ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 2 (453)

УДК 512.536

Н. КЕХАЙОПУЛУ, М. ЦИНГЕЛИС

ЗАМЕЧАНИЕ О ПОЛУРЕШЕТОЧНЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ В УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУППАХ

Для полугруппы или упорядоченной полугруппы S обозначим через $(x)_\sigma$ σ-класс S, содержащий x ($x \in S$). Если S — полугруппа и σ — конгруэнция на S, то произведение "$\cdot$" на $S/\sigma \rightleftharpoons \{(x)_\sigma \mid x \in S\}$ определяется как $(x_\sigma) \cdot (y_\sigma) = (x \cdot y)_\sigma$ для всех $x, y \in S$. Тогда $(S/\sigma, \cdot)$ является полугруппой (см., напр., [1]). Если же $(S, \cdot, \leq)$ является упорядоченной полугруппой и $H \subseteq S$, тогда обозначим $(H] \rightleftharpoons \{t \in S \mid t \leq h$ для некоторого $h \in H\}$.

Для полугруппы S следующие утверждения эквивалентны [2]:

1) существует полурешеточная конгруэнция σ на S такая, что $(x)_\sigma$ является подполугруппой S типа $\mathcal{T}$ для каждого $x \in S$;
2) существует полурешетка Y и отображение $\varphi : S \to Y$, являющееся гомоморфизмом из S на Y, такое, что $\varphi^{-1}(\{a\})$ есть подполугруппа S типа $\mathcal{T}$ для всех $a \in Y$;
3) существует полурешетка Y и семейство $\{S_\alpha\}_{\alpha \in Y}$ подполугрупп S типа $\mathcal{T}$ такие, что

$$S_\alpha \cap S_\beta = \varnothing \text{ для всех } \alpha, \beta \in Y, \quad \alpha \neq \beta;$$

$$S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha; \quad S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta} \text{ для всех } \alpha, \beta \in Y.$$

Наша цель — получение аналогичного результата для упорядоченных полугрупп.

Пусть $(S, \cdot, \leq)$ — упорядоченная полугруппа. *Полурешеточная конгруэнция* на S — это такая конгруэнция σ на S (т. е. такое отношение эквивалентности σ на S, что $(a, b) \in \sigma \Rightarrow (ac, bc) \in \sigma$, $(ca, cb) \in \sigma$ для всех $c \in S$), что $(a^2, a) \in \sigma$, $(ab, ba) \in \sigma$ для всех $c \in S$ [3]. Полурешеточная конгруэнция σ на S называется *полной*, если $(x, y) \in \leq$ влечет $(x, xy) \in \sigma$ [3]. Полугруппа $(Y, \cdot)$ называется *полурешеткой*, если $x^2 = x$ и $xy = yx$ для всех $x, y \in S$.

Пусть $(Y, \cdot)$ — полурешетка. Определим отношение "$\prec$" на Y так: $\preceq \rightleftharpoons \{(\alpha, \beta) \mid \alpha = \alpha\beta \ (= \beta\alpha)\}$. Тогда $(Y, \cdot, \preceq)$ является упорядоченной полугруппой.

В случае упорядоченных полугрупп, имея дело с полурешеткой Y, будем рассматривать ее как упорядоченную полугруппу $(Y, \cdot, \preceq)$ с отношением $\preceq$, определенным следующим образом:

$$\preceq \rightleftharpoons \{(\alpha, \beta) \mid \alpha = \alpha\beta \ (= \beta\alpha)\}.$$

Предложение. *Пусть $(S, \cdot, \preceq)$ — упорядоченная полугруппа. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *существует полная полурешеточная конгруэнция σ на S такая, что $(x)_\sigma$ является подполугруппой типа $\mathcal{T}$ для всех $x \in S$;*
2) *существуют полурешетка Y и гомоморфизм "на" $\varphi : S \to Y$ (между двумя упорядоченными полугруппами) такие, что $\varphi^{-1}(\{a\})$ является подполугруппой S типа $\mathcal{T}$ для всех $\alpha \in Y$;*
3) *существуют полурешетка Y и семейство $\{S_\alpha\}_{\alpha \in Y}$ подполугрупп S типа $\mathcal{T}$ такие, что*

$$S_\alpha \cap S_\beta = \varnothing \ \text{ для всех } \alpha, \beta \in Y, \quad \alpha \neq \beta; \quad S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha;$$

$$S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta} \ \text{ для всех } \alpha, \beta \in Y; \quad S_\beta \cap (S_\alpha] \neq \varnothing \Rightarrow \beta \preceq \alpha.$$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть σ — полная полурешеточная конгруэнция на S такая, что $(x)_\sigma$ — подполугруппа S типа $\mathcal{T}$ для всех $x \in S$.

Пусть $Y = S/\sigma$. Тогда Y — полурешетка (т. е. коммутативная идемпотентная полугруппа).

Рассмотрим отображение $\varphi : S \to Y \mid x \to (x)_\sigma$.

α) Очевидно, φ всюду определено.

β) φ является гомоморфизмом. Действительно, если $x, y \in S$, то $\varphi(x,y) = (xy)_\sigma \rightleftharpoons (x)_\sigma(y)_\sigma = \varphi(x)\varphi(y)$. Пусть $x, y \in S$, $x \le y$. Так как σ полна, имеем $(x, xy) \in \sigma$. Тогда $(x)_\sigma = (xy)_\sigma = (x)_\sigma(y)_\sigma$, т. е. $(x)_\sigma \preceq (y)_\sigma$.

γ) Очевидно, φ — отображение “на”.

δ) Пусть $\alpha \in Y$ ($\Rightarrow \varphi^{-1}(\{a\})$ подполугруппа S типа $\mathcal{T}$?). Так как $a \in S/\sigma$, существует $x \in S$ такой, что $\alpha = (x)_\sigma$.

Покажем, что $\varphi^{-1}(\{a\}) = (x)_\sigma$. Пусть $t \in \varphi^{-1}(\{a\})$. Тогда $t \in S$, $\varphi(t) = \alpha$. Так как $t \in S$, то $\varphi(t) = (t)_\sigma$. Таким образом, $(t)_\sigma = \alpha = (x)_\sigma$ и $t \in (x)_\sigma$. С другой стороны, $t \in (x)_\sigma \Rightarrow t \in S$ и $\varphi(t) = (t)_\sigma = (x)_\sigma = \alpha \Rightarrow t \in \varphi^{-1}(\{a\})$.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $(Y, \cdot, \preceq)$ — полурешетка и $\varphi : S \to Y$ — гомоморфизм между этими двумя упорядоченными полугруппами такой, что $\varphi^{-1}(\{a\})$ — подполугруппа S типа $\mathcal{T}$ для всех $\alpha \in Y$.

Положим $S_\alpha \rightleftharpoons \varphi^{-1}(\{\alpha\})$ для $\alpha \in Y$. Тогда $\{S_\alpha\}_{\alpha \in Y}$ — семейство подполугрупп S типа $\mathcal{T}$. Продолжим рассуждения следующим образом.

α) Пусть $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \ne \beta$ ($\Rightarrow \varphi^{-1}(\{\alpha\}) \cap \varphi^{-1}(\{\beta\}) = \varnothing$?). Если $t \in \varphi^{-1}(\{\alpha\}) \cap \varphi^{-1}(\{\beta\})$, тогда $\varphi(t) = \alpha$, $\varphi(t) = \beta$. Отсюда $\alpha = \beta$, что невозможно.

β) $S = \bigcup\limits_{\alpha \in Y} \varphi^{-1}(\{\alpha\})$. Действительно, $\alpha \in Y \Rightarrow \{\alpha\} \subseteq Y \Rightarrow \varphi^{-1}(\{\alpha\}) \subseteq S$ для $\alpha \in Y$. Отсюда $\bigcup\limits_{\alpha \in Y} \varphi^{-1}(\{\alpha\}) \subseteq S$. Теперь пусть $x \in S$ ($\Rightarrow$ для некоторого $\alpha \in Y$, $x \in \varphi^{-1}(\{\alpha\})$? $\Leftrightarrow$ для некоторого $\alpha \in Y$, $\varphi(x) = \alpha$). Достаточно положить $\alpha = \varphi(x) \in Y$.

γ) Пусть $\alpha, \beta \in Y$ ($\Rightarrow \varphi^{-1}(\{\alpha\})\varphi^{-1}(\{\beta\}) \subseteq \varphi^{-1}(\{\alpha\beta\})$?). Пусть $t \in \varphi^{-1}(\{\alpha\})\varphi^{-1}(\{\beta\})$. Тогда $t = xy$, $x \in \varphi^{-1}(\{\alpha\})$, $y \in \varphi^{-1}(\{\beta\})$. Поэтому $\varphi(t) = \varphi(x,y) = \varphi(x)\varphi(y) = \alpha\beta$ (φ является гомоморфизмом). Так как $\varphi(t) = \alpha\beta$, $t \in S$, то имеем $t \in \varphi^{-1}(\{\alpha\beta\})$.

δ) Пусть $\alpha, \beta \in Y$, $S_\beta \cap (S_\alpha] \ne \varnothing$ ($\Rightarrow \beta \preceq \alpha$?). Пусть $x \in S_\beta \cap (S_\alpha]$. Так как $x \in S_\beta = \varphi^{-1}(\{\beta\})$, то $\varphi(x) = \beta$. Так как $x \in (S_\alpha]$, то найдется $y \in S_\alpha$ такой, что $x \le y$. Тогда т. к. φ — гомоморфизм, имеем $\varphi(x) \preceq \varphi(y)$. Поскольку $y \in S_\alpha = \varphi^{-1}(\{\alpha\})$, то $\varphi(y) = \alpha$. Поэтому $\beta \preceq \alpha$.

3) $\Rightarrow$ 1). Определим отношение “σ” на S следующим образом: $\sigma = \{(x,y) \in S \times S \mid \exists \alpha \in Y : x, y \in S_\alpha\}$.

i) Докажем, что σ — полная полурешеточная конгруэнция на S.

α) Пусть $x \in S$, тогда $\exists \alpha \in Y$ $(x \in S_\alpha)$, $(S = \bigcup\limits_{\alpha \in Y} S_\alpha)$.

β) Пусть $(x,y) \in \sigma \Rightarrow \exists \alpha \in Y$ $(x, y \in S_\alpha) \Rightarrow \exists \alpha \in Y$ $(y, x \in S_\alpha) \Rightarrow (y,x) \in \sigma$.

γ) Пусть $(x,y) \in \sigma$, $(y,z) \in \sigma$. Тогда $\exists \alpha \in Y$ $(x, y \in S_\alpha)$ и $\exists \beta \in Y$ $(y, z \in S_\beta)$. Если $\alpha \ne \beta$, то $y \in S_\alpha \cap S_\beta$, что невозможно. Поэтому $\alpha = \beta$. Тогда $x, z \in S_\alpha$ и $(x,z) \in \sigma$.

δ) Пусть $(x,z) \in \sigma$, $z \in S$ ($\Rightarrow (xz, yz) \in \sigma$, $(zx, zy) \in \sigma$?). Имеем $(x,y) \in \sigma \Rightarrow \exists \alpha \in Y$ $(x, y \in S_\alpha)$ и $z \in S \Rightarrow z \in S_\beta$ для некоторого $\beta \in Y$. Тогда $xz, yz \in S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$, $\alpha\beta \in Y$ (Y является полугруппой), что влечет $(xz, yz) \in \sigma$. Аналогично $(zx, zy) \in \sigma$.

ε) Пусть $x \in S$ ($\Rightarrow (x^2, x) \in \sigma$?). Имеем $x \in S \Rightarrow \exists \alpha \in Y$ $(x \in S_\alpha) \Rightarrow x^2 \in S_\alpha S_\alpha \subseteq S_\alpha$ (S_α является подполугруппой полугруппы S). Так как $x^2, x \in S_\alpha$, $\alpha \in Y$, то $(x^2, x) \in \sigma$.

ζ) Пусть $x, y \in S$ ($\Rightarrow (xy, yx) \in \sigma$?). Поскольку $\exists \alpha \in Y$ $(x \in S_\alpha)$, $\exists \beta \in Y$ $(x \in S_\beta)$, то $xy \in S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$, $yx \in S_\beta S_\alpha \subseteq S_{\beta\alpha} = S_{\alpha\beta}$ (т. к. Y — полурешетка $\Rightarrow \alpha\beta = \beta\alpha$). Так как $xy, yx \in S_{\alpha\beta}$, $\alpha\beta \in Y$, то $(xy, yx) \in \sigma$.

η) Пусть $x, y \in S$, $x \le y$ ($\Rightarrow (x, xy) \in \sigma$?). Имеем $x \in S = \bigcup\limits_{\alpha \in Y} S_\alpha \Rightarrow \exists \beta \in Y$ $(x \in S_\beta)$ и $\exists \alpha \in Y$ $(x \in S_\alpha)$. Тогда $xy \in S_\beta S_\alpha \subseteq S_{\beta\alpha}$. Так как $x \in S$, $x \le y$, $y \in S_\alpha$, то $x \in (S_\alpha]$. Далее, т. к. $S_\beta \cap (S_\alpha] \ne \varnothing$, то $\beta \preceq \alpha$, поэтому $\beta = \beta\alpha$. Наконец, т. к. $x, xy \in S_\beta$, $\beta \in Y$, то $(x, xy) \in \sigma$.

ii) Пусть $x \in S$ ($\Rightarrow (x)_\sigma$ является упорядоченной подполугруппой S типа $\mathcal{T}$?), $x \in S \Rightarrow x \in S_\alpha$ для некоторого $\alpha \in Y$. Имеем $(x)_\sigma = S_\alpha$. Действительно, пусть $y \in (x)_\sigma$. Тогда $(y, x) \in \sigma$, существует такой $\beta \in Y$, что $y, x \in S_\beta$. Если $\alpha \neq \beta$, то $S_\alpha \cap S_\beta = \varnothing$, что невозможно. Поэтому $\alpha = \beta$ и $y \in S_\alpha$.

Пусть $y \in S_\alpha$ ($\Rightarrow y \in (x)_\sigma$?). Так как $x, y \in S_\alpha$, $\alpha \in Y$, то $(x, y) \in \sigma$. Поэтому $y \in (y)_\sigma = (x)_\sigma$.

Литература

1. Petrich M. *Introduction to semigroups.* – Columbus, Ohio: Merrill, 1973. – 198 p.
2. Kehayopulu N., Tsingelis M. *Remark on ordered semigroups* // Межвузовский сб. научных работ / Под ред. Е.С. Ляпина. – С.-Петербург: Образование, 1992. – С. 50–55.
3. Kehayopulu N. *Remark on ordered semigroups* // Math. Japonica. – 1990. – V. 35. – № 6. – P. 1061–1063.

Афинский университет
(*Греция*)

Поступила
12.11.1997