/2}/[(z-z_0)^{k/2-m}\prod\limits_{k=1}^{m}(z-z_k)]$ не имеет нулей в области D, то

$$\Phi(z)=-i\Big[\ln F_0(z)-\Big(\frac{k}{2}-m\Big)\ln(z-z_0)-\sum_{k=1}^{m}\ln(z-z_k)+\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{2}\ln(z-q_j)\Big] \tag{5}$$

аналитична в D и не имеет особенностей, причем действительная часть ее граничного значения равна

$$\operatorname{Re}\Phi(t)=\nu(t)+\frac{\pi}{2}+\pi n_j-\Big(\frac{k}{2}-m\Big)\arg(t-z_0)-\sum_{k=1}^{m}\arg(t-z_k)+\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{2}\arg(t-q_j) \tag{6}$$

на L_j, $j=\overline{0,m}$, и удовлетворяет условию Гёльдера. Но поскольку функция $\Phi(z)$ должна быть однозначной и аналитической в области D, то следует потребовать выполнения условий

$$\int_L \operatorname{Re}\Phi(t)\alpha_k(t)ds=0,\quad k=\overline{1,m}, \tag{7}$$

где $\alpha_k(t)$ — известная функция, указанная в ([2], с. 383). Последнее условие с учетом (6) запишем так:

$$\int_L\Big[\nu(t)+\frac{\pi}{2}+\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{2}\arg(t-q_j)\Big]\alpha_k(t)ds+\pi\sum_{j=1}^{m}n_j\int_{L_j}\alpha_k(t)ds-$$
$$-\Big(\frac{k}{2}-m\Big)\int_L\arg(z-z_0)\alpha_k(t)ds-\int_L\Big[\sum_{j=1}^{m}\arg(t-z_j)\Big]\alpha_k(t)ds=0,\quad k=\overline{1,m}. \tag{8}$$

Здесь считаем, что z_0 — заданная точка, а комплексные числа $z_1,\dots,z_m$ и целые числа $n_1,\dots,n_m$ подлежат определению. В [3] доказана разрешимость этой системы и дано решение.

Пусть числа $z_1,\dots,z_m$, $n_1,\dots,n_m$ из системы (8) найдены, тогда по формуле (6) найдутся значения $\operatorname{Re}\Phi(t)$ и однозначная в области D функция $\Phi(z)$ будет определяться с помощью оператора Шварца

$$\Phi(z)=S(\operatorname{Re}\Phi(t),z)+i\nu_0,$$

где ν_0 — произвольная действительная постоянная, которую можно положить равной нулю. После этого из формулы (5) находим

$$F_0(z)=e^{i\Phi(z)}(z-z_0)^{k/2-m}\prod_{j=1}^{m}(z-z_j)\Big/\prod_{j=1}^{m}(z-q_j)^{k_j/2}, \tag{9}$$

т. е. частное решение задачи (3), отличное от нуля всюду на L. Это решение не зависит от выбора чисел $q_1, \dots, q_m$ ([4], с. 273).

Рассмотрим теперь решение неоднородной задачи (2). Так как согласно (3) $\operatorname{Re}[e^{-i\nu(t)}F_0(t)] = 0$, то $ie^{-i\nu(t)}F_0(t)$ — действительная величина, поэтому (2) можно записать в виде

$$\operatorname{Re}\left[\frac{F(t)}{iF_0(t)}\right] = c_1(t), \tag{10}$$

где

$$c_1(t) = \frac{c(t)}{|G(t)|ie^{-i\nu(t)}F_0(t)}. \tag{11}$$

В силу (9) точки $z_1, \dots, z_m$ являются простыми полюсами, а точка z_0 — полюсом порядка $k/2-m$ функции $F(z)/iF_0(z)$. Учитывая это, последнюю функцию будем искать в виде

$$\frac{F(z)}{iF_0(z)} = \Psi(z) + i\beta_0 + \sum_{j=1}^{k/2-m} \frac{\mu_j}{(z-z_0)^j} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\nu_j}{z-z_j}, \tag{12}$$

где $\Psi(z)$ — новая искомая аналитическая и однозначная в области D функция, β_0 — произвольная действительная постоянная, ν_j, μ_j — неопределенные комплексные постоянные.

В силу (10) имеем на L

$$\operatorname{Re}\Psi(t) = c_1(t) - \sum_{j=1}^{k/2-m} \operatorname{Re}\frac{\mu_j}{(t-z_0)^j} - \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Re}\frac{\nu_j}{t-z_j}. \tag{13}$$

Эти значения $\operatorname{Re}\Psi(t)$ должны удовлетворять условиям, аналогичным (7), т. е. должны выполняться соотношения

$$\sum_{j=1}^{k/2-m} \int_L \operatorname{Re}\frac{\mu_j}{(t-z_0)^j}\alpha_k(t)ds + \sum_{j=1}^{m} \int_L \operatorname{Re}\frac{\nu_j}{t-z_j}\alpha_k(t)ds = \int_L c_1(t)\alpha_k(t)ds, \quad k=\overline{1,m}. \tag{14}$$

Эти соотношения представляют собой систему m линейных алгебраических уравнений с k неизвестными $\operatorname{Re}\nu_j$, $\operatorname{Im}\nu_j$, $\operatorname{Re}\mu_j$, $\operatorname{Im}\mu_j$. Ранг этой системы равен m ([2], с. 388). Считая условия (14) выполненными, по значениям $\operatorname{Re}\Psi(t)$ формулы (13) находим $\Psi(z)$ с помощью оператора Шварца, тогда согласно (12)

$$\frac{F(z)}{iF_0(z)} = S\left(c_1(t) - \sum_{j=1}^{k/2-m} \operatorname{Re}\frac{\mu_j}{(t-z_0)^j} - \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Re}\frac{\nu_j}{t-z_j}, z\right) + i\beta_0 + \sum_{j=1}^{k/2-m} \frac{\mu_j}{(z-z_0)^j} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\nu_j}{z-z_j}. \tag{15}$$

Эта формула дает общее решение неоднородной задачи при выполнении условий (14). Она зависит от $k-m+1$ (с учетом β_0) действительных постоянных. При $c_1(t) \equiv 0$ отсюда получаем общее решение однородной задачи (3), содержащее $k-m+1$ линейно независимых решений. Относительно последнего утверждения см. также ([4], с. 280), где отмечается, что задача (13) при $c_1(t) \equiv 0$ имеет $k-m+1$ решений, когда ранг системы равен m.

2. Пусть теперь $0 \le k/2 < m$. Здесь в отличие от предыдущего неравное нулю всюду на L решение $\widehat{F}_0(z)$ задачи (3) будем искать в классе функций, имеющих в области D и полюсы. Пусть $P = m - k/2$ и $N = m$ — соответственно числа простых полюсов и нулей функции $\widehat{F}_0(z)$, лежащих внутри области D, по принципу аргумента $N - P = k/2$. Предположим, что положения полюсов $d_1, \dots, d_P$ заданы, а положения нулей $z_1, \dots, z_N$ отыскиваются. В этом случае функция

$$\widehat{F}_0(z)\prod_{j=1}^{m}(z-q_j)^{k_j/2}\prod_{j=1}^{P}(z-d_j)\Big/\prod_{j=1}^{N}(z-z_j)$$

не имеет нулей и полюсов в области D. Формулы (5) и (6) заменятся следующими

$$\Phi(z) = -i\Big[\ln \widehat{F}_0(z) + \sum_{j=1}^{P}\ln(z-d_j) - \sum_{j=1}^{m}\ln(z-z_j) + \sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{2}\ln(z-q_j)\Big], \tag{16}$$

$$\operatorname{Re}\Phi(t) = \nu(t) + \frac{\pi}{2} + \pi n_k + \sum_{j=1}^{P}\arg(z-d_j) - \sum_{j=1}^{m}\arg(t-z_j) + \sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{2}\arg(t-q_j) \tag{17}$$

на L_k, $k=\overline{0,m}$, здесь $\arg(z-d_j)$ обозначает то же, что и $\arg(z-z_j)$ при $z_j=d_j$, а условиям (8) будут отвечать соотношения

$$\int_L\Big[\nu(t)+\frac{\pi}{2}+\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{2}\arg(t-q_j)\Big]\alpha_k(t)ds + \pi\sum_{j=1}^{m}n_j\int_{L_j}\alpha_k(t)ds -$$
$$-\int_L\Big[\sum_{j=1}^{m}\arg(t-z_j) - \sum_{j=1}^{P}\arg(t-d_j)\Big]\alpha_k(t)ds = 0, \quad k=\overline{1,m}. \tag{18}$$

Система (18) аналогична соотношениям (8), поэтому из нее могут быть найдены целые числа n_j, z_j, $j=\overline{1,m}$. Далее по формуле (17) определим $\operatorname{Re}\Phi(t)$ и $\Phi(z)$. Тогда в силу (16) будем иметь

$$\widehat{F}_0(z) = \Big[e^{i\Phi(z)}\Big/\prod_{j=1}^{m}(z-q_j)^{k_j/2}\Big]\prod_{j=1}^{N}(z-z_j)\Big/\prod_{j=1}^{P}(z-d_j). \tag{19}$$

Чтобы найти общее решение неоднородной задачи (2) (из которого при $c(t)\equiv 0$ определяется общее решение однородной задачи (3)), условие (2) запишем в форме

$$\operatorname{Re}\left[\frac{F(t)}{i\widehat{F}_0(t)}\right] = \widehat{c}(t), \tag{20}$$

где

$$\widehat{c}(t) = \frac{c(t)}{|G(t)|ie^{-i\nu(t)}\widehat{F}_0(t)}. \tag{21}$$

В силу (19) точки $z_1,\dots,z_N$ являются простыми полюсами функции $F(z)/i\widehat{F}_0(z)$, поэтому последнюю функцию можно искать в виде

$$\frac{F(z)}{i\widehat{F}_0(z)} = \Psi(z) + i\beta_0 + \sum_{j=1}^{N}\frac{\nu_j}{z-z_j}, \tag{22}$$

где $\Psi(z)$, β_0, ν_j обозначают то же, что и в формуле (12). Отсюда с учетом (20) имеем на L

$$\operatorname{Re}\Psi(t) = \widehat{c}(t) - \sum_{j=1}^{N}\operatorname{Re}\frac{\nu_j}{t-z_j}. \tag{23}$$

Эти значения должны удовлетворять условиям вида (7), т. е. должны выполняться соотношения

$$\sum_{j=1}^{N}\int_L \operatorname{Re}\frac{\nu_j}{t-z_j}\alpha_k(t)ds = \int_L \widehat{c}(t)\alpha_k(t)ds, \quad k=\overline{1,m}, \tag{24}$$

которые представляют собой систему m линейных алгебраических уравнений с $2N$ неизвестными $\operatorname{Re}\nu_j$, $\operatorname{Im}\nu_j$. При выполнении условий (24), определив по формуле (23) значения $\operatorname{Re}\Psi(t)$, находим $\Psi(z)$ с помощью оператора Шварца, тогда на основании (22) будем иметь

$$\frac{F(z)}{i\widehat{F}_0(z)} = S\Big(\widehat{c}(t) - \sum_{j=1}^{N}\operatorname{Re}\frac{\nu_j}{t-z_j}, z\Big) + i\beta_0 + \sum_{j=1}^{N}\frac{\nu_j}{z-z_j}. \tag{25}$$

Правая часть этой формулы должна обращаться в нуль в точках $d_1, \dots, d_P$, т. к. в них обращается в нуль ее левая часть согласно (19), т. е. должны выполняться соотношения

$$S\left(\widehat{c}(t) - \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Re} \frac{\nu_j}{t - z_j}, d_l\right) + i\beta_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\nu_j}{d_l - z_j} = 0, \quad l = \overline{1, P}. \tag{26}$$

Условия (24) и $2P = 2m - k$ действительных соотношений, равносильных (26), представляют собой систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными $\operatorname{Re}\nu_j$, $\operatorname{Im}\nu_j$, β_0.

Разрешимость рассматриваемой неоднородной задачи зависит от ранга последней системы.

3. Остается изучить случай $k < 0$. Рассмотрим однородную задачу (3) и пусть пока ищется ее решение $F_0(z)$, отличное от нуля всюду на L. Как уже отмечалось, при этом $k/2$ есть число нулей функции $F_0(z)$ в области D. Но это число не может быть отрицательным. Следовательно, в рассматриваемом случае однородная задача (3) не имеет частного решения, отличного от нуля всюду на L. Легко проверить, что в этом случае однородная задача (3) также не имеет решения, обращающегося в нуль лишь в отдельных точках L.

Таким образом, при $k < 0$ однородная задача (3) не имеет ненулевых решений. При ее решении с помощью метода регуляризующего множителя последнее утверждение не столь очевидно и требует специального рассмотрения и непростого доказательства ([2], с. 389) в связи с тем, что появление в краевом условии решения $F_0(z)$ (в наших обозначениях) остается незамеченным.

Неоднородная задача (2) для случая $k < 0$ решается по той же схеме, что и в п. 2.

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и их приложения к математической физике.* – М.: Наука, 1968. – 511 с.
2. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. Зверович Э.И. *Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровых классах на римановых поверхностях* // УМН. – 1971. – Т. 26. – Вып. 1. – С. 113–179.
4. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – М.: Физматгиз, 1959. — 628 с.

Казанская государственная
архитектурно-строительная
академия

Поступила
07.10.1998