Известия вузов. Математика
2008, № 6, с. 79–84 *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Краткое сообщение

Т.Н. ГЛУХОВА

НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ ОСНАЩЕННОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬЮ КОНФОРМНОГО ПРОСТРАНСТВА

Аннотация. Найдены две нормальные связности, индуцируемые нормальным оснащением гиперповерхности V_{n-1} конформного пространства C_n, и установлена взаимосвязь между этими связностями и вейлевой связностью, также индуцируемой нормальным оснащением подмногообразия V_{n-1}. Изучены также две нормальные связности, индуцируемые полным оснащением гиперповерхности конформного пространства. Установлена взаимосвязь между геометриями оснащенной гиперповерхности V_{n-1} конформного пространства C_n и квадратичной гиперполосой H_{n-1} проективного пространства P_{n+1}, ассоциированной с подмногообразием V_{n-1}.

Ключевые слова: конформное пространство, нормально оснащенная гиперповерхность, касательно оснащенная гиперповерхность, полное оснащение гиперповерхности, плоская связность, полуплоская связность.

УДК: 514.756

Abstract. We find two normal connections induced by the normal framing of a hypersurface V_{n-1} in the conformal space C_n, and establish relationship between these connections and a Weyl connection which is also induced by the normal framing of V_{n-1}. We study two normal connections induced by a complete framing of a hypersurface V_{n-1} in C_n. We establish relationship between geometries of a framed hypersurface V_{n-1} of the conformal space C_n and a quadratic hyperband of the projective space P_{n+1} associated with V_{n-1}.

Keywords: conformal space, normally framed hypersurface, tangentially framed hypersurface, complete framing of hypersurface, flat connection, semi-flat connection.

Работа посвящена изучению нормальных связностей, индуцируемых нормальным и полным оснащениями гиперповерхности V_{n-1} конформного пространства C_n.

1. Рассмотрим гиперповерхность [1] $V_{n-1} \subset C_n$ $(n \geq 3)$, отнесенную к полуизотропному ([2], с. 14) полуортогональному $(g_{in} = (A_i A_n) = 0;\ i, j, k, l, s, t = \overline{1, n-1})$ реперу $R = \{A_\lambda\}$ $(\lambda, \mu, \rho = \overline{0, n+1})$ первого порядка. Уравнения инфинитезимального перемещения репера R имеют вид $dA_\lambda = \omega_\lambda^\mu A_\mu$, где дифференциальные формы Пфаффа ω_λ^μ удовлетворяют уравнениям структуры конформного пространства C_n ([3], [4], с. 52–53): $D\omega_\lambda^\mu = \omega_\lambda^\rho \wedge \omega_\rho^\mu$, а

Поступила 17.04.2006, краткое сообщение — 02.04.2007

также линейным зависимостям

$$\omega_0^{n+1} = \omega_{n+1}^0 = 0, \quad \omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = 0, \quad \omega_I^0 + g_{IK}\omega_{n+1}^K = 0,$$
$$\omega_I^{n+1} + g_{IK}\omega_0^K = 0, \quad dg_{IL} - g_{IK}\omega_L^K - g_{KL}\omega_I^K = 0 \quad (I, J, K, L = \overline{1, n}).$$

Если скалярные произведения $(A_\lambda A_\mu)$ элементов выбранного репера обозначить через $g_{\lambda\mu}$, то ([3], [4], с. 59)

$$\|g_{\lambda\mu}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{nn} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda},$$

причем метрический тензор g_{ij} и относительный инвариант g_{nn} являются невырожденными:

$$g_{il}g^{lj} = \delta_i^j, \quad g_{nn}g^{nn} = 1, \quad dg_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{kj}\omega_i^k = 0,$$
$$dg^{ij} + g^{ik}\omega_k^j + g^{kj}\omega_k^i = 0, \quad d\ln g_{nn} - 2\omega_n^n = 0, \quad d\ln g^{nn} + 2\omega_n^n = 0.$$

В этом репере справедливо

$$\omega_0^n = 0, \quad \omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j, \quad \omega_n^i = \Lambda_{nt}^i \omega_0^t, \quad \Lambda_{[ij]}^n = 0, \quad g_{ij}\Lambda_{nk}^j + g_{nn}\Lambda_{ik}^n = 0.$$

2. Пусть задано нормальное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ полем окружностей $[P_i]$: $P_i = A_i + x_i^0 A_0$, определяемым полем квазитензора x_i^0 [1]:

$$dx_i^0 + x_i^0\omega_0^0 - x_j^0\omega_i^j + \omega_i^0 = x_{ij}^0\omega_0^j. \tag{1}$$

Рассмотрим систему форм $\{\overset{0}{\Theta}{}_n^\alpha\} = \{\overset{0}{\Theta}{}_n^0, \overset{0}{\Theta}{}_n^n\}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 0, n)$, где

$$\overset{0}{\Theta}{}_n^0 = \omega_n^0 - x_i^0\omega_n^i, \quad \overset{0}{\Theta}{}_n^n = \omega_n^n - (\omega_0^0 - x_k^0\omega_0^k). \tag{2}$$

Эта система форм удовлетворяет структурным уравнениям Картана–Лаптева ([5], с. 105; [6])

$$D\overset{0}{\Theta}{}_n^\alpha = \overset{0}{\Theta}{}_n^n \wedge \overset{0}{\Theta}{}_n^\alpha + \frac{1}{2}\overset{0}{R}{}_{nst}^\alpha \omega_0^s \wedge \omega_0^t, \tag{3}$$

где

$$d\overset{0}{R}{}_{nst}^\alpha + \overset{0}{R}{}_{nst}^n \overset{0}{\Theta}{}_n^\alpha - \overset{0}{R}{}_{nst}^\alpha \overset{0}{\Theta}{}_n^n + 2\overset{0}{R}{}_{nst}^\alpha \omega_0^0 - \overset{0}{R}{}_{nkt}^\alpha \omega_s^k - \overset{0}{R}{}_{nsk}^\alpha \omega_t^k = \overset{0}{R}{}_{nstk}^\alpha \omega_0^k;$$

следовательно, система форм (2) на нормально оснащенной гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ в расслоении окружностей $[P_i]$ устанавливает нормальную связность $\overset{0}{\nabla}{}^\perp$ ([7], с. 80).

В структурных уравнениях (3) компоненты тензора кривизны-кручения $\overset{0}{R}{}_{nst}^\alpha$ соответствующего пространства нормальной связности имеют следующее строение:

$$\text{а)}\ \overset{0}{R}{}_{nst}^0 = -2(x_{i[s}^0\Lambda_{|n|t]}^i - x_i^0 x_{[s}^0\Lambda_{|n|t]}^i), \quad \text{б)}\ \overset{0}{R}{}_{nst}^n = -2x_{[st]}^0, \tag{4}$$

причем подобъект $\overset{0}{R}{}_{nst}^n$ тензора кривизны-кручения $\overset{0}{R}{}_{nst}^\alpha$ (см. (1)) образует подтензор, а форма $\{\overset{0}{\Theta}{}_n^n\}$ определяет подсвязность $\overset{0}{\tilde{\nabla}}{}^\perp$ связности $\overset{0}{\nabla}{}^\perp$.

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *На нормально оснащенной полем квазитензора x_i^0 гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ в расслоении окружностей $[P_i]$ индуцируется нормальная связность $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$, определяемая системой форм* (2); *при этом компоненты тензора кривизны-кручения соответствующего пространства нормальной связности имеют строение* (4). *Форма $\{\overset{0}{\Theta}{}_n^n\}$ определяет подсвязность $\overset{0}{\widetilde{\nabla}}{}^{\perp}$ связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$, ее тензор кривизны-кручения имеет вид* (4б)).

Согласно [8], [9], система форм Пфаффа $\overset{0}{\theta}{}_0^j = \omega_0^j$, $\overset{0}{\theta}{}_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j(\omega_0^0 - x_k^0\omega_0^k) + g^{jk}x_k^0\omega_i^{n+1} + x_i^0\omega_0^j$ на нормально оснащенной полем окружностей $[P_i]$ гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ определяет пространство аффинной связности $\overset{0}{\mathrm{A}}_{n-1,n-1}$ без кручения, которое является пространством Вейля W_{n-1} с полем метрического тензора g_{ij}. Это пространство является римановым тогда и только тогда, когда кососимметричный тензор $x_{[ij]}^0$ обращается в нуль.

Известно [3], что в третьей дифференциальной окрестности поле квазитензора $\widetilde{a}_k \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{n-1}a_n^{ji}a_{ijk}^n$, где $a_{ij}^n \overset{\mathrm{def}}{=} \Lambda_{ij}^n - \frac{1}{n-1}g_{ij}g^{ks}\Lambda_{ks}^n$, $a_{ik}^n a_n^{kj} = \delta_i^j$, внутренним образом определяет нормальное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$, причем аффинная связность $\overset{0}{\nabla}$, индуцируемая этим полем, является римановой.

Предположим, что нормальная подсвязность $\overset{0}{\widetilde{\nabla}}{}^{\perp}$ связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ является плоской ([7], с. 85), что равносильно обращению в нуль тензора $\overset{0}{R}{}_{nst}^n$. Из соотношений (4б)) имеем

$$\overset{0}{R}{}_{nst}^n = 0 \Leftrightarrow x_{[st]}^0 = 0.$$

Последние соотношения говорят о том, что условие, при котором нормальная подсвязность $\overset{0}{\widetilde{\nabla}}{}^{\perp}$ плоская, а, следовательно, нормальная связность $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ полуплоская ([7], с. 85), эквивалентно тому, что пространство аффинной связности $\overset{0}{\mathrm{A}}_{n-1,n-1}$ является римановым.

3. Другая нормальная связность $\nabla^{\perp}$ на оснащенной гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$, согласно работе [9], определяется системой форм $\{\omega_0^k, \Theta_n^{\alpha}\}$, в которой слоевые формы Θ_n^{α} получаются в результате преобразования

$$\Theta_n^n = \overset{0}{\Theta}{}_n^n + H_{nk}^n\omega_0^k, \quad \Theta_n^0 = \overset{0}{\Theta}{}_n^0 + H_{nk}^0\omega_0^k. \tag{5}$$

Допустим, что в преобразовании (5) тензор H_{nk}^n нулевой; при этом связность $\nabla^{\perp}$, компоненты тензора R_{nst}^{α} и слоевые формы связности обозначим соответственно через $\widetilde{\nabla}^{\perp}$, $\widetilde{R}_{nst}^{\alpha}$ и $\widetilde{\Theta}_n^{\alpha}$.

Теорема 2. *Нормальное оснащение гиперповерхности V_{n-1} конформного пространства C_n полем квазитензора x_i^0* (см. (1)) *в расслоении окружностей $[P_i]$ кроме нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ индуцирует нормальную связность $\widetilde{\nabla}^{\perp}$ с кривизной и кручением, определяемую заданием поля тензора H_{nk}^0.*

Теорема 3. *При охвате $\mathrm{M}_{nk}^0 \overset{\mathrm{def}}{=} (x_k^0 - \widetilde{a}_k)g_{nn}\sqrt[n-1]{\frac{|a_{ij}^n|}{|g_{ij}|}}$ нормальные связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\widetilde{\nabla}^{\perp}$, индуцируемые в расслоении окружностей $[P_i]$ при нормальном оснащении гиперповерхности*

V_{n-1} конформного пространства C_n полем квазитензора x_i^0, имеют одинаковые тензоры кривизны-кручения тогда и только тогда, когда вейлева связность $\overset{0}{\nabla}$ в касательном расслоении является римановой ($x^0_{[st]} = 0$).

4. Предположим, что в преобразовании (5) тензор $H^n_{nk} \neq 0$. В этом случае нормальная связность $\nabla^\perp$, определяемая слоевыми формами (5), индуцируется лишь тогда, когда задано полное оснащение [1], [9] гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$, т.е. кроме ее нормального оснащения полем окружностей $[P_i]$ дополнительно задано касательное оснащение подмногообразия $V_{n-1} \subset C_n$ полем касательных гиперсфер $p_n = A_n + x_n^0 A_0$, определяемым полем квазитензора x_n^0 [1],

$$dx_n^0 + x_n^0(\omega_0^0 - \omega_n^n) + \omega_n^0 = x^0_{nk}\omega_0^k. \tag{6}$$

Дифференциальное уравнение (6) с использованием соотношений (4б)) и строения форм Θ_n^α запишется в виде $dx_n^0 - x_n^0\Theta_n^n + \Theta_n^0 = (x^0_{nk} - x^0_n x^0_k - x^0_s \Lambda^s_{nk})\omega_0^k$.

Рассмотрим класс гиперповерхностей $V_{n-1} \subset C_n$, допускающих такое полное оснащение, при котором тензор $\mathrm{X}^0_{nk} \overset{\text{def}}{=} x^0_{nk} - x^0_n x^0_k - x^0_s \Lambda^s_{nk}$ обращается в нуль. Класс таких гиперповерхностей не пуст. Согласно работе ([7], с. 96), к этому классу относится гиперповерхность $V_{n-1} \subset C_n$, вырождаемая в неподвижную касательную гиперсферу $P_n = A_n + x_n^0 A_0$.

Теорема 4. *Нормальная связность $\nabla^\perp$, индуцируемая полным оснащением гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ с заданным на ней полем ненулевого тензора H^n_{nk}, при котором тензор X^0_{nk} обращается в нуль, является плоской ($R^\alpha_{nst} \equiv 0$) тогда и только тогда, когда она полуплоская ($R^n_{nst} \equiv 0$).*

Следствие. Нормальная связность $\nabla^\perp$, индуцируемая полным оснащением гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ с заданным на ней полем ненулевого тензора H^n_{nk}, при любом нормальном оснащении ее (поле квазитензора x_i^0 любое) является плоской тогда и только тогда, когда она полуплоская.

5. При охвате $\overset{1}{\mathrm{M}}{}^n_{nk} \overset{\text{def}}{=} \widetilde{a}_k - x_k^0$ нормальную связность $\nabla^\perp$ обозначим через $\overset{1}{\nabla}{}^\perp$, а слоевые формы — через $\overset{1}{\Theta}{}^\alpha_n$.

Теорема 5. *Нормальная связность $\overset{1}{\nabla}{}^\perp$, индуцируемая полным оснащением гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ и определяемая слоевыми формами $\overset{0}{\Theta}{}^\alpha_n$, является полуплоской ($\overset{1}{R}{}^n_{nst} = 0$).*

Следствие. Нормальная связность $\overset{1}{\nabla}{}^\perp$, индуцируемая полным оснащением гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ с полем ненулевого тензора $\overset{1}{\mathrm{M}}{}^n_{nk}$, при котором X^0_{nk} обращается в нуль, является плоской.

Приведенное следствие справедливо на гиперсфере $V_{n-1} \equiv P_n$ конформного пространства C_n, ибо при любом полном оснащении ее тензор X^0_{nk} всегда обращается в нуль.

6. В случае нормального оснащения гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ полем окружностей $[P_i]$ при перенесении Дарбу конформного пространства C_n в проективное пространство P_{n+1} ее образ $\widetilde{V}_{n-1}$, лежащий на гиперквадрике Дарбу $Q_n^2 \subset \mathrm{P}_{n+1}$, оказывается нормализованным полями нормалей первого $\mathrm{N}_2 \equiv [\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n\mathrm{X}'_{n+1}]$ и второго $\mathrm{N}_{n-2} \equiv [\mathrm{P}_i]$ родов, где X'_{n+1} — образ оснащающей точки $X'_{n+1} = \frac{1}{2}g^{kj}x_k^0 x_j^0 A_0 - g^{kj}x_j^0 P_k + A_{n+1}$, $X'_{n+1} \in C_n$, $X'_{n+1} \neq A_0$.

Теорема 6. *Нормальное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ при отображении Дарбу в пространстве P_{n+1} индуцирует взаимным образом нормализованную регулярную $(n-1)$-мерную квадратичную гиперполосу $H_{n-1} \subset \mathrm{P}_{n+1}$, для которой базисной поверхностью является образ $\widetilde{V}_{n-1} \subset Q_n^2$ подмногообразия и полем характеристик семейства касательных к Q_n^2 гиперплоскостей в точках $\mathrm{A}_0 \in \widetilde{V}_{n-1}$ служит поле прямых $(\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n)$.*

При полном оснащении гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ оснащающая точка $X_{n+1} = \frac{1}{2}g^{JK}x_J^0x_K^0A_0 - g^{JK}x_K^0P_J + A_{n+1}$ в пространстве C_n описывает гиперповерхность V_{n-1}^*; образ этой гиперповерхности при перенесении Дарбу обозначим через $\widetilde{V}_{n-1}^*$.

Теорема 7. *При полном оснащении гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ касательные плоскости к поверхностям $\widetilde{V}_{n-1}$ и $\widetilde{V}_{n-1}^*$ в соответствующих точках пересекаются по нормали второго рода $[\mathrm{P}_i]$ тогда и только тогда, когда при указанном оснащении обращается в нуль тензор X_{nk}^0.*

В условиях теоремы 6 в нормали первого рода $\mathrm{N}_2 \equiv [\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n\mathrm{X}'_{n+1}]$ гиперполосы $H_{n-1} \subset \mathrm{P}_{n+1}$ возьмем прямую $h \equiv [\mathrm{A}_0\mathrm{N}_{n+1}]$, где $\mathrm{N}_{n+1} = \mathrm{X}'_{n+1} + \nu_{n+1}^n\mathrm{A}_n$; условие инвариантности прямой h $(\delta h = \Theta h)$ равносильно уравнению $\delta\nu_{n+1}^n + \nu_{n+1}^n(\pi_n^n + \pi_0^0) + \pi_{n+1}^n = 0$. Этому уравнению удовлетворяет охват $a_{n+1}^n \overset{\mathrm{def}}{=} -\frac{1}{n-1}\Lambda_{ij}^n g^{ij}$.

Таким образом, в нормали первого рода N_2 гиперполосы $H_{n-1} \subset \mathrm{P}_{n+1}$ прямая $h \equiv [\mathrm{A}_0\mathrm{N}_{n+1}]$, где $\mathrm{N}_{n+1} = \mathrm{X}'_{n+1} + a_{n+1}^n\mathrm{A}_n$, является инвариантной.

7. **Определение.** Если $\mathrm{N}_1(\mathrm{A}_0)$ — прямая, проходящая через точку $\mathrm{A}_0 \in \widetilde{V}_{n-1}$ и $\mathrm{N}_1(\mathrm{A}_0) \subset \mathrm{N}_2$, то согласно ([7], с. 92) поле $\mathrm{N}_1(\mathrm{A}_0)$ называется параллельным в нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$, если при любом инфинитезимальном перемещении точки A_0 базисной поверхности $\widetilde{V}_{n-1}$ гиперполосы $H_{n-1} \subset \mathrm{P}_{n+1}$ смещение прямой $\mathrm{N}_1(\mathrm{A}_0)$ происходит в n-мерной плоскости, натянутой на касательную плоскость $\widetilde{T}_{n-1}(\mathrm{A}_0)$ поверхности $\widetilde{V}_{n-1}$ и на прямую $\mathrm{N}_1(\mathrm{A}_0)$.

Теорема 8. *При любом нормальном оснащении гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ поле характеристик $[\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n]$ гиперполосы $H_{n-1} \subset \mathrm{P}_{n+1}$ параллельно переносится в нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$.*

Каждая из систем функций $\mathrm{A}_{n+1,k}^{ns} \overset{\mathrm{def}}{=} a_{n+1}^n\delta_k^s + g^{ls}\Lambda_{lk}^n$, $\mathrm{A}_{n+1,k}^n \overset{\mathrm{def}}{=} a_{n+1,k}^n - \mathrm{A}_{n+1,k}^{nt}x_t^0$ образует тензор, причем первый из них является тензором второго порядка, а порядок второго – не ниже третьего.

Теорема 9. *Поле инвариантных прямых $h \equiv [\mathrm{A}_0\mathrm{N}_{n+1}]$ на гиперполосе $H_{n-1} \subset \mathrm{P}_{n+1}$, определяемое полем квазитензора x_i^0, является параллельным в нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ тогда и только тогда, когда тензор $\mathrm{A}_{n+1,k}^n$ обращается в нуль.*

Теорема 10. *Для общей гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ в третьей дифференциальной окрестности существует единственное внутренним образом определяемое ее нормальное оснащение, при котором соответствующее поле инвариантных прямых h гиперполосы $H_{n-1} \subset \mathrm{P}_{n+1}$ является параллельным в нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$.*

По аналогии можно рассмотреть параллельное перенесение поля прямых $[A_0M]$ в остальных нормальных связностях, рассмотренных выше.

Литература

[1] Акивис М.А. *Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства* // Матем. сб. – 1952. – Т. 31. – № 1. – С. 43–75.

[2] Бушманова Г.В., Норден А.П. *Элементы конформной геометрии.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972. – 178 с.

[3] Акивис М.А. *К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей* // Матем. сб. – 1961. – Т. 53. – № 1. – С. 53–72.

[4] Akivis M.A., Goldberg V.V. *Conformal differential geometry and its generalizations.* – USA, 1996. – 384 p.

[5] Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. – М.: ВИНИТИ. – 1979. – Т. 9. – 246 с.

[6] Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.

[7] Чакмазян А.В. *Нормальная связность в геометрии подмногообразий.* – Ереван: Изд-во Армянск. пед. ин-та, 1990. – 116 с.

[8] Андреева Т.Н. *Аффинные связности на нормально оснащенной гиперповерхности конформного пространства* // Вестн. Чувашск. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. – 2004. – № 1. – С. 3–9.

[9] Столяров А.В. *Линейные связности на распределениях конформного пространства* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 3. – С. 60–72.

Т.Н. Глухова

доцент, кафедра геометрии,
Чувашский государственный педагогический университет,
428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, д. 38,

e-mail: vediny@mail.ru

T.N. Glukhova

Associate Professor, Chair of Geometry,
Chuvas State University of Liberal Arts,
38 K. Marks str., Cheboksary, 428000, Russia,

e-mail: vediny@mail.ru