МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА ТЕОРИИ И ТЕХНОЛОГИЙ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Специальность: 050201.65: Математика с дополнительной специальностью

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Работа завершена:

"___"_________ 2015г. ______________________ (Э.Э.Сафиуллина)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель

к.п.н., доцент

"___"_________ 2015г. ______________________ (К.Б. Шакирова)

Заведующий кафедрой

д.п.н., профессор

"___"_________ 2015 г. ______________________ (Л.Р. Шакирова)

Казань – 2015

Оглавление

Введение

В последние годы наметился разрыв между уровнем математических знаний выпускников школы и требованиями к нему вузов. Профессор МФТИ, член-корреспондент РАН Л.Д. Кудрявцев, считает, что это вызвано: неумением студентов отличить то, что они понимают от того, что они не понимают; неумением вести диалог: понять вопрос преподавателя и ответить на него; неумением логически мыслить, отличая истинное рассуждение от ложного; стереотипностью восприятия информации, снижением общего культурного уровня [1].

Концепция развития российского математического образования, принятая в 2013 году, ставит задачу повысить уровень математической подготовки учащихся. Один из путей решения этой задачи - углубление и расширение содержания обучения математике. Такую возможность дает изучение темы: «Обратные тригонометрические функции». Данная тема не изучается по программе общеобразовательной школы, только в профильных классах. Однако учебный план общеобразовательной школы предусматривает элективные курсы с целью углубления и расширения базового уровня программы и развития математического мышления учащихся.

Тема «Обратные тригонометрические функции» способствует:

- углублению знаний по тригонометрии;

- расширению понятия об элементарных функциях, их свойствах и графиках;

- углублению знаний учащихся о методах решения уравнений и неравенств;

- осуществлению подготовки учащихся к обучению в высшей школе.

При создании элективного курса по математике важно учитывать опыт проведения факультативных курсов в средней школе. Этой проблеме посвящено множество работ, авторами которых являются

Н.В. Амосов, Е.А. Ермак, И.И., Поздняков, Е.Е. Семенов, Т.И. Саламатова, И.Ф. Шарыгин, С.И. Шварцбурд и др. Так же были изучены учебно-методические комплексы по алгебре и началам анализа в средней школе Мордковича А.Г., Виленкина Н.Я. и др.

Цель исследования: создание элективного курса «Обратные тригонометрические функции» для учащихся средней общеобразовательной школы.

Объект исследования: тригонометрия.

Предмет исследования: обратные тригонометрические функции.

В соответствии с целью, объектом, предметом были намечены следующие **задачи исследования:**

- изучить психолого-педагогическую, методическую и учебную литературу по данной теме;
- систематизировать и обобщить учебный материал по обратным тригонометрическим функциям;
- изучить теоретические основы разработки элективных курсов;
- разработать учебную программу, содержание занятий, систему упражнений, а так же средства для текущего и итогового контроля элективного курса «Обратные тригонометрические функции».

Практическая значимость выполненной работы, заключается в том, что программа элективного курса может быть применена учителями школ, а также полезна для студентов – будущих учителей математики – как курс по выбору.

Структура работы: работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и четырех приложений.

Глава 1. Обратные функции

1.1. Понятие функции

Явление природы тесно связаны друг с другом. В большинстве случаев законы, управляющие взаимозависимостью явлений, весьма сложны из-за тесного переплетения различных факторов. Но среди громадного многообразия явлений ученые выделили такие, в которых взаимосвязь величин настолько тесна, что, зная значение одной из них, можно узнать значение другой величины. Простейшие примеры таких взаимозависимостей дает геометрия. Например, зная длину стороны квадрата или радиус круга, можно найти площадь этих фигур, зная длину стороны куба, можно вычислить его объем, и т. д.

Пусть X и Y - заданные множества.

<u>Определение.</u> Функцией f называют правило, которое каждому элементу $x \epsilon X$ ставит в соответствие единственный элемент $y \in Y$.

Например, если каждому положительному числу x поставить в соответствие число x^3 - объем куба с ребром x, то получим функцию f, для которой множества X и Y- множества положительных чисел.

Обычно x называют аргументом функции (или независимой переменной). Элемент $y_0 \in Y$, соответствующий фиксированному значению аргумента x_0, называют значением функции и обозначают через $f(x_0)$: $y_0 = f(x_0)$. При изменении аргумента x значение функции $y = f(x)$, как правило, также изменяются и поэтому y часто называют зависимой переменной.

Множество X называют областью определения функции f и обозначают *D(f)*.

Множество всех значений функции f, которое она принимает на элементах множества X, называют множеством значений функции f (или областью ее значений) и обозначают *E(f)*.

В рассмотренном примере значение *f(x)* равно x^3: $f(x) = x^3$. Областью определения *D(f)* этой функции является множество всех положительных чисел. Это же множество будет множеством ее значений *E(f)*.

В математике для функций используют различные обозначения. Их обозначают одним символом f или φ и говорят: «Рассмотрим функцию *f*» или «Рассмотрим функцию φ». Наряду с этим используют обозначение *f(x)* и говорят «Рассмотрим функцию *f(x)*». Например, если значения функции вычисляются с помощью выражения $x^2 + 1$, то мы будем говорить: «Рассмотрим функцию $x^2 + 1$ или «Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + 1$», или «Рассмотрим функцию $y = x^2 + 1$».

Понятие функции - это очень общее понятие, с которым мы встречаемся на каждом шагу, не всегда даже отдавая себе в этом отчет. Приведем примеры.

Пример 1. В качестве множества X и множества Y рассмотрим множество действительных чисел R.

Пусть κ - фиксированное положительное число. Каждому $x \in R$ поставим в соответствие число $f(x) = kx \in R$. Это известная прямая пропорциональная зависимость.

Пример 2. В качестве множества X рассмотрим множество слов русского языка, а в качестве множества Y - русский алфавит. Каждому слову русского языка $x \in X$ поставим в соответствие его первую букву $f(x) \in Y$. Именно так поступают при составлении словарей.

Пример 3. Пусть X - множество многоугольников на плоскости, $У$ - множество положительных действительных чисел. Каждому многоугольнику $x \in X$ поставим в соответствие число $f(x) \in Y$, равное его площади. [10]

1.2. Монотонные функции

Функция, график которой изображен на рис. 1, обладает тем свойством, что при увеличении значения аргумента x значения функции увеличиваются. Про такие функции говорят, что они возрастают. А значения функции, график которой изображен на рис. 2, уменьшаются при увеличении x. Эта функция убывает.

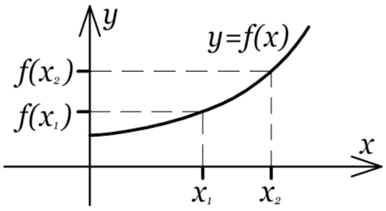


Рис.1.

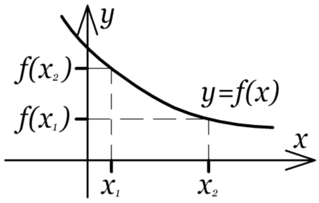


Рис.2.

Определение. Функцию f называют возрастающей (соответственно убывающей) на множестве X, если на этом множестве при увеличении аргумента увеличиваются (соответственно уменьшаются) значения функции.

Иными словами, функция f возрастает на множестве X, если из $x_1 \in X, x_2 \in X$ и $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$. Она убывает на этом множестве, если из $x_1 \in X, x_2 \in X$ и $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$.

Определение. Функции, возрастающие или убывающие на X, называют монотонными на X.

Примеры монотонных функций. Функции x, x^3, x^5- возрастающие. Функции $\left(\frac{1}{2}\right)^x, -x, -x^3$ - убывающие. Функции x^2, x^4, x^6 , рассматриваемое в интервале $-\infty < x < \infty$ не являются монотонными.

В самом деле, каждая из них убывает в промежутке $-\infty < x < 0$ и возрастает в промежутке $0 < x < \infty$ (рис.3)

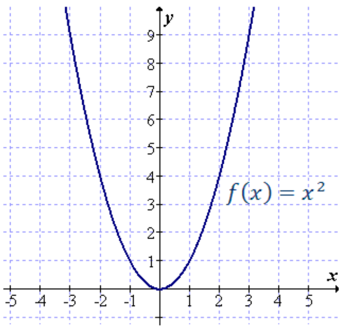


Рис. 3.

1.3. Обратная функция

Пусть функция $y = f(x)$ строго монотонная (возрастающая или убывающая) и непрерывная на области определения $x\epsilon(a, b)$, область значений этой функции $y \in (c, d)$, тогда на интервале (c, d) определена непрерывная строго монотонная функция $x = g(y)$ с областью значений (a, b), которая является обратной для $y = f(x)$ (обозначают символом f^{-1}).

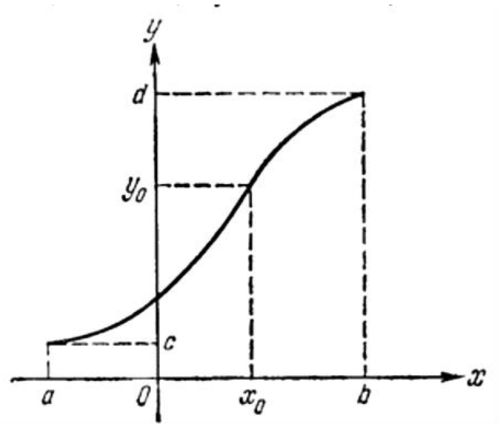


Рис.4

Если функция g является обратной к функции f, то функция g будет являться обратимой функцией. А функция f будет обратной к функции g. Обычно говорят, что две функции f и g взаимно обратные друг к другу.

Пусть $g=f^{-1}$. Тогда:

- D (g)=E(f),E(g)=D(f);
- для любого $x \in D$ $g(f(x)) = x,$ (1.1)
- для любого $x \in E$ $f(g(x)) = x;$ (1.2)
- графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.

На рисунке 5 представлены графики функций f и g взаимно обратных друг к другу.

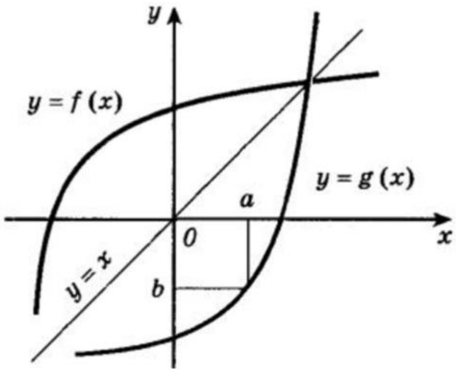


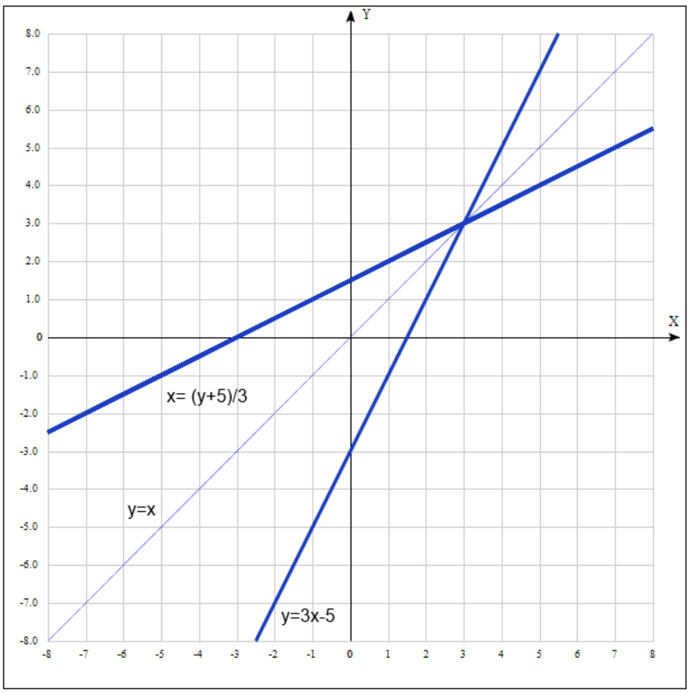
Рис.5

Рассмотрим несколько примеров нахождения обратных функций.

Пример 1. Пусть функция f ставит в соответствие к числу x число $3x-5$. Найдем функцию, обратную f.

Решение. Обозначим $f(x)$ через y. Тогда $y=3x-5$, и потому $x=\frac{y+5}{3}$. Значит, $f^{-1}(y)=\frac{y+5}{3}$.

Если функция f^{-1} обратна функции f, и $y=f(x)$, то $x=f^{-1}(y)$. Значит, если точка *M(x,y)* лежит на графике функции f то точка *N(y,x)* лежит на графике функции f^{-1}. Но эти две точки симметричны относительно прямой $y=x$. Отсюда получаем: графики функции f и f^{-1} симметричны относительно прямой $y=x$.



Пример 2. Найти функцию обратную для $y = 2 + \sqrt{-2x}$.

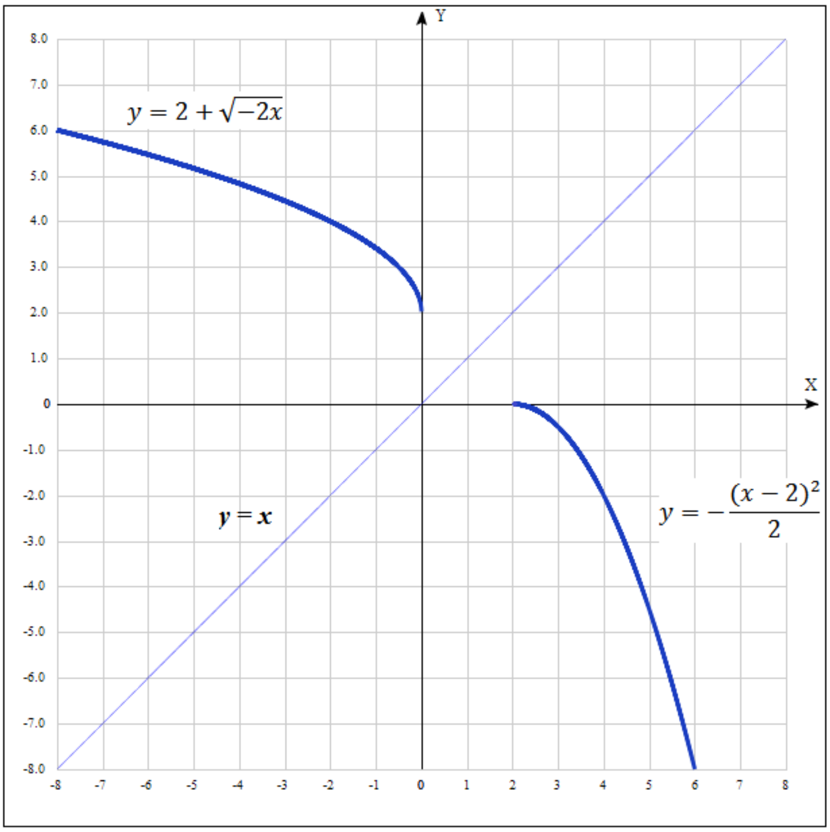
Решение. Областью определения *D(y)* этой функции является $x\epsilon(-\infty; 0]$ (т.к. $-2x \geq 0 \Longrightarrow x \leq 0$). Выразим x через y (другими словами, решим уравнение $y = 2 + \sqrt{-2x}$ относительно x).

$x = -\frac{(y-2)^2}{2}$- это и есть обратная функция, правда здесь *y* – аргумент, а *x* – функция этого аргумента. Чтобы не нарушать привычки в обозначениях (это не имеет принципиального значения), переставив буквы *x* и *y* , будем писать

$$y = -\frac{(x-2)^2}{2}$$

Таким образом, $x = -\frac{(y-2)^2}{2}$и $y = -\frac{(x-2)^2}{2}$- взаимно обратные функции.

Приведем графическую иллюстрацию взаимно обратных функций.



Глава 2. Определения обратных тригонометрических функций

Название обратные тригонометрические функции образуется от названия соответствующей ей тригонометрической функции добавляем приставку «арк-» (от латинского arcus - дуга). Это связано с тем, что геометрически значение обратной тригонометрической функции можно связать с длиной дуги единичной окружности (или углом, стягивающим эту дугу), соответствующей тому или иному отрезку.

2.1. Функция *y=arcsin x*

Как и другие arc-функции, функция $y = arcsinx$ наиболее естественно возникает при решении простейшего тригонометрического уравнения

$$sinx = a, \tag{2.1}$$

что, в свою очередь, сводится к нахождению точек пересечения графиков функций $y = sinx$ и $y = a$. Геометрически эта задача полностью решена на рис.6.

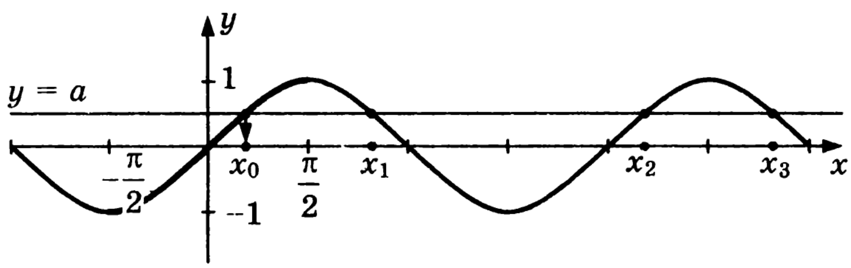


Рис. 6. Решение уравнения $sinx = a$

Из рис. 6 ясно, что при a > 1 или a < -1 уравнение (2.1) не имеет корней, а при -1<a<1 имеет бесконечно много корней, которые естественным образом могут быть занумерованы целыми числами.

Роль «центральной» ветви в случае синуса играет ветвь (часть графика), соответствующая $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На этом интервале функция $y = sinx$ монотонно возрастает от -1 до +1. Поэтому на этом отрезке всегда существует и притом только один корень уравнения (2.1), который мы обозначим x_0.

Если -1 < a < 1, корень уравнения (2.1) с номером n, где n — некоторое целое число, образуется от пересечения с горизонтальной прямой $y = a$ ветви графика $y = sinx$, соответствующей $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right], n \in Z$ (при четном n функция $y = sinx$ монотонно возрастает, а при нечетном — монотонно убывает).

Из периодичности функции $y = sinx$ ясно, что все корни x_n с четными номерами (когда $n = 2k$ для некоторого целого k) могут быть выражены через «центральный» корень x_0 по формуле

$$x_{2k} = x_0 + 2\pi k, k \in Z, \tag{2.2}$$

а корни x_n с нечетными номерами (когда $n = 2k + 1$ для некоторого целого k) могут быть выражены через корень x_1 по формуле

$$x_{2k+1} = x_1 + 2\pi k, k \in Z. \tag{2.3}$$

Далее, известное тригонометрическое тождество $sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ на геометрическом языке означает, что вертикальная прямая $x = \frac{\pi}{2}$ является осью симметрии графика функции $y = sinx$. Из этой симметрии синусоиды следует, что точка $\frac{\pi}{2}$ – середина отрезка $[x_0; x_1]$, т.е.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{x_0 + x_1}{2},$$

откуда $x_1 = \pi - x_0$. Это равенство позволяет переписать соотношение (2.3) в виде

$$x_{2k+1} = \pi - x_0 + 2\pi k = -x_0 + (2k + 1)\pi, k \in Z. \tag{2.4}$$

Формулы (2.2) и (2.4) полностью описывают множество корней уравнения $sinx = a$ (в случае |a|<1). Эти две формулы можно объединить и в одну формулу

$$x_n = (-1)^n x_0 + \pi n, n \in Z. \qquad (2.5)$$

«Центральный» корень x_0, через который выражаются все остальные корни уравнения (2.1), обозначается $arcsina$, что позволяет записать соотношение (2.5) в привычном виде:

$$x_n = (-1)^n arcsina + \pi n, n \in Z. \qquad (2.6)$$

В случае a = 1 из рис. 1 ясно, что $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. С другой стороны, т.к. $arcsin1 = \frac{\pi}{2}$, общие формулы (2.2) и (2.4) при a = 1 примут вид:

$$x_{2k} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$x_{2k+1} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Поэтому множества $\{x_{2k}\}_{k \in Z}$ и $\{x_{2k+1}\}_{k \in Z}$ будут одинаковыми и совпадут с множеством чисел, описываемым равенством $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Поэтому формулу (2.6) можно использовать и при a = 1. Однако важно понимать, что в этом случае каждый корень уравнения $sinx = a$ появится в ходе подсчетов два раза (например, число $\frac{\pi}{2}$ — можно получить по формуле (2.6) при $n = 0$ и $n = 1$), т.е. получит два номера.

В случае a = -1 из рис. 6 ясно, что$x_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. С другой стороны, т.к. $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, общие формулы (2.2) и (2.4) при a = -1 примут вид:

$$x_{2k} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$x_{2k+1} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi(k + 1).$$

Поэтому множества $\{x_{2k}\}_{k\in Z}$ и $\{x_{2k+1}\}_{k\in Z}$ будут одинаковыми и совпадут с множеством чисел, описываемым равенством $x_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Поэтому формулу (2.6) можно использовать и при а = -1. Однако, как и для a = 1, важно понимать, что в этом случае каждый корень уравнения $sinx = a$ появится в ходе подсчетов два раза (например, число $-\frac{\pi}{2}$ можно получить по формуле (2.6) при n=0 и n=-1), т.е. получит два номера.

Точное определение $arcsina$ выглядит следующим образом.

Определение 1. $arcsina$ *— это такое число х, что*

1. $sinx = a,$

2. $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$

Изложенная выше теория позволяет утверждать, что справедлива

Теорема. Число $arcsin\ a$ определено и притом однозначно тогда и только тогда, когда $a \in [-1; 1]$. [12]

Формальное алгебраическое определение $arcsin\ a$ можно проиллюстрировать с помощью рис. 7 (это просто фрагмент рис. 6).

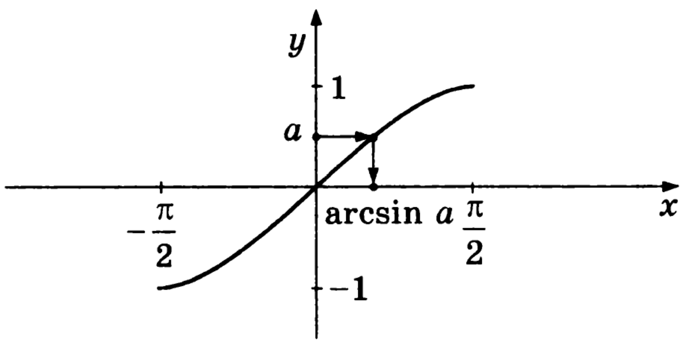


Рис. 7. Графическое определение $arcsin\ a$

Этот рисунок можно рассматривать и как другую форму записи определения 1 (на графическом языке), а не как его иллюстрацию.

Функцию $arcsin\ a$ можно иллюстрировать (а на самом деле геометрически и определять) с помощью тригонометрической окружности следующим образом (рис. 8).

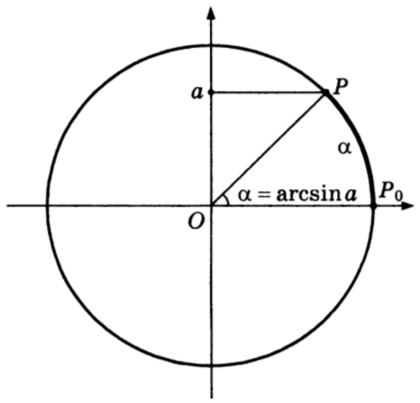


Рис. 8. Определение $arcsin\ a$ на тригонометрической окружности

Отметим на оси ординат точку а и проведем через нее прямую, параллельную оси абсцисс. Эта прямая пересечет правую половину тригонометрической окружности в некоторой точке Р.

Тогда $arcsin\ a$ — это величина угла POP_0, измеренного в радианах (с учетом знака). С равным успехом под $arcsin\ a$ можно понимать длину дуги P_0P.

Поскольку $arcsin\ a$ однозначно определен для любого $a \in [-1; 1]$, можно говорить о функции $y = arcsinx$, область определения которой — отрезок $[-1; 1]$.

В силу основного определения 1 равенство $y = arcsinx$ равносильно системе

$$\begin{cases} x = siny, \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Поэтому функция $y = arcsinx$ является обратной к сужению функции

$y = sin\,x$ на отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Соответственно, ее график получается из ветви (т.е. части) графика функции y=$sin\,x$, соответствующей $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, осевой симметрией относительно прямой $y = x$ (рис. 9).

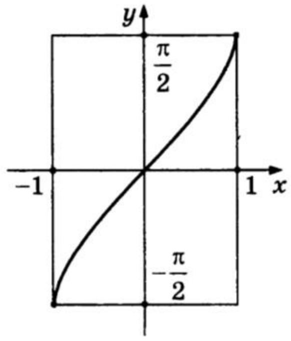


Рис. 9. График функции $y = arcsin\,x$

Однако часто удобнее представлять себе график функции $y = arcsin\,x$ по-другому, как центральную ветвь графика $y = sin\,x$, которую повернули на 90° и отобразили симметрично относительно оси ординат. Этот же результат можно получить, если повернуть лист бумаги, на котором изображен график функции $y = sin\,x$ так, чтобы ось y стала горизонтальной, а ось x — вертикальной, и посмотреть на рисунок с обратной стороны листа (тогда новая ось абсцисс будет направлена вправо).

При этом полезно помнить, что график функции $y = arcsin\,x$ расположен в прямоугольнике $-1 \le x \le 1, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ (этот прямоугольник изображен на рис. 9).

В зависимости от ситуации при решении задач, в которых фигурирует $arcsin\,x$, приходится использовать либо формально-алгебраическое определение 1, либо его графический вариант, представленный на рисунках 6, 7, либо геометрический вариант определения, представленный на рис. 8, либо график функции $y = arcsin\,x$, изображенный на рис. 9.

2.2. Функция *y=arccos x*

Как и другие arc-функции, функция $y = arccosx$ наиболее естественно возникает при решении простейшего тригонометрического уравнения

$$cosx = a, \qquad (2.8)$$

что, в свою очередь, сводится к нахождению точек пересечения графиков функций $y = cosx$ и $y = a$. Геометрически эта задача полностью решена на рис. 10.

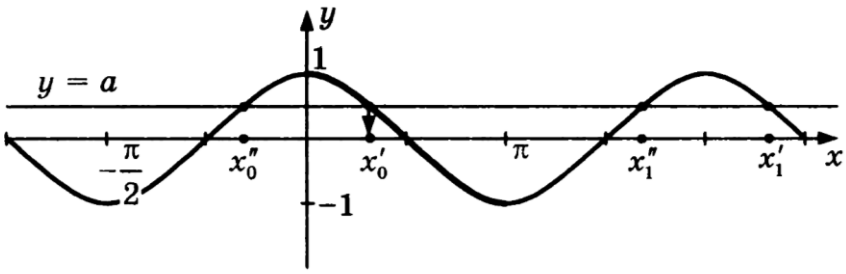


Рис. 10. Решение уравнения $cosx = a$

Из рис. 10 ясно, что при а > 1 или а < -1 уравнение (2.8) не имеет корней, а при -1<a<1 имеет бесконечно много корней. Если -1<a<1, то на каждом отрезке вида $[-\pi + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, где n — некоторое целое число, находятся ровно два корня (если a = 1, то эти корни совпадают), один слева от точки $2\pi n$, а другой — справа.

Правые и левые корни принято нумеровать независимо. Правый корень из пары, расположенной на отрезке $[-\pi + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, обозначают x_n' (на самом деле этот корень лежит на отрезке $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$). Левый корень из пары, расположенной на отрезке $[-\pi + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, обозначают x_n'' (на самом деле этот корень лежит на отрезке $[-\pi + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$).

На отрезках вида $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$ функция $y = cos\ x$ монотонно убывает от +1 до -1, а на отрезках вида $[-\pi + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$ — монотонно возрастает от -1 до +1.

Поэтому при $-1 \leq a \leq 1$ корни x_n', x_n'' всегда существуют и определены однозначно.

Из периодичности функции $y = cosx$ ясно, что все корни x_n' могут быть выражены через «центральный» корень x_n' по формуле

$$x_n' = x_0' + 2\pi n, n \in Z, \tag{2.9}$$

а корни x_n'' могут быть выражены через корень x_0'' по формуле

$$x_n'' = x_0'' + 2\pi n, n \in Z. \tag{2.10}$$

Далее, известное тригонометрическое тождество $\cos(-x) = cosx$ на геометрическом языке означает, что ось ординат является осью симметрии графика функции $y = cosx$. Из этой симметрии косинусоиды следует, что $x_0'' = -x_0'$. Это равенство позволяет переписать соотношение (2.10) в виде

$$x_n'' = -x_0'' + 2\pi n, n \in Z. \tag{2.11}$$

Формулы (2.9) и (2.11) полностью описывают множество корней уравнения $cosx = a$ (в случае |a|<1). Эти две формулы можно объединить и в одну формулу

$$x_n = \pm x_0 + 2\pi n, n \in Z, где\, x_0 = x_0'. \tag{2.12}$$

«Центральный» корень $x_0 = x_0'$, через который выражаются все остальные корни уравнения (2.8), обозначается $arccosa$, что позволяет записать соотношение (2.12) в привычном виде:

$$x_n = \pm arccosa + 2\pi n, n \in Z. \tag{2.13}$$

Если -1 < a < 1, то все корни, подсчитанные по формуле (2.13), или, что то же самое, по формулам (2.9) и (2.11), различны.

Если a = 1, то непосредственно из рис. 10 ясно, что множество корней описывается формулой $x_n = 2\pi n, n \in Z$.

С другой стороны, если a = 1, то $arccosa = x_0^{'} = 0$, так что формулы (2.9) и (2.11) примут вид:

$$x_n^{'} = -2\pi n,$$

$$x_n^{''} = 2\pi n,$$

т.е. два раза зададут тот же самый набор корней. Поэтому формулу (2.13) можно использовать и при a = 1. При этом важно понимать, что тогда каждый корень появится в ходе подсчетов два раза: один раз — как «правый» корень $x_n^{'}$, а второй раз — как «левый» корень $x_n^{''}$.

Если a = -1, то непосредственно из рис. 10 ясно, что множество корней описывается формулой

$$x_n = \pi + 2\pi n, n \in Z.$$

С другой стороны, если a = -1, то $arccosa = x_0^{'} = \pi$, так что формулы (2.9) и (2.11) примут вид:

$$x_n^{'} = \pi + 2\pi n,$$

$$x_n^{''} = -\pi + 2\pi n = \pi + 2\pi(n-1),$$

т.е. два раза зададут тот же самый набор корней. Поэтому формулу (2.13) можно использовать и при a = -1. При этом важно понимать, что тогда каждый корень появится в ходе подсчетов два раза: один раз — как «правый» корень $x_n^{'}$, а второй раз — как «левый» корень $x_{n+1}^{''}$.

Точное определение *arccos a* выглядит следующим образом.

Определение 2. *arccos a — это такое число x, что*

1. $cosx = a$,

2. $x \in [0; \pi]$.

Изложенная выше теория позволяет утверждать, что справедлива следующая теорема.

Теорема. *Число arccos a определено и притом однозначно тогда и только тогда, когда* $a \in [-1; 1]$. [12]

Формальное алгебраическое определение $arccosa$ можно проиллюстрировать с помощью рис. 11 (это просто фрагмент рис. 10).

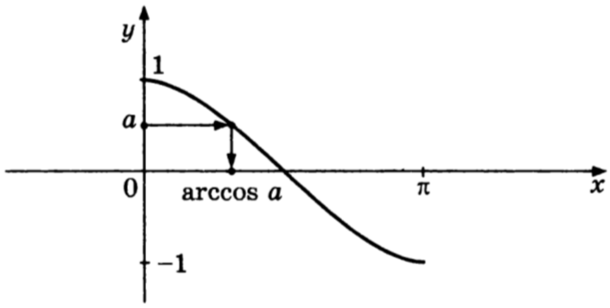


Рис. 11. Графическое определение $arccos\ a$

Этот рисунок можно рассматривать и как другую форму записи определения 2 (на графическом языке), а не как его иллюстрацию.

Функцию $arccosa$ можно иллюстрировать (а на самом деле геометрически и определять) с помощью тригонометрической окружности следующим образом (рис. 12).

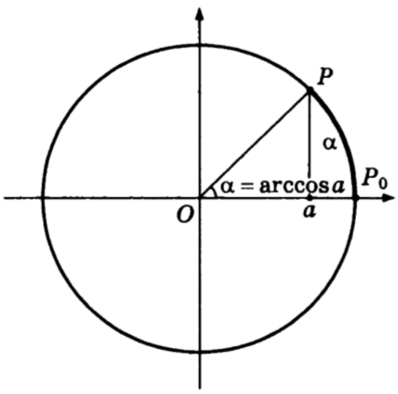


Рис. 12. Определение $arccos\ a$ на тригонометрической окружности

Отметим на оси абсцисс точку a и проведем прямую параллельно оси ординат. Эта прямая пересечет верхнюю половину тригонометрической окружности в некоторой точке P.

Тогда $arccos\ a$ — это величина угла POP_0, измеренного в радианах. С равным успехом под $arccos\ a$ можно понимать длину дуги P_0P. Поскольку $arccos\ a$ однозначно определен для любого $a \in [-1; 1]$, можно говорить о функции $y = arccos\ x$, область определения которой — отрезок [-1; 1].

В силу основного определения 2 равенство $y = arccos\ x$ равносильно системе

$$\begin{cases} x = cos y, \\ 0 \leq y \leq \pi. \end{cases} \tag{2.14}$$

Поэтому функция $y = arccos\ x$ является обратной к сужению функции $y = cos\ x$ на отрезок $[0; \pi]$. Соответственно, ее график получается из ветви графика функции $y = cos\ x$, соответствующей $x \in [0; \pi]$, осевой симметрией относительно прямой $y = x$ (рис. 13).

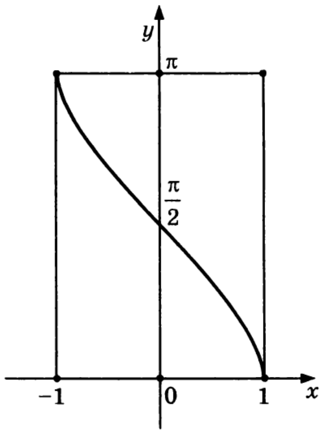


Рис. 13. График функции $y = arccos\ x$

Однако часто удобнее представлять себе график функции $y = arccos\ x$ по-другому, как центральную ветвь графика $y = cos\ x$, которую повернули на 90° и отобразили симметрично относительно оси ординат. Этот же результат можно получить, если повернуть лист бумаги, на котором изображен график функции $y = cos\ x$ так, чтобы ось y стала горизонтальной, а ось x — вертикальной, и посмотреть на рисунок с обратной стороны листа (тогда новая ось абсцисс будет направлена вправо).

При этом полезно помнить, что график функции $y = arccos\ x$ расположен в прямоугольнике $-1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \pi$ (этот прямоугольник изображен на рис. 13).

В зависимости от ситуации при решении задач, в которых фигурирует $arccos\ x$, приходится использовать либо формально-алгебраическое определение 2, либо его графический вариант, представленный на рисунках 10, 11, либо геометрический вариант определения, представленный на рис. 12, либо график функции $y = arccos\ x$, изображенный на рис. 13.

2.3. Определение функции *y=arctg x*

Как и другие обратные тригонометрические функции, функция $y = arctgx$ наиболее естественно возникает при решении простейшего тригонометрического уравнения

$$tgx = a. \tag{2.15}$$

Чтобы решить уравнение (2.15), рассмотрим систему

$$\begin{cases} y = tgx, \\ y = a. \end{cases} \tag{2.16}$$

Эта система равносильна уравнению (2.15) в том смысле, что если x_0 — корень уравнения (2.15), то пара(x_0, tgx_0) - решение системы (2.16), а если пара(x_0, y_0) — решение системы (2.16), то x_0 — корень уравнения (2.15), а $y_0 = tgx_0$. Иначе говоря, между множеством корней уравнения (2.15) и множеством решений системы (2.16) имеется простое взаимно-однозначное соответствие.

Будем решать систему (2.16) графически. Для этого нарисуем на координатной плоскости линии, задаваемые уравнениями $y = tg\ x$ (это просто график функции $y = tg\ x$) и $y = a$ (это горизонтальная прямая, проведенная на высоте а). Точки пересечения этих линий являются решениями системы (2.16), а проекции этих точек на ось абсцисс — корнями уравнения (2.15). Эти построения проведены на рис. 14.

В сущности, рис. 14 уже содержит ответ задачи (2.15) в геометрической форме, т.к. на этом рисунке явно изображено множество корней уравнения (2.15). Однако, поскольку исходная задача была сформулирована на алгебраическом языке («решить уравнение»), следует перевести полученный ответ с геометрического языка на алгебраический.

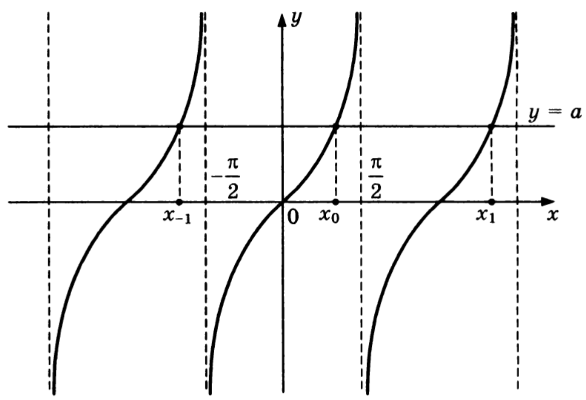


Рис. 14. Решение уравнения $tg\ x = a$

Для этого, прежде всего, перенумеруем корни:

1) «центральный» корень, который расположен на интервале$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, обозначим x_0; поскольку на этом интервале функция $y = tg\ x$ монотонно возрастает от -∞ до +∞, этот корень всегда существует и единственен;

2) корни, расположенные справа от «центрального», последовательно обозначим x_1, x_2, ..., а корням, расположенным слева от «центрального», присвоим номера -1, -2, ... Таким образом, корень с номером n, где n —

некоторое целое число, образуется от пересечения горизонтальной прямой $y = a$ и ветви графика $y = tg\, x$, соответствующей $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$.

Поскольку на этом интервале функция $y = tg\, x$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, этот корень всегда существует и притом только один.

Из рис. 2.15 ясно, что расстояние между соседними корнями равно π (т.к. ровно на π отстоят друг от друга ветви графика $y = tg\, x$, от пересечения с которыми горизонтальной прямой $y = a$ образуются эти корни):

$$x_n - x_{n-1} = \pi, n \in Z.$$

Это равенство влечет справедливость бесконечной совокупности обычных числовых равенств (мы включили в их число и тривиальное равенство $x_0 = x_0 + 0 \cdot \pi$):

$$\begin{aligned}
&x_0 = x_0 + 0 \cdot \pi,\\
&x_1 = x_0 + 1 \cdot \pi,\\
&x_2 = x_1 + \pi = x_0 + 2\pi,\\
&x_3 = x_2 + \pi = x_0 + 3\pi, \qquad (2.17)\\
&\qquad \ldots\\
&x_{-1} = x_0 - \pi = x_0 + (-1) \cdot \pi,\\
&x_{-2} = x_{-1} - \pi = x_0 - 2\pi = x_0 + (-2) \cdot \pi,\\
&\qquad \ldots
\end{aligned}$$

Бесконечную совокупность числовых равенств (2.17) можно задать одной условной формулой. Для этого отметим, что в левых частях уравнений (2.17) стоят перенумерованные корни уравнения (2.15). Правые части утверждают, что для получения корня x_n с номером $n \in Z$ нужно сложить два числа:

1. Первое слагаемое — это «центральный» корень x_0;

2. Второе слагаемое — это число, кратное π, причем коэффициент, на который нужно умножить $\pi,$ — в точности номер корня.

Поэтому вместо бесконечной совокупности формул(2.17) можно использовать одну формулу

$$x_n = x_0 + \pi n, n \in Z. \tag{2.18}$$

«Центральный» корень x_0, через который выражаются все остальные корни уравнения (2.15), играет тем самым особую роль, и поэтому математики ввели для него особое обозначение: *arctg a*. С учетом этого обозначения соотношение (2.18) примет привычный вид:

$$x_n = arctga + \pi n, n \in Z. \tag{2.19}$$

Поскольку наша цель — изучение обратных тригонометрических функций, сформулируем определение *arctg a* более четко.

Определение 3. *arctg a — это такое число x, что*

1. tg x = a;

2. $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.[12]

Первая часть этого определения говорит, что *arctg a* — корень уравнения *tg x = a*; вторая означает, что *arctg a* — «центральный» корень.

Изложенная выше теория позволяет утверждать, что справедлива теорема.

Теорема. *Число arctga определено и притом однозначно при любом* $a \in R$. [12]

Формальное алгебраическое определение *arctg a* можно проиллюстрировать с помощью рис. 15 (это просто фрагмент рис. 14).

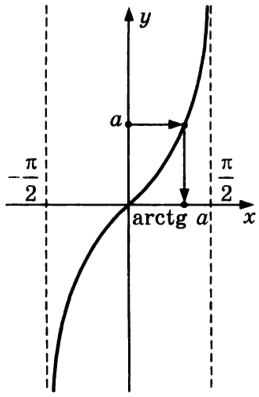


Рис. 15. Графическое определение *arctg a*

Этот рисунок можно рассматривать и как другую форму записи определения 3 (на графическом языке), а не как его иллюстрацию.

Рисунки 14, 15 и аналогичные рисунки для *arcctg a*, *arcsin a, arccos a* являются основой графического метода решения разнообразных задач на обратные тригонометрические функции.

В качестве примера вычислим *arctg (tg 7).*

Для этого на координатной плоскости (рис. 16) последовательно изобразим:

1. число 7 — это точка на оси абсцисс, расположенная между точками 2π и $\frac{5\pi}{2}$ (неравенство $2\pi < 7 < \frac{5\pi}{2}$ равносильно неравенству $2{,}8 < \pi < 3{,}5$, которое истинно);

2. число *tg 7* — это высота «столбика» под графиком функции $y = tg\ x$, который «торчит» из точки 7 на оси абсцисс.

Чтобы найти *arctg(tg 7)* в соответствии с рис. 14 или рис. 15, нужно провести горизонтальную прямую на высоте tg 7 до пересечения с «центральной» ветвью графика $y = tgx$, т.е. ветвью соответствующей $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и спроектировать полученную точку пересечения на ось абсцисс. Все это проделано на рис. 16.

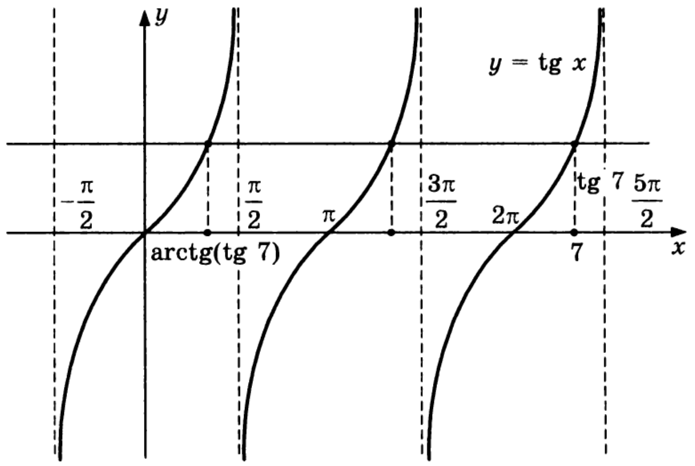


Рис. 16. Вычисление числа *arctg(tg 7)*

Из рис. 16 ясно, что число 7 является корнем уравнения $tg\ x = tg\ 7$ под номером 2 (вспомним рис. 14). Как мы установили (см. равенства (2.17) или (2.18)), $x_2 = x_0 + 2\pi$. В нашей ситуации это означает, что

7 = $arctg(tg7)$ + 2 π, т.е. $arctg(tg7)$= 7- 2π.

Этот результат можно получить и без ссылки на равенства (2.17) или (2.18), если на рис. 16 отметить очевидное равенство длин отрезков

[0; $arctg(tg7)$] и [2 π; 7], что означает справедливость равенства $arctg(tg7) - 0 = 7 - 2\pi \Leftrightarrow arctg(tg7) = 7 - 2\pi$.

Функцию *arctga* можно иллюстрировать (а на самом деле геометрически и определять) с помощью тригонометрической окружности следующим образом (рис. 17).

Отметим на оси тангенсов точку *a* и соединим ее с началом координат *O*. Отрезок *Oa* пересечет правую половину тригонометрической окружности в некоторой точке P.

Тогда *arctg a* — это величина угла POP_0, измеренного в радианах, с учетом знака (т.е. при $a < O$ обычная геометрическая мера угла POP_0, которая положительна, равна - *arctg a*).

С равным успехом под *arctga* можно понимать длину дуги P_0 P (с учетом знака). Этот факт объясняет сам термин *arctg* — «дуга тангенса» (arc — дуга; вспомните русское слово «арка»).

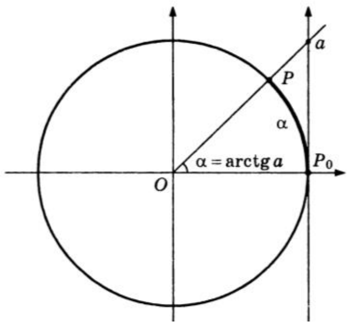


Рис. 17. Геометрическое определение *arctg a* на тригонометрической окружности

Поскольку *arctg a* однозначно определен для любого $a \in R$, можно говорить о функции $y = arctg\, x$, область определения которой — вся числовая прямая.

В силу основного определения 3 равенство y = arctg x равносильно системе

$$\begin{cases} x = tgy, \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \qquad (2.20)$$

Поэтому функция $y = arctg\, x$ является обратной к сужению функции $y = tg\, x$ на интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Соответственно, ее график получается из ветви графика функции $y = tg\, x$, соответствующей $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, осевой симметрией относительно прямой $y = x$ (рис. 18).

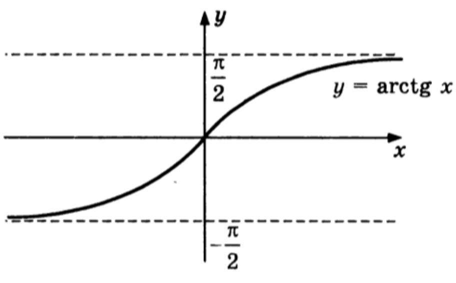


Рис. 18. График функции $y = arctg\, x$

Однако часто удобнее представлять себе график функции $y = arctg\ x$ по-другому, как центральную ветвь графика $y = tg\ x$, которую повернули на 90° и отобразили симметрично относительно оси абсцисс (или оси ординат).

Действительно, система (2.20) говорит, что для построения графика $y = arctg\ x$ нужно

1. Нарисовать график зависимости $x = tg\ y$. Это можно сделать, повернув лист бумаги так, чтобы ось y-в стала горизонтальной, как это обычно имеет место для оси, на которой меняется независимая переменная (для полноты соответствия обычной ситуации нужно смотреть на лист бумаги с обратной стороны, чтобы ось y-в была направлена вправо);

2. Взять часть этого графика, соответствующую $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

В зависимости от ситуации при решении задач, в которых фигурирует *arctg x*, приходится использовать либо формально-алгебраическое определение 3, либо его графический вариант, представленный на рисунках 14, 15, либо геометрический вариант определения, представленный на рис. 17, либо график функции $y = arctg\ x$, изображенный на рис. 18.

2.4. Определение функции *y=arcctg x*

Теория функции $y = arcctg\ x$ практически дословно повторяет теорию функции $y = arctg\ x$.

Как и *arctg x*, функция $y = arcctg\ x$ наиболее естественно возникает при решении простейшего тригонометрического уравнения

$$ctg\ x = a, \qquad (2.21)$$

что, в свою очередь, сводится к нахождению точек пересечения графиков функций $y = ctg\ x$ и $y = a$. Геометрически эта задача полностью решена на рис. 19.

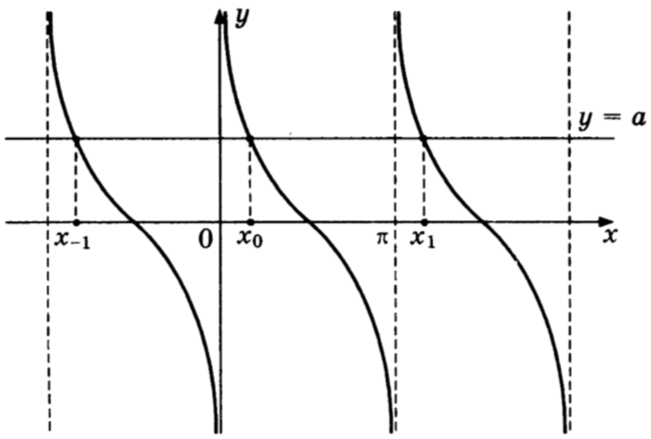


Рис. 19. Решение уравнения *ctg x = a*

Роль «центральной» ветви в случае котангенса играет ветвь, соответствующая $x \in (0;\pi)$. На этом интервале функция $y = ctg\ x$ монотонно убывает от-∞ до +∞. Поэтому на этом интервале всегда существует и притом один корень уравнения (рис. 19), который мы обозначим x_0.

Остальные корни естественным образом могут быть занумерованы целыми числами: корень с номером n, где n — некоторое целое число, образуется от пересечения горизонтальной прямой $y = a$ и ветви графика $y = ctg\ x$, соответствующей $x \in (\pi n; \pi(n+1))$. При этом все корни могут быть выражены через «центральный» по формуле

$$x_n = x_0 + \pi n, n \in Z. \quad (2.22)$$

«Центральный» корень x_0, через который выражаются все остальные корни уравнения (2.21), обозначается *arcctg a*, что позволяет записать соотношение (2.22) в привычном виде:

$$x_n = arcctga + \pi n, n \in Z. \quad (2.23)$$

Точное определение arcctg a выглядит следующим образом.

Определение 4. *arcctg a — это такое число x, что*

1. ctg x = a;

2. $x \in (0;\pi)$. [12]

Изложенная выше теория позволяет утверждать, что справедлива

Теорема. *Число arcctg a определено и притом однозначно при любом* $a \in R$.[12]

Формальное алгебраическое определение *arcctg a* можно проиллюстрировать с помощью рис. 20 (это просто фрагмент рис. 19).

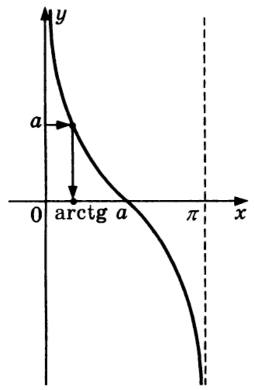


Рис. 20. Графическое определение *arcctg a*

Этот рисунок можно рассматривать и как другую форму записи определения 4 (на графическом языке), а не как его иллюстрацию.

Функцию *arcctg a* можно иллюстрировать (а на самом деле геометрически и определять) с помощью тригонометрической окружности следующим образом (рис. 21).

Отметим на оси котангенсов точку *a* и соединим ее с началом координат *O*. Отрезок *Oa* пересечет верхнюю половину тригонометрической окружности в некоторой точке P.

Тогда *arcctg a* — это величина угла POP_0, измеренного в радианах.

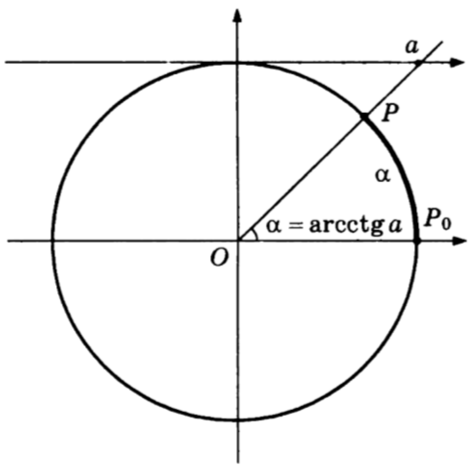


Рис. 21. Геометрическое определение *arcctg a* на тригонометрической окружности

С равным успехом под *arcctg a* можно понимать длину дуги P_0 P.

Поскольку *arcctg a* однозначно определен для любого $a \in R$, можно говорить о функции y = *arcctg x*, область определения которой — вся числовая прямая.

В силу основного определения 4 равенство y = *arcctg x* равносильно системе

$$\begin{cases} x = ctgy, \\ 0 < y < \pi. \end{cases} \tag{2.24}$$

Поэтому функция y = *arcctg x* является обратной к сужению функции y = *ctg x* на интервал (0; π). Соответственно, ее график получается из ветви графика функции y = *ctgx*, соответствующей $x \in (0; \pi)$, осевой симметрией относительно прямой $y = x$ (рис. 22).

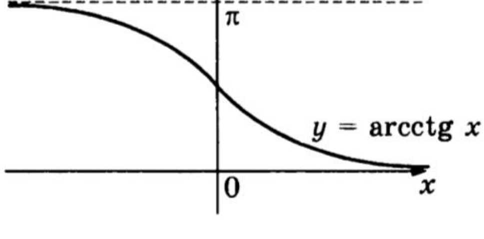


Рис. 22. График функции y = *arcctg x*

Однако часто удобнее представлять себе график функции $y = arcctg\ x$ по-другому, как центральную ветвь графика $y = ctg\ x$, которую повернули на 90° и отобразили симметрично относительно оси ординат. Этот же результат можно получить, если повернуть лист бумаги, на котором изображен график функции $y = ctg\ x$ так, чтобы ось y стала горизонтальной, а ось x — вертикальной, и посмотреть на рисунок с обратной стороны листа (тогда новая ось абсцисс будет направлена вправо).

В зависимости от ситуации при решении задач, в которых фигурирует $arcctg\ x$, приходится использовать либо формально-алгебраическое определение 4, либо его графический вариант, представленный на рисунках 19, 20, либо геометрический вариант определения, представленный на рис. 21, либо график функции $y = arcctg\ x$, изображенный на рис. 22.

Глава 3. Элективный курс «Обратные тригонометрические функции»

3.1. Элективные курсы в обучении

Элективные курсы играют большую роль в системе обучения на старшей ступени школы. Элективные курсы – обязательны для старшеклассников.

Целью изучения курсов является ориентация на социализацию и индивидуализацию обучения и учащихся, на вступление к ответственному выбору сферы будущей профессии.

Выделяют следующие типы курсов.

I. Предметные курсы. Их задача – расширение и углубление знаний по тем предметам, которые входят в базисный учебный план школы.

Предметные элективные курсы делятся на подгруппы:

- курсы повышенного уровня;

- курсы, в которых более широко рассмотрены части раздела базового курса;

- прикладные курсы, цель – ознакомление с методами и их направлением в практике, повышение интереса учеников к инновационному производству;

- курсы, в которых углубленно изучаются отдельные разделы основного курса, входящие в обязательную программу данного предмета

- курсы, в которых рассказывается об истории предмета;

- курсы, которые изучают методы решения задач - биологические математические, химические и др., а так же их составлению.

II. Межпредметные курсы, их цель – развитие связей учащихся о природе и обществе.

III. Курсы по предметам, которые не входят в базисный учебный план [4].

Курсы обычно добровольно выбираются учениками, поэтому они соответствуют их целям и мотивам обучения при выборе элективного курса.

При разработке элективных курсов следует учитывать основные мотивы выбора:

- подготовка к сдаче ЕГЭ;
- шансы успешной карьеры;
- заинтересованность;
- поддержка изучения базовых курсов;
- интеграция представлений в целостную картину мира. [14]

Из вышеизложенного можно сделать вывод, что математика занимает важное место, поэтому многие учителя заинтересованы в внедрении элективных курсов по математике.

Мы предполагаем, что достаточно большое количество преподавателей, с удовольствием будут использовать элективные курсы для закрепления программы, а так же для расширения знаний по данному предмету.

Математики развивается на решении различных по степени важности и трудности предполагаемых задач. Очевидно, что взяв какую-либо теорему, можно рассматривать как задачу, а ее доказательство – как решение этой задачи. Учащийся должен получать радость от хорошо продуманной и решенной задачи. Одна из целей обучения - ознакомление учеников с предметом как с общекультурной ценностью, формирование понимания того, что математика - инструмент познания окружающего мира, а также и самого себя.

Обучение, а именно ее методика на курсах, мы думаем развивает у учеников самообразование, а также формирует ум .

Одна из целей обучения - развитие уважения к учебной книге. При изучении программы курса нужно дать ученикам возможность использования учебников, задачников, энциклопедий и т.д. Обязательно нужно внедрять инновационные технологии - глобальная сеть Интернет, электронные книги, презентации, программы (учебные CD диски).

Таким образом, мы рассмотрели общие положения по созданию и проведению элективных курсов, которые будут учтены при разработке элективного курса «Обратные тригонометрические функции».

3.2. Программа элективного курса

Пояснительная записка.

Актуальность: в школьном курсе математики изучается ограниченное число элементарных функций. Их можно дополнить обратными тригонометрическими функциями. Методика решения задач, связанная с уравнениями и неравенствами, содержащими обратные тригонометрические функции, не излагается практически ни в одном учебнике, даже в учебниках, предназначенных для углубленного изучения математики. Функции, их свойства и графики, уравнения, неравенства с аркфункциями очень интересны и разнообразны, способствуют развитию математической культуры учащихся.

Данный элективный курс направлен на более глубокое понимание и осознание математических методов познания действительности, на развитие математического мышления учащихся, устной и письменной математической речи. На занятиях решаются нестандартные задачи, для которых в курсе математики не имеется общих правил, определяющих точный алгоритм их решения. Учащиеся учатся находить и применять различные методы для решения задач.

Цель элективного курса: повышение математической культуры учащихся в рамках школьной программы по математике; углубление и расширение содержания базового курса, изучаемого на минимальном общеобразовательном уровне. Дополнительная подготовка учащихся к экзамену по математике.

Задачи данного спецкурса: дополнение и углубление базового предметного образования; компенсация недостатков обучения учащихся; психолого-педагогическая поддержка учащихся при подготовке их к решению задач группы «С» ЕГЭ.

Требования к уровню усвоения курса.

В результате изучения программы учащиеся должны

знать: определения, свойства и графики аркфункций; основные тождества и операции над обратными тригонометрическими функциями;

уметь: выполнять построения графиков обратных тригонометрических функций; применять теорию к преобразованию выражений с аркфункциями; решать уравнения и неравенства с аркфункциями;

владеть: методами исследования свойств обратных тригонометрических функций; различными методами решения уравнений и неравенств с аркфункциями.

Программа курса

(Всего 14 часов)

Пункт	**Содержание**	**Кол-во часов**
1.	Определение, свойства и графики аркфункций	4
2.	Операции над обратными тригонометрическими функциями.	2
3.	Обратные тригонометрические операции над тригонометрическими функциями.	2
4.	Уравнения и неравенства с аркфункциями	4
5.	Зачетная работа.	2
	ВСЕГО:	14

I занятие (рассчитано на 2 часа).

Тема: Определение, свойства и графики аркфункций.

Цель: сформировать представление учащихся об обратных тригонометрических функциях, их графиках и свойствах.

1. Функция $y = arcsinx.$

Если каждому действительному числу x из отрезка [-1;1] поставлено в соответствие число $arcsinx$, то говорят, что этим определена функция

$$y = arcsinx. \tag{3.1}$$

Перечислим свойства функции (3.1):

1^0 Область определения функции y=$arcsinx$: $x \epsilon$[-1;1].

2^0 Область изменения значений функции y=$arcsinx$: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3^0 Функция y=$arcsinx$ – нечетная, т.е. y=$arcsin(-x)$=$-arcsinx$.

4^0 Функция y=$arcsinx$, где $-1 \le x \le 1$, имеет единственный корень $x = 0$.

5^0 Если $-1 \le x < 0$, то $arcsinx < 0$;

если $0 < x \le 1$, то $arcsinx > 0$;

если $x = 0$, то $arcsinx = 0$.

6^0 Функция y=$arcsinx$ монотонна: при возрастании аргумента x от -1 до 1 значение функции возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$.

7^0 Функция непрерывная.

Покажем справедливость этих свойств.

Свойства 1^0 – 2^0 вытекают из определения арксинуса числа.

Свойство 3^0 вытекает из следующего свойства арксинуса числа:

$$\arcsin(-a) = -arcsina.$$

Для того чтобы показать справедливость свойства 4^0 – 7^0, рассмотрим функцию

$$y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \tag{3.2}$$

которая непрерывна и возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. У этой функции есть обратная к ней функция. Выразив из формулы (3.2) x через y, получим функцию x от y:

$$x = arc\sin y, y \in [-1; 1]. \tag{3.3}$$

Заменив в формуле (3.3) y на x, а x на y, получим функцию

$$y = arc\sin x, x \in [-1; 1], \tag{3.4}$$

которая и есть функция, обратная к функции (3.2). Функция (3.4) непрерывна и возрастает на отрезке $[-1; 1]$. Значение $y = 0$ она принимает лишь при $x=0$.

Для построения графика функции (3.1) построим в системе координат xOy график функции $x = \sin y, y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, он и будет графиком функции (3.1). График функции (3.1) изображен на рис.1.

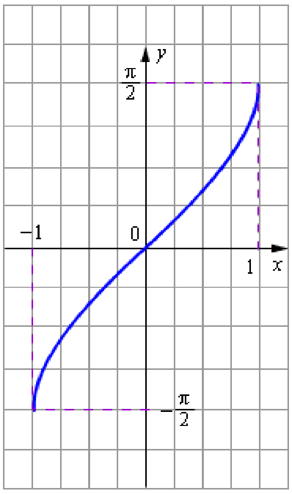


Рис. 1. График функции $y = arcsin\ x$

Рассмотрим примеры.

1. Найти $\alpha = arcsin\frac{1}{2}$. Сформулируем данный пример по-другому: найти такой

аргумент α, который лежит в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, синус которого равен $\frac{1}{2}$.

Решение. Существует бесчисленное множество аргументов, синус которых равен $\frac{1}{2}$, например: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \frac{-7\pi}{6}$ и т.д. Но нас интересует только тот аргумент, который находится на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Таким аргументом будет $\frac{\pi}{6}$. Итак, $arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

2. Найти $\alpha = arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Решение. Рассуждая так же, как и в предыдущем примере, получим

$arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$

Можно предложить учащимся устные упражнения:

1) Найдите значение выражения:

а) $\arcsin 0$; б) $arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ в) $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$

г) $\arcsin 1$ д) $\arcsin(-1)$ е) $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$

2) Имеют ли смысл выражения:

а) $arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$ б) $\arcsin 1{,}5$ в) $arcsin\left(3-\sqrt{20}\right)$

3) Расположите в порядке возрастания:

а) $arcsin\frac{\pi}{6}$, $\arcsin(-0{,}3)$, $\arcsin 0{,}9$;

б) $\arcsin(-0{,}5)$, $\arcsin(-0{,}7)$, $\arcsin\frac{\pi}{8}$.

2. Функция $y = arccosx$.

Если каждому действительному числу x из отрезка [-1;1] поставлено в соответствие число $arccosx$, то говорят, что этим определена функция

$$y = arccosx. \tag{3.5}$$

Перечислим свойства функции (3.5):

1^0. Область определения функции $y = arccosx$: $x\epsilon[-1;1]$.

2^0. Область изменения значений функции $y = arccosx$: $[0;\pi]$.

3^0. Величины $y = \arccos(-x)$ и $arccosx$ связаны соотношением $\arccos(-x) = \pi - arccosx$.

4^0. Функция $y = arccosx$ имеет единственный корень $x=1$.

5^0. Функция $y = arccosx$ отрицательных значений не принимает.

6^0. Функция $y = arccosx$ монотонна: при возрастании аргумента x от -1 до +1 значения функции убывают от π до 0.

7^0 Функция непрерывная.

Справедливость этих свойств показывается так же, как и для функции y = *arcsin x*. График функции (3.5) изображен на рис.2.

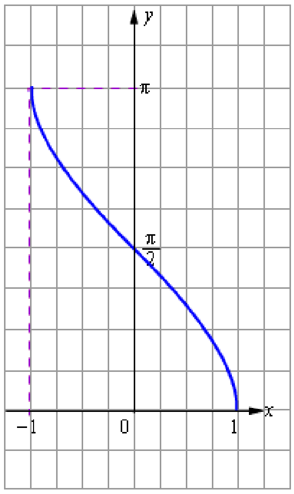


Рис. 2. График функции y = *arccos x*

<u>Рассмотрим примеры.</u>

1. Найти $\alpha = arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Сформулируем данный пример по-другому: найти такой

аргумент α, который лежит в пределах от 0 до π, косинус которого равен $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

<u>Решение.</u> Существует бесчисленное множество аргументов, косинус которых равен $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, например: $\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{-5\pi}{6} \frac{-7\pi}{6}$ и т.д. Но нас интересует только тот аргумент, который находится на отрезке $[0;\ \pi]$. Таким аргументом будет $\frac{5\pi}{6}$. Итак, $arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$.

2. Найти $\alpha = arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

<u>Решение.</u> Рассуждая так же, как и в предыдущем примере, получим

$$arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Можно предложить учащимся <u>устные упражнения</u>:

1) Найдите значение выражения:

а) $\arccos 0$; б) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ в) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$

г) $\arccos 1$ д) $\arccos(-1)$ е) $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$

2) Имеют ли смысл выражения:

а) $arccos\sqrt{5}$ б) $arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$ в) $arccos\,\pi$ г) $\arccos(-\sqrt{3})$.

3) Расположите в порядке возрастания:

а) $arccos\,0{,}4$; $arccos(-0{,}2)$, $arccos(-0{,}8)$;

а) $arccos\ 0{,}9$, $arccos(-0{,}6)$, $arccos\frac{\pi}{5}$.

3. Функция $y = arctgx$.

Если каждому действительному числу x из интервала $(-\infty; +\infty)$ поставлено в соответствие число $arctgx$, то говорят, что этим определена функция

$$y = arctgx. \tag{3.6}$$

Перечислим свойства функции (3.6):

1^0. Область определения функции $y = arctgx$: $x\epsilon\boldsymbol{R}$.

2^0.Область изменения значений функции $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

3^0. Функция $y = arctgx$ – нечетная, т.е. $arctg(-x) = -arctgx$.

4^0. Функция $y = arctgx$ имеет единственный корень $x = 0$.

5^0. Если $-\infty < x < 0$, то $arctgx < 0$;

если $0 < x < +\infty$, то $arctgx > 0$;

если $x = 0$, то $arctgx = 0$.

6^0. Функция $y = arctgx$ монотонна: при возрастании аргумента от $-\infty$ до $+\infty$ значения функции возрастают от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$.

7^0 Функция непрерывная.

Справедливость этих свойств доказывается аналогично доказательству свойств функции *y = arcsin x*. Для построения графика функции (3.6) построим в системе координат *xOy* график функции $x = tgy, y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, он и будет графиком функции (3.6)

График функции (3.6) изображен на рис.3.

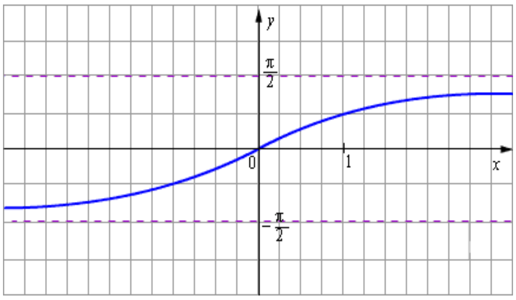


Рис. 3. График функции $y = arctgx$

Рассмотрим примеры.

1. Найти $\alpha = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Сформулируем данный пример по-другому: найти такой аргумент α, который лежит в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, тангенс которого равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. Существует бесчисленное множество аргументов, косинус которых равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$, например: $\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{-5\pi}{6}$ и т.д. Но нас интересует только тот аргумент, который находится в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Таким аргументом будет $\frac{\pi}{6}$. Итак, $arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$.

2. Найти $\alpha = arctg(-1)$.

Решение. Рассуждая так же, как и в предыдущем примере, получим $arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Можно предложить учащимся устные упражнения:

1) Найдите значение выражения:

а) $\mathrm{arc}tg(-1)$; б) $\mathrm{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{3})$

в) $\mathrm{arctg}\,0$ г) $\mathrm{arctg}(\sqrt{3})$.

2) Расположите в порядке возрастания:

а) $arctg\,100$; $arctg(-5)$, $arctg(0{,}7)$;

а) $arctg\,(-95)$, $arctg(3{,}4)$, $arctg\,17$.

4. Функция $y = arcctgx$.

Если каждому действительному числу x из интервала $(-\infty; +\infty)$ поставлено в соответствие число $arcctgx$, то говорят, что этим определена функция

$$y = arcctgx. \tag{3.7}$$

Перечислим свойства функции (3.7):

1^0. Область определения функции $y = arcctgx$: $x\epsilon\boldsymbol{R}$.

2^0. Область изменения значений функции: $0 < y < \pi$.

3^0. Величины $arcctgx$ и $y = arcctg(-x)$ связаны соотношением $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$.

4^0. Функция $y = arcctgx$ корней не имеет.

5^0. Функция $y = arcctgx$ отрицательных значений не принимает.

6^0. Функция $y = arcctgx$ монотонна: при возрастании x от $-\infty$ до $+\infty$ значения функции убывают от π до 0.

7^0 Функция непрерывная.

Справедливость этих свойств доказывается аналогично доказательству свойств функции $y = arcsin\ x$. Для построения графика функции (3.7) построим в системе координат xOy график функции $x = ctgy, y \in (0;\pi)$, он и будет графиком функции (3.7)

График функции (3.7) изображен на рис.4.

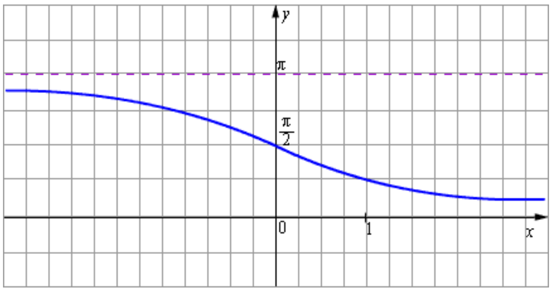


Рис. 4. График функции $y = arcctgx$

Рассмотрим примеры.

1. Найти $\alpha = arcctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Сформулируем данный пример по-другому: найти такой

аргумент α, который лежит в пределах от 0 до π, котангенс которого равен $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение. Существует бесчисленное множество аргументов, косинус которых равен $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, например: $\frac{-\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{-7\pi}{6}$ и т.д. Но нас интересует только тот аргумент, который находится в интервале $(0;\ \pi)$. Таким аргументом будет $\frac{5\pi}{6}$. Итак, $arcctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{5\pi}{6}$.

2. Найти $\alpha = arcctg1$.

Решение. Рассуждая так же, как и в предыдущем примере, получим $arcctg1 = \frac{\pi}{4}$.

Можно предложить учащимся устные упражнения:

1) Найдите значение выражения:

а) $\text{arcc}tg(-1)$; б) $\text{arcctg}(\frac{\sqrt{3}}{3})$ в) $\text{arcctg}(\sqrt{3})$.

2) Расположите в порядке возрастания:

а) $arcctg\ 1{,}2$; $arcctg(-5)$, $arcctg\ 0$;

а) $arcctg\ (-7)$, $arcctg(-2{,}5)$, $arcctg\ 1{,}4$.

5. Задание на дом.

1) Вычислите:

$arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \mathrm{arcc}tg(-1).$

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$.

2) можно предложить любые задания из приложения.

<u>II занятие (рассчитано на 2 часа).</u>

Тема: Обратные тригонометрические функции, их графики.

Цель: отработать навыки в построении графиков обратных тригонометрических функций с использованием области определения, области значений функций и необходимых преобразований.

Перед проверкой домашней работы возможно провести математический диктант.

<u>Вариант 1.</u>

1. Для каких чисел определен арксинус?

2. Найти:

а) $\arcsin(-1) + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.Расположите в порядке убывания:

arcsin (-0,5), arcsin (-0,7), arcsin $\frac{\pi}{8}$.

4.Постройте график функции (схематически)

y = |arcsin x|.

Вариант 2.

1. Для каких чисел определен арккосинус?

2. Найти:

а) $\arcsin 0 - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $arccos(-1) + arctg\sqrt{3}$.

3.Расположите в порядке убывания:

arccos (-0,6), arccos 0,9, arccos $\frac{\pi}{5}$.

4.Постройте график функции (схематически)

y = |arctg x|.

На данном уроке уместно выполнять упражнения, включающие нахождение области определения и области значения функций:

y = arccos $\frac{x}{2}$, y= arcsin (x-2), y = arctg (tg x), y = arcsin $\frac{1}{x^2}$.

Пример. Найти область определения и множество значений функции

y = arcsin$\sqrt{x}$.

Решение. D(y) найдем из условий $\begin{cases} x \geq 0, \\ -1 \leq \sqrt{x} \leq 1 \end{cases}$. Решая эту систему, получим D(y) = [0;1]. Из монотонного возрастания функции арксинус следует, что при изменении x от 0 до 1 рассматриваемая функция будет принимать все значения между y(0)= arcsin 0 =0 и y(1) = arcsin 1 = $\frac{\pi}{2}$. Поэтому E(y) = $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Постройте графики функций:

а) y = arccos 2x; б) y = 2 arccos 2x; в) y = arcsin $\frac{1}{2}$x; г) y = arcsin $\frac{1}{x}$;

д) y = arcsin $\frac{1}{x^2}$; е) y = arcsin $\left(\frac{1}{|x|}\right)$; ж) y = $\left|\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$.

Пример. Построим график y = arccos $\frac{1}{x^2}$.

1) D(y): $\frac{1}{x^2} \leq 1$ или $x^2 \geq 1$, т.е. $\left[\begin{array}{l} x \leq -1, \\ x \geq 1. \end{array}\right.$

2) E (y): $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, т. к. $\frac{1}{x^2} > 0$.

3) Функция четная, т.к. y(-x)=y(x).

4) Точки пересечения: с Oy (x=0) график не может пересекаться, т.к. функция определена только при $|x| \geq 1$; с Ox (y = 0) график пересекается в (-1; 0) и (1; 0), т.к. $\frac{1}{x^2} = 1$ лишь при x = ±1.

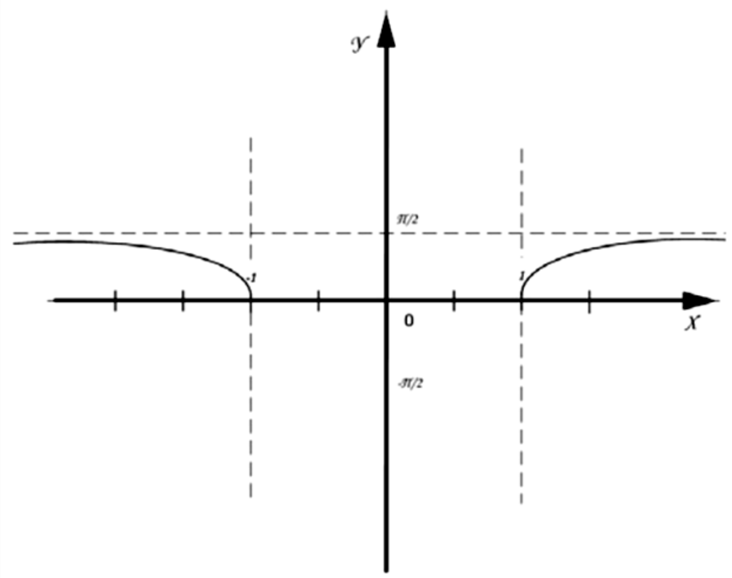
5) В силу четности достаточно ее исследовать для x ≥ 1.

Если x = 1, то y(1) = arccos 1 = 0. Если x → + ∞, то $\frac{1}{x^2} \to 0$ $\left(\frac{1}{x^2} > 0\right)$.

Значит, $arccos\frac{1}{x^2} \to \frac{\pi}{2}$, причем $arccos\frac{1}{x^2} < \frac{\pi}{2}$. Наименьшее y = 0 при x =±1, наибольшего нет.

6) Функция в области определения неотрицательна, т.е. $arccos\frac{1}{x^2} \geq 0$.

7) Дополнительные точки $\left(\sqrt[4]{2} \approx 1{,}19; \frac{\pi}{4}\right)$; $\left(\sqrt{2} \approx 1{,}41; \frac{\pi}{3}\right)$.



На дом. Построить графики функций: $y = arccos\left(\frac{1}{x}\right), y = 2arcctg\ x,$

$y = arccos|x|$.

<u>III занятие (рассчитано на 2 часа).</u>

Тема: Операции над обратными тригонометрическими функциями.

Цель: Расширить математические знания учащихся путем введения основных соотношений для аркфункций.

Непосредственно из алгебраических определений обратных тригонометрических функций мы имеем:

$$sin(arcsin\,x) = x, \quad -1 \le x \le 1, \tag{3.8}$$

$$cos(arccos\,x) = x, \quad -1 \le x \le 1, \tag{3.9}$$

$$tg(arctg\,x) = x, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{3.10}$$

$$ctg(arctg\,x) = x, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{3.11}$$

При применении тождеств (3.8) и (3.9) необходимо иметь в виду следующее. Если в уравнении (неравенстве, системе) стоит выражение $sin(arcsin\,x)$ или $cos(arccos\,x)$, то его можно заменить на x. Однако это преобразование, вообще говоря, не является равносильным. Для равносильности необходимо сохранить ограничение $-1 \le x \le 1$, которое неявно содержится в самом факте написания $arcsin\,x$ и $arccos\,x$.

Более интересными являются следующие четыре группы тождеств:

$$sin(arccos\,x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \le x \le 1, \tag{3.12}$$

$$sin(arctg\,x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \tag{3.13}$$

$$sin(arcctg\,x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{3.14}$$

$$cos(arcsin\,x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \le x \le 1, \tag{3.15}$$

$$cos(arctg\,x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{3.16}$$

$$cos(arcctg\,x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \tag{3.17}$$

$$tg(arcsin\,x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1, \tag{3.18}$$

$$tg(arccos\,x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 \le x \le 1, x \ne 0, \tag{3.19}$$

$$tg(arcctg\,x) = \frac{1}{x}, \quad x \ne 0, \tag{3.20}$$

$$ctg(arcsin\,x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 \le x \le 1, \ x \ne 0, \tag{3.21}$$

$$ctg(arccos\,x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1, \tag{3.22}$$

$$ctg(arctg\,x) = \frac{1}{x}, \quad x \ne 0, \tag{3.23}$$

Эти и другие подобные тождества доказываются по единой методике. Поэтому мы докажем лишь несколько из приведенных выше тождеств. Чтобы доказать тождество (3.12), рассмотрим выражение *sin(arccos x)* как $sin\alpha$, где про угол α мы знаем, что $cos\alpha = x$ и $\alpha \in [0;\pi]$.

Поэтому, чтобы найти $sin\alpha$, его нужно связать с $cos\alpha$. Это можно сделать с помощью основного тригонометрического тождества:

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, откуда $|\sin\alpha| = \sqrt{1 - cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \mathrm{x}^2}$.

Далее, поскольку $\alpha \in [0;\pi]$, число $sin\alpha$ — неотрицательно, так что знак модуля в последней формуле можно убрать и мы получим требуемый результат.

Рассуждения, которые приводят к тождеству (3.13), практически дословно повторяют доказательство тождества (3.12).

Тождества для тангенса и котангенса доказываются с помощью тождеств для синуса и косинуса. Например, $tg(arcsinx) = \frac{\sin(arcsinx)}{\cos(arcsinx)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Рассмотрим примеры:

1) Вычислите: tg (1,5 π+ arctg 2) .

Решение. Упростим выражением (применив формулу приведения), затем используя формулу (3.23) получим:

$$tg(1{,}5\pi + arctg2) = -ctg(arctg2) = -\frac{1}{2} = -0{,}5.$$

2)$cos\ (\pi +\ arcsin\ 0{,}8)\ =\ -\ cos\ (arcsin\ 0{,}8)$. Пусть *arcsin 0,8 = α, sin α= 0,8*;

$$-cos\alpha = -\sqrt{1 - sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - 0{,}64} = -0{,}6.$$

Замечание: Берем перед корнем знак“+” потому, что *α= arcsin x* удовлетворяет $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3) $sin\ (1{,}5\,\pi +\ arcsin\frac{5}{13})$. Ответ: $-\frac{12}{13}$;

4) *ctg (π+ arctg 7)*.Ответ: $\frac{1}{7}$;

5) cos (0,5 π+ arccos$\frac{12}{13}$). Ответ: $-\frac{5}{13}$.

Выполните упражнения:

1) *sin (2 arctg 7)* .

2) cos (π+ 2 arcsin 0,8).

3) $arctg\frac{\sqrt{3}}{4} + arctg\frac{3\sqrt{3}}{7}$.

Пусть $\alpha = arctg\frac{\sqrt{3}}{4}, \beta = arctg\frac{3\sqrt{3}}{7}$, тогда

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{7}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{7}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{3}.$$

4) $\sin(arcsin\frac{12}{13} + arcsin\frac{5}{13})$. Ответ: 1.

д) Доказать, что для всех x ∈[-1; 1] верно $arcsin\, x + arccos\, x = \frac{\pi}{2}$.

Доказательство:

$arcsin\, x = \frac{\pi}{2} - arccos\, x$

$\sin(arcsin\, x) = \sin(\frac{\pi}{2} - arccos\, x)$

$x = \cos(arccos\, x)$

$x = x$

Задания для самостоятельного решения: $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right), \cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right), \cos\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right), \sin(\mathrm{arctg}(-3)), \mathrm{tg}\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$.

Домашнее задание.

1) $sin\,(arcsin\, 0{,}6 + arctg\, 0)$.

2) $arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$.

3) *tg (2π– arccos 0,6).*

4) *sin (4 arcctg 5).*

5) cos (π– arcsin 0,9).

6) *arctg 0,7 – arctg 4.*

IV занятие (рассчитано на 2 часа).

Тема: Обратные тригонометрические операции над аркфункциями.

Цель: сформировать представление учащихся об обратных тригонометрических операциях над тригонометрическими функциями.

Объем теоретического материала, подлежащий запоминанию, следует ограничить. Изучение нового материала начнем с исследования функции

y = arcsin (sin x) и построения ее графика.

1. ОДЗ: R

2. E(y): $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Каждому $x\in R$ ставится в соответствие $y\epsilon\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ такое, что $sin\ y = sin\ x$.

4. Функция является нечетной: sin(-x) = - sin x; arcsin(sin(-x)) = - arcsin(sin x).

5. Период функции T = 2π.

6. График y = arcsin (sin x) на[0; π]:

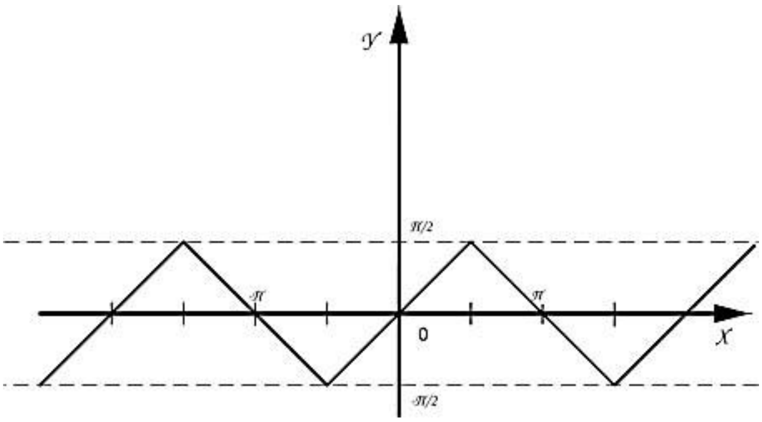
а) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ имеем *y = arcsin(sin x) = x.*

б) $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ имеем *y = arcsin (sin x) = π- x*, ибо

Таким образом, получили следующее:

$$y = \arcsin(sinx) = \begin{cases} x, 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - x, \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Построим график данной функции на[0; π], затем продолжим симметрично относительно начала координат на[-π; 0] (т.к. функция нечетна). Используя периодичность, продолжим на всю числовую ось.



Запишем следующие соотношения:

$$arcsin(sin\,\alpha) = \alpha, \text{если} -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}; \tag{3.24}$$

$$arccos\,(cos\,\alpha) = \alpha, \text{ если } 0 \leq \alpha \leq \pi; \tag{3.25}$$

$$arctg\,(tg\,\alpha) = \alpha, \text{если} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}; \tag{3.26}$$

$$arcctg\,(ctg\,\alpha) = \alpha, \text{ если } 0 < \alpha < \pi. \tag{3.27}$$

Рассмотрим примеры:

1) Вычислите: $arcsin(sin5)$.

Решение. Обозначим $y = arcsin(sin5), -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$siny = sin(arcsin(sin5)) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ siny = sin5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} y = 5 + 2\pi k \\ y = \pi - 5 + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right. \end{cases}$$

Отбирая решение, принадлежащее отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, получим, что $y = 5 - 2\pi$.

Ответ: $5 - 2\pi$.

2) Вычислите: *arccos(cos10).*

Решение. Обозначим $y = arccos(cos\,10), 0 \leq y \leq \pi$. Тогда

$$cosy = cos(arccos(cos10)) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le y \le \pi, \\ cosy = cos10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le y \le \pi, \\ \left[\begin{array}{l} y = 10 + 2\pi k \\ y = -10 + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right. \end{cases}$$

Выберем решение, принадлежащее отрезку $[0; \pi]$, получим, что

$y = -10 + 4\pi$. Следовательно, $arccos(cos10) = 4\,\pi - 10$.

Ответ: $4\,\pi - 10$.

3) Вычислите: $arctg(tg6)$.

Решение. Обозначим $y = \mathrm{arctg(tg6)}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$tgy = \mathrm{tg}(arctg(tg6)) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, \\ tgy = tg6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, \\ y = 6 + \pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Отбирая решение, принадлежащее отрезку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, получим, что

$y = 6 - 2\pi$.

Ответ: $6 - 2\pi$.

4) Вычислите: $arcctg(ctg5)$.

Решение. Обозначим $y = \mathrm{arcctg(ctg5)}, 0 < y < \pi$. Тогда

$$ctgy = ctg\big(arcctg(ctg5)\big) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < y < \pi, \\ y = 5 + \pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow y = 5 - \pi.$$

Ответ: $5 - \pi$.

Для самостоятельного решения можно предложить следующее задание:

1) Найдите значение выражения:

а) $arcsin(sin10)$; в) $arctg(tg2)$; д) $arcsin(sin2)$;

б) $arccos(cos12)$; г) $arcctg\big(ctg(-3)\big)$; е) $arccos\big(cos(-4)\big)$;

ж) $arctg(tg8)$; з) $arcctg(ctg7)$; к) $arccos(cos8)$.

и) $arcsin(\sin(-6))$;

В качестве задания на дом можно предложить любые задания из приложения.

V- VI занятие (рассчитано на 4 часа).

Тема: уравнения и неравенства с аркфункциями.

Цель: сформировать представление учащихся об уравнениях и неравенствах, содержащих обратные тригонометрические функции, и о методах их решения.

Для проверки усвоенного материала учащимися можно провести математический диктант.

Вариант №1.

1.Область определения функции:

$y = \ arcsin\ (2x - 3)$.

2. Область значений функции:

$y = \frac{\pi}{3} - 2arccosx$.

3.Найдите значение выражения:

$arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4.Найдите значение выражения:

arcsin 0,3 + arccos 0,3.

5.Известно, что $arcsin\ x = \frac{\pi}{8}$.

Найдите *arccosx*.

6.Вычислите: $ctg\left(arctg\frac{2}{3}\right)$.

Вариант №2.

1.Область определения функции:

$y = \ arccos\ (1 - x^2)$.

2. Область значений функции:

$y = \frac{\pi}{6} - 2arcsinx$.

3.Найдите значение выражения:

$arcsin(-1) - arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

4.Найдите значение выражения:

arcsin 0,8 + arccos 0,8.

5.Известно, что $arccos\ x = \frac{\pi}{10}$.

Найдите *arcsinx*.

6.Вычислите: $tg\left(arcctg\frac{4}{5}\right)$.

Простейшими уравнениями, содержащими переменную под знаком одной из обратных тригонометрических функций, будем называть уравнения вида $arcsinx = a, arccosx = a, arctgx = a;\ arcctgx = a$.

В каждом из них требуется определить неизвестное по заданному значению одной из аркфункций. Рассмотрим подробно решение каждого из данных уравнений, ибо любое другое уравнение будет приводиться либо к одному из них, либо к их совокупности, либо к их системе.

Пример 1. Решите уравнение $arcsinx = a$ при всех значениях правой части.

Решение. Так как значение $arcsinx \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то уравнение $arcsinx = a$

равносильно системе: $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le a \le \frac{\pi}{2}, \\ x = sina. \end{cases}$

Таким образом, если $|a| \le \frac{\pi}{2}$, то уравнение имеет единственное решение $x = sina$; если $|a| > \frac{\pi}{2}$, то уравнение не имеет решений.

Пример 2. Решите уравнение $arccosx = a$ при всех значениях параметра.

Решение. Так как значение $arccosx \in [0; \pi]$ то при $0 \le a \le \pi$ уравнение имеет единственное решение $x = cosa$. При других значениях a уравнение решений не имеет.

Пример 3. Решите уравнение $arctgx = a$.

Решение. Имеем:

$arctgx = a \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \\ x = tga. \end{cases}$ Если же $|a| \ge \frac{\pi}{2}$, то уравнение не имеет решений.

Пример 4. Решите уравнение $arcctgx = a$.

Решение. $arcctgx = a \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < \pi, \\ x = ctga. \end{cases}$

При других значениях a уравнение решений не имеет.

Простейшими неравенствами с аркфункциями являются следующие неравенства: $arcsinx \geq \alpha, arcsinx < \alpha, arcsinx > \alpha, arcsinx \leq \alpha$ и такие же неравенства, левая часть в которых заменена на *arccosx*, *arcctg x*, *arctg x*. Все они решаются единообразно, поэтому ограничимся рассмотрением решением неравенств, содержащих *arcsinx*.

<u>Пример 5.</u> Решите неравенство $arcsinx \geq \alpha$.

Решение. Если $a \leq -\frac{\pi}{2}$, то в силу определения *arcsinx* решением неравенства будет отрезок $-1 \leq x \leq 1$. Если $-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$, то вычисляя синус от обеих частей неравенства и учитывая, что *sin t* возрастает на множестве $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, получим в качестве решения отрезок $sin\alpha \leq x \leq 1$.

Наконец, если $a > \frac{\pi}{2}$, то в силу определения *arcsin x* решений нет.

Пример 6. Решите неравенство $arcsinx > \alpha$.

Решение. Если $a < -\frac{\pi}{2}$, то решением неравенства является отрезок [-1 ;1]. Если $-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$, то вычисляя синус от обеих частей неравенства, получим в качестве решения промежуток $sin\alpha < x \leq 1$. Наконец, если $a \geq -\frac{\pi}{2}$, , то неравенство не имеет решений, так как по определению $arcsin\, x$ не может быть больше, чем $\frac{\pi}{2}$.

Пример 7. Решите неравенство

$arcsinx \leq a$.

Решение. Неравенство можно свести к уже изученному случаю. Для этого обе части неравенства умножим на число -1 и воспользуемся нечетностью $arcsin\,x$: $-arcsin\,x \geq \alpha \Leftrightarrow \arcsin(-x) \geq -\alpha$. Если теперь обозначить: $-x = y, -\alpha = \beta$, то получим знакомое неравенство

$arcsiny \geq \beta$. Опираясь на решение неравенства, запишем сразу ответ для нашего неравенства:

1) если $\alpha < -\frac{\pi}{2}$ (т. е. $\beta > \frac{\pi}{2}$), то решений нет;

2) если $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ (т. е. $\frac{\pi}{2} < \beta \leq \frac{\pi}{2}$), то $-1 \leq x < sin\alpha,$

3) если $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$ (т. е. $\beta \leq \frac{\pi}{2}$), то $-1 \leq x \leq 1$.

Пример 8. Решите неравенство $arcsinx < \alpha$.

Решение. Сразу приведем результат, получаемый по той же схеме, что и в примере 7:

1) если $\alpha \leq -\frac{\pi}{2}$, то неравенство не имеет решений;

2) если $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то $-1 \leq x \leq 1$;

3) если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то $-1 \leq x \leq 1$.

Заметим, что неравенства $\arccos x \geq \alpha, \arccos x > \alpha,$

$arccosx \leq \alpha, arccosx < \alpha$ легко сводятся к предыдущим неравенствам, если учесть, что $arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}$.

Перейдем теперь к более сложным уравнениям и неравенствам с аркфункциями.

Рассмотрим 4 основных метода решения уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции.

I. Уравнения и неравенства, левая и правая части которых являются одноименными обратными тригонометрическими функциями.

Данный метод основывается, в первую очередь, на свойстве монотонности этих функций. Как уже было отмечено ранее:

$y = arcsinx \text{ и } y = arctgx$ монотонно возрастают,

$y = arccosx \text{ и } y = arcctgx$ монотонно убывают на своих областях определения.

Следовательно, справедливы следующие равносильные переходы, задающие алгоритмы решения этих уравнений и неравенств.

1. а) $arcsinf(x) = arcsing(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \le 1. \end{cases}$

а*) $arcsinf(x) = arcsing(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \le 1 \end{cases}$

б) $arcsinf(x) \le arcsing(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -1, \\ g(x) \le 1. \end{cases}$

2.а) $arccosf(x) = arccosg(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \le 1. \end{cases}$

а*) $arccosf(x) = arccosg(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \le 1. \end{cases}$

б) $arccosf(x) \le arccosg(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \ge -1, \\ g(x) \le 1. \end{cases}$

3.а) $arctgf(x) = arctgg(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$;

б) $arctgf(x) \le arctgg(x) \Leftrightarrow f(x) \le g(x)$

4.а) $arcctgf(x) = arcctgg(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$;

б) $arcctgf(x) \le arcctgg(x) \Leftrightarrow f(x) \ge g(x)$.

Замечание. При решении уравнений 1а) и 1а*) (аналогично при решении 2а) и 2а*)), можно воспользоваться любой из двух приведенных систем, это зависит от того, какое неравенство проще:

$|f(x)| \le 1$ (тогда используем систему в 1а), или

$|g(x)| \le 1$ (в этом случае используем систему в 1а*).

Пример 1. Решите уравнение $arcsin(3x^2-4x-1)=arcsin(x+1)$.

Решение. Применим переход (1а*), получим:

$$\begin{cases}3x^2-4x-1=x+1,\\ |x+1|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-5x-2=0,\\ |x+1|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=-\frac{1}{3}\end{array}\right.\\ |x+1|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Пример 2. Решите неравенство $3arcsin2x<1$.

Решение. Приведем неравенство к переходу 1б). Для этого вспомним формулу $x=\sin(arcsinx)$.

$$3arcsin2x<1\Leftrightarrow arcsin2x<\frac{1}{3}\Leftrightarrow arcsin2x<\arcsin\left(sin\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1\le 2x<sin\frac{1}{3}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}sin\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}sin\frac{1}{3}\right)$

Пример 3. Решите уравнение

$\arccos(4x^2-3x-2)+\arccos(3x^2-8x-4)=\pi$.

Решение.

Так как $\pi-arccost=\arccos(-t)$, то возможно записать следующие равносильные преобразования:

$$\arccos(4x^2-3x-2)=\pi-\arccos(3x^2-8x-4)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\arccos(4x^2-3x-2)=\arccos(-3x^2+8x+4)\overset{2a)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-3x-2=-3x^2+8x+4,\\ |4x^2-3x-2|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x^2-11x-6=0,\\ |4x^2-3x-2|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -\frac{3}{7}, \end{array}\right. \\ |4x^2 - 3x - 2| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{7}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{3}{7}\right\}$.

II. Уравнения и неравенства, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями.

При решении уравнений и неравенств, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями, пользуются известными тригонометрическими тождествами. При решении многих уравнений такого рода бывает целесообразно не обсуждать вопрос о равносильности преобразований, а сразу переходить к уравнению-следствию и после его решения делать необходимую проверку. Рассуждения здесь могут быть примерно следующими. Пусть требуется решить уравнение

$arcsinf(x) = arccosg(x)$. Допустим, что x_0 – решение данного уравнения, тогда равенство $arcsinf(x) = arccosg(x)$ обозначим через t. Значит:

$sint = f(x_0),\ cost = g(x_0)$, откуда $f^2(x_0) + g^2(x_0) = 1$. Таким образом, вывели формулу:

(1) $arcsinf(x) = arccosg(x) \Rightarrow f^2(x) + g^2(x) = 1$.

Если рассуждать аналогично, получим следующие переходы:

(2) $arctgf(x) = arcctgg(x) \Rightarrow f(x) \cdot g(x) = 1$

(используется формула $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$);

(3) $arcsinf(x) = arcctgg(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{g^2(x)+1}$

(используется формула $sin^2\alpha = \frac{1}{ctg^2\alpha+1}$);

(4) $arctgf(x) = arccosg(x) \Rightarrow \frac{1}{f^2(x)+1} = g^2(x)$

(используется формула $cos^2\alpha = \frac{1}{tg^2\alpha+1}$);

(5) $arcsinf(x) = arctgg(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1}$

(используется формула $sin^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1}$);

(6) $arccosf(x) = arcctgg(x) \Longrightarrow f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1}$

(используется формула $cos^2\alpha = \frac{ctg^2\alpha}{ctg^2\alpha+1}$);

Замечание . Корнем каждого из уравнений **(1) — (4)** может быть только такое число x_0 , для которого $f(x_0) \geq 0$ *и* $g(x_0) \geq 0$. В противном случае множество значений левой и правой частей уравнения не пересекаются.

Рассмотрим примеры:

Пример 1. Решите уравнение $arccos\frac{7x+5}{13} = arcsin\frac{4x+1}{13}$.

Решение.

$$arccos\frac{7x+5}{13} = arcsin\frac{4x+1}{13} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left(\frac{7x+5}{13}\right)^2 + \left(\frac{4x+1}{13}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 65x^2 + 78x - 143 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -\frac{143}{65}. \end{array}\right.$$

Заметим, что $x = -\frac{143}{65}$ – посторонний корень.

Ответ: $\{1\}$.

Пример 2. Решите неравенство $arcsin\frac{x+2}{5} \leq arccos\frac{3x+1}{5}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = arcsin\frac{x+2}{5} - arccos\frac{3x+1}{5}$

1) Найдем область определения функции D(f), решив систему

$$\begin{cases} \dfrac{|x+2|}{5} \leq 1, \\ \dfrac{|3x+1|}{5} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \leq \mathrm{x} \leq 3, \\ -2 \leq x \leq \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq \frac{4}{3}.$$

2) Найдем нули функции f(x), решим для этого уравнение

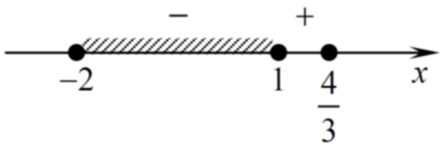
$$arcsin\frac{x+2}{5} = arccos\frac{3x+1}{5} \overset{(1)}{\Rightarrow} \left(\frac{x+2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3x+1}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Заметим, что $x = -2$ – посторонний корень.

3)Решим неравенство $f(x) \le 0$ методом интервалов.

$f(2) < 0,\ f\left(\frac{4}{3}\right) > 0.$



Ответ:$[-2; 1]$.

III. Замена переменной.

Некоторые уравнения и неравенства, которые содержат обратные тригонометрические функции, можно сводить к алгебраическим, для этого необходимо сделать соответствующую замену переменной.

Не забывать, при этом, об ограничениях на вводимую переменную, так как это связано с ограниченностью обратных тригонометрических функций.

Пример 1. Решите уравнение $12arctg^2\frac{x}{2} = \pi\left(3x + 5arctg\frac{x}{2}\right)$.

Решение.

Пусть $arctg\frac{x}{2} = t, где -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, тогда получаем уравнение:

$$12t^2 - 5\pi t - 3\pi^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{4}\pi \\ t = -\frac{\pi}{3}. \end{array}\right.$$

Так как $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, значит $t = \frac{3}{4}\pi$ - не подходит.

При $t = -\frac{\pi}{3}$ получаем:

$$arctg\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -2\sqrt{3}.$$

Ответ: $\{-2\sqrt{3}\}$.

Пример 2. Решите неравенство $arccos^2x - 3arccosx + 2 \ge 2$.

Решение.

Пусть $arccosx = t$, где $0 \le t \le \pi$. Тогда получаем неравенство:

$t^2 - 3t + 2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \ge 2, \\ t \le 1. \end{array}\right.$

Так как $0 \le t \le \pi$, то $\left[\begin{array}{l} 2 \le t \le \pi, \\ 0 \le t \le 1. \end{array}\right.$

Возвращаясь к исходным переменным, получим:

$\left[\begin{array}{l} 2 \le arccosx \le \pi, \\ 0 \le arccosx \le 1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le x \le cos2, \\ cos1 \le x \le 1. \end{array}\right.$

Ответ: $[-1; cos2] \cup [cos1; 1]$.

IV. Использование свойств монотонности и ограниченности обратных тригонометрических функций.

Решения некоторых уравнений и неравенств, которые содержат обратные тригонометрические функции, основываются на определенных свойствах этих функций (монотонность и ограниченность). При рассмотрении примеров, нам пригодятся следующие теоремы.

Теорема 1. Если функция $y = f\ (x)$ монотонна, то уравнение
$f\ (x) = c\ (c\ = const\ )$ имеет не более одного решения.
Теорема 2. Если функция $y\ = f\ (x)$ монотонно возрастает, а функция
$y = g(x)$ монотонно убывает, то уравнение $f\ (x)\ = g(x)$ имеет не более одного решения.
Теорема 3. Если $min\ f(x) = c = max\ g(x)$ $(c = const)$, то на множестве X уравнение $f\ (x)\ = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = c, \\ g(x) = c. \end{cases}$

Пример. Решите уравнение $2arcsin2x = 3arccosx$.

Решение.
$y = 2arcsin2x$ – функция является монотонно возрастающей.

$y = 3arccosx$ – функция является монотонно убывающей.

Легко заметить, что число $x = \frac{1}{2}$ – корень данного уравнения, причем этот корень единственный (в силу теоремы 2).

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Упражнения для самостоятельного решения

Решите следующие уравнения:

1) $arcsinx + arcctg3$;

2) $ctg\, x + arctg\frac{1}{6} = -\frac{\pi}{4}$;

3) $\sin(\pi arctgx) = \cos(\pi arctgx)$;

4) $arcsin\frac{4x}{5} + arcsin\frac{3x}{5} = arcsinx$;

5) $arcsin^2 x - \frac{3\pi}{4}arcsinx + \frac{\pi^2}{4} = 0$;

6) $arcsin\frac{7x-2}{13} = arccos\frac{4x-3}{13}$;

7) $arctg3^x - arctg3^{-x} = \frac{\pi}{6}$;

Решите следующие неравенства:

8) $\frac{\pi}{4} < arcctg2x < \frac{3\pi}{4}$;

9) $arcsinx - arcctgx > 0$;

10) $arctg2x + arctg3x < \frac{3}{4}\pi$;

11) $\frac{arccosx-2}{arcsinx} < -1$;

12) $arccos\frac{x}{2} > 2arctg(x-1)$.

В качестве задания на дом можно предложить любые задания из приложения.

VIII занятие (рассчитано на 2 часа). Контрольная работа.

1 Вариант.

1.Вычислите:

а) $ctg\left(\frac{1}{2}arccos\left(-\frac{4}{17}\right)\right)$;

б) $2arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-arctg(-\sqrt{3})+$

$+2arccos\frac{1}{2}+2arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+$

$+\frac{1}{2}2arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+3arccos0.$

2.Упростите:

tg(arctg x+ arctg y).

3.Найдите область определения функции:

$y=arcsin\frac{5x+1}{2}.$

4..Постройте график функции:

а) *y=* $|arcsin\,x|$*;*

б*) y= 0,5 arccos x.*

5. Решите уравнение:

$cos(arccos(\mathrm{x}+2))=x^2.$

6. Решите уравнение:

$18arctg\frac{x+1}{2}=6p$

7.Решить неравенство:

arcsin x< arcctg x.

2 Вариант.

1.Вычислите:

а) $sin\left(\frac{1}{2}arcctg\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$;

б) $2arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+arctg(-1)-$

$-\mathrm{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)+arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+$

$+\frac{1}{2}arccos(-1)+3arcctg(-\sqrt{3}).$

2.Упростите:

sin (arcsin x- arcsin y).

3.Найдите область определения функции

$y=arccos\frac{3x-1}{3}.$

4..Постройте график функции:

а) *y=* $|arctg\,x|$*;*

б*) y= 2 arccos x.*

5. Решите уравнение:

$sin(arcsin(4\mathrm{x}-1))=3x^2.$

6. Решите уравнение:

$6arcctg(2x-3)=3p$

7.Решите неравенство:

arcsin x< arctg x

Заключение

Обратные тригонометрические функции – один из разделов тригонометрии, который его значительно углубляет и обогащает. Их изучение способствует развитию у учащихся математического мышления, способствует подготовке учащихся к обучению в высшей школе, помогает подготовиться к сдаче ЕГЭ по математике.

В ходе исследования, были поставлены и решены следующие задачи:

- изучить литературу;
- систематизировать и обобщить теоретический материал;
- разработать элективный курс «Обратные тригонометрические функции» и методику его проведения.

Считаем, что цель нашей работы достигнута. Разработан элективный курс. Результаты опубликованы в сборнике трудов Тринадцатой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения - 2014», а также в сборнике тезисов XXIII Международной конференции «Математика. Образование. Информатизация», Казань, 2015 г.

Список использованной литературы

1. Азаров А.И., Тригонометрия. Тождества, уравнения, неравенства, системы: Учеб.пособ. [Текст] / Азаров А.И., Булатов В.И., Федосенко В.С., Шибут А.С. - Минск, 1999.
2. Блох А.Ш. Неравенства [Текст] / А.Ш. Блох, Т.Л. Трухан. –М.: Народная асвета, 1972.– 220 с.
3. Виленкин Н. Я. Учебник: Алгебра для 9 класса: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов, с углубл. изуч. математики [Текст] / Н. Я. Виленкин, Г. С. Сурвилло, А. С. Симонов, А. И. Кудрявцев; Под ред. Н. Я. Виленкина. — М.: Просвещение, 1996. — 84 с.: ил.
4. Выгодский, М. Я. Справочник по элем. Математике. Таблицы, арифметика, алгебра, тригонометрия, функции и их графики[Текст] / М. Я. Выгодский. – Изд. 24-е. – М.: «Наука», 1976. – 416с.
5. Дроздов, В.Б. Аркфункции в задачах [Текст] / В.Б. Дроздов - Математика в школе.– 2010.–№ 4.– С. 31–35.
6. Ермаков, Д. Течения и «подводные камни» в море элективных курсов [Текст] / Д. Ермаков // Народное образование. – 2007. – №1. – С. 155-162.
7. Литвиненко, В. Н. Практикум по решению математических задач: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов пед. ин–тов по матем. спец. [Текст] / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – М.: Просвещение, 1984.– 288 с.
8. Мирошин, В.В. Обратные тригонометрические функции [Текст] / В.В. Мирошин. – М.: Чистые пруды,2007– 32 с.
9. Никольский С.М. Учебник: Алгебра и начала анализа. 11 класс: Учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни [Текст] / С.М.Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В.Шевкин. – 8-е изд.— М.: Просвещение, 2009. — 464 с.: ил.

10. Новоселов, С. И. Специальный курс тригонометрии. Учеб. Пособие для педагогических институтов. – М.: «Советская школа», 1953. – 464с.

11. Об элективных курсах в системе профильного обучения на старшей ступени общего образования. Информационное письмо Департамента общего и дошкольного образования Минобразования России № 14-51-277/13 [Эл. ресурс] - 13.11.2003 – Режим доступа: www.profile-edu.ru. – Дата доступа: 22.01.2015.

12. Фалин Г.И., Обратные тригонометрические функции. 10-11 классы [Текст] / Фалин Г.И., Фалин А.И. — М.: Издательство «Экзамен», 2012. — 221с.

13. Федяева Л.В. Элективные курсы по математике в системе профильного обучения [Текст] / Л.В. Федяева // Научный журнал «Вестник Омского государственного педагогического университета» [Эл. ресурс] – 2007 – Режим доступа: www.omsk.edu. – дата доступа: 23.01.2015.

14. Элективные курсы в профильном обучении [Текст] / Министерство образования РФ – Национальный фонд подготовки кадров. – М.: Вита-Пресс, 2004. – 144с.

15. Элективные курсы в профильном обучении: Образовательная область “Математика” [Текст] / Министерство образования РФ – Национальный фонд подготовки кадров. – М.: Вита-Пресс, 2004. – 96 с.

Приложение 1

Задания для самостоятельной работы.

1.Найти область определения:

а)$y = arcsin\frac{1}{2}x$; б)$y = arcctg\ 2x$; в)$y = arctg\ \sqrt{x}$; г)$y = arcsin\sqrt{x}$;

д)$y = arcctg\frac{1}{2-x}$; е)$y = arcctg\sqrt{x-4}$; ж) $y = \sqrt{arccosx}$.

2.Построить графики функций:

a) $y = \arccos 2x$; б) $y = 2\arccos x$; в) $y = \arccos(cosx)$;

г) $y = arctg\ (ctgx)$; д)$у = \frac{|arctgx|}{arctgx}$.

3. В каких границах заключены дуги:

а) $2\ arccos\ x$; б) $2\ arcsin\ x$; в) $\frac{1}{3}arcctg\ x$; г) $\pi - arcctg\ x$;

д) $arccos\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}$; е) $arctg\ x^2 - \pi$.

4. Построить:

а) $arctg\ (-\ 0{,}3)$; б) $arcsin\frac{3}{4}$; в) $arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$; г) $arcctg\ (-1{,}5)$.

5.Вычислить:

а) $arcsin\ (cos\ 2)$; б) $arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$ в) $arctg\frac{3\sqrt{3}}{7} + arctg\frac{\sqrt{3}}{4}$

6. Вычислить:

а) $tg\left(arcsin\frac{1}{2}\right)$; б) $\cos\left(arctg\sqrt{3}\right)$; в) $tg\left(arcctg(-1)\right)$;

г) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

7.Вычислить:

а) $arccos\ (cos\ 70^0)$; б) $arccos\ (cos\ 210^0)$; в) $arcsin\ (sin170^0)$;

г) $\arccos\left(cos\frac{9}{4}\pi\right)$; д) $arcsin\ (\sin 6\pi)$.

8. Решите уравнения:

а) $arcsin\ 2x\ =\ 2\ arcsin\ x$.

б) $2\ arccos\ \mathrm{x} +\ arcsin\ (1-\mathrm{x})\ =\ 0$.

в) $arcsin^2x + arccos^2x = \frac{5\pi^2}{36}$.

№10.Решите неравенства:

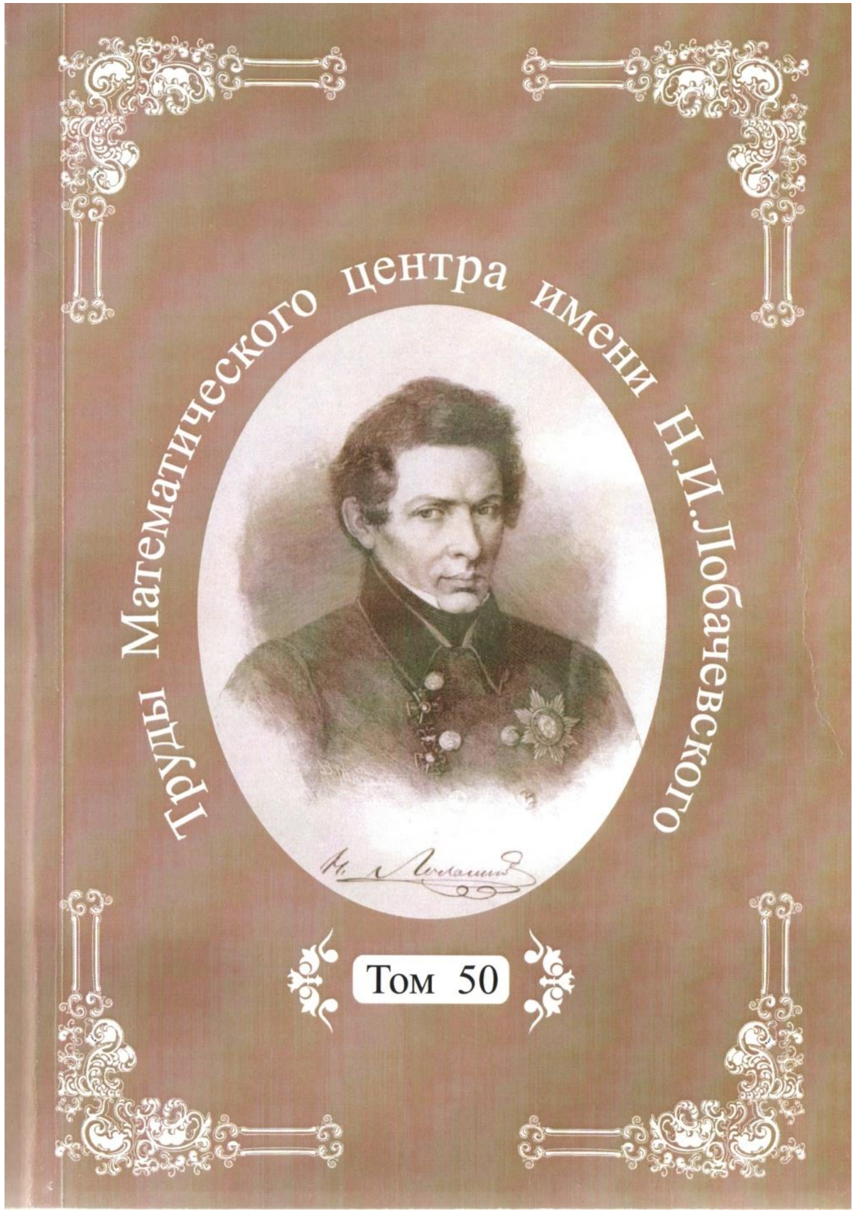
а) $arccos\ x^2 \le 1$.

б) $arccos\mathrm{x} -\ arcctg\ 2x < 0$

в) $arcsin\ \mathrm{x} <\ arcsin\ 2\mathrm{x}$.

г) $(arctg\ x)^2 -\ 4\ arctg\ x\ +\ 3\ >\ 0$.

Приложение 2



КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА
ИМЕНИ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

ТОМ 50

ЛОБАЧЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2014

Материалы Тринадцатой молодежной
школы-конференции
(Казань, 24 – 29 октября 2014 г.)

КАЗАНЬ
2014

ЛИТЕРАТУРА

1. Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. *Об эволюционных уравнениях задач ударного деформирования с плоскими поверхностями разрывов* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2. – № 3. – С. 82–95.

Ю. Г. Игнатьев, А. Р. Самигуллина

Казанский (Приволжский) федеральный университет, ignatev_yu@rambler.ru, alsu_sam@mail.ru

ПРОГРАММНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ЗНАНИЙ ПО БАЛЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЕ НА ОСНОВЕ ПРИКЛАДНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА MAPLE, ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ MAPLET И MICROSOFTEXCEL

Программные процедуры являются приложением к математическому пакету Maple (версии 14 – 18), а также программы MicrosoftExcel (версии 2003 года и более поздние) и предназначен для автоматизации процесса итоговой аттестации и анализа ее результатов. Программные процедуры осуществляют обмен данными между листами MicrosoftExcel и Maplet, в окна которого вводится текущая информация об ответах на вопросы и выводится информация об успеваемости студентов по модулям обучения, итоговая оценка по шкале балльно-рейтинговой системе и результаты итоговой аттестации группы студентов, как в цифровом, так и графическом форматах с дополнительной информацией об успеваемости и качестве. При этом соответствующая информация записывается в таблицы листа MicrosoftExcel, соответствующего номеру

группы студентов. Программные процедуры автоматизированной аттестации отличаются от известных, во-первых, простотой и удобством применения в образовательном процессе, сервисными свойствами, а также возможностью интеграции его с программами аналитического тестирования в пакете Maple.

ЛИТЕРАТУРА

1. Игнатьев Ю. Г. *Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – 298 с.

Э. Э. Идиятова, К. Б. Шакирова

Казанский (Приволжский) федеральный университет, evelinochka_20@mail.ru

ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ В ШКОЛЬНОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

В школе математика служит опорным предметом для изучения смежных дисциплин. Реальная необходимость современной жизни – непрерывное образование, основой которого должны стать прочные знания, в том числе, и по математике. Следует всемерно способствовать удовлетворению потребностей и запросов школьников, проявляющих интерес и имеющих склонности и способности к математике. Учащиеся должны приобрести умения решать задачи, более сложные по сравнению с обязательным уровнем, точно и грамотно излагать собственные рассуждения при решении задач. Возникает необходимость в дифференциации обучения, потребность в некотором компромиссном варианте: ввести элективные курсы, которые включают в себя некоторые дополнительные материалы.

Понятие "элективный" (от лат. Electus – избранный) означает избирательный. Элективные курсы – это обязательные для посещения курсы по выбору учащихся. Элективные курсы реализуются за счет школьного компонента учебного плана.

Рассмотрим более подробно разработку элективного курса по теме "Обратные тригонометрические функции".

Цель данного элективного курса: повышение математической культуры учащихся в рамках школьной программы по математике; не только углубление, но и расширение содержания базисного курса, изучение которого осуществляется на минимальном общеобразовательном уровне, что позволяет получить дополнительную подготовку для сдачи экзамена по математике.

Функции данного спецкурса: дополнение и углубление базового предметного образования; компенсация недостатков обучения; психолого-педагогическая поддержка учащихся при подготовке их к решению задач группы "С" ЕГЭ; возможность реализовать личностный и творческий потенциал учащихся через методы и приемы самостоятельного исследовательского поиска.

Программа курса предполагает дальнейшее развитие у школьников математической, исследовательской и коммуникативной компетентностей. Курс направлен на более глубокое понимание и осознание математических методов познания действительности, на развитие математического мышления учащихся, устной и письменной математической речи. На занятиях решаются нестандартные задачи, для которых в курсе математики не имеется общих правил, определяющих точный алгоритм их решения. Учащиеся учатся находить и применять различные методы для решения задач.

Требования к уровню усвоения курса.

По окончанию изучения курса учащиеся должны уметь: выполнять построения графиков обратных тригонометрических функций; применять теорию к преобразованию выражений с аркфункциями; решать уравнения и неравенства с аркфункциями; владеть: методами исследования свойств обратных тригонометрических функций; различными методами решения уравнений и неравенств с аркфункциями.

Занятия включают в себя теоретическую и практическую части, в зависимости от целесообразности – лекции, консультации, практикумы, самостоятельную и исследовательскую работу. Эффективность обучения отслеживается следующими формами контроля:

– математический диктант;
– срезы знаний и умений в процессе обучения;
– итоговый контроль.

Показателем эффективности обучения следует считать повышающийся интерес к математике, творческую активность и результативность учащихся.

Курс рассчитан на 16 часов, однако его программа может корректироваться. Учитывая особенности школы, класса, уровень подготовки учащихся, учитель может изменять последовательность изучения материала, уровень его сложности, самостоятельно распределять часы и выбирать конкретные формы занятий.

Содержание курса "Обратные тригонометрические функции". Тема занятия (кол-во часов):

1. Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ (4);

2. Операции над обратными тригонометрическими функци-

ями (4);

3. Обратные тригонометрические операции над тригонометрическими функциями (2);

4. Уравнения с аркфункциями (2);

5. Неравенства с аркфункциями (2);

6. Контрольная работа (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И. *Алгебра и математический анализ. Учебное пособие, 10 класс.* – М.: Просвещение, 2010.

2. Крючкова В. В. *Обобщающий семинар по теме: обратные тригонометрические функции* // Математика в Школе. – 2004. – № 1.

3. Решетников Н. Н. *Тригонометрия в школе: Учебно-методическое пособие.* – М.: Педагогический университет “Первое сентября”, 2010.

4. Мирошин В. В. *Обратные тригонометрические функции.* – М.: Чистые пруды, 2007.

5. Рурукин А. Н. *Поурочные разработки по алгебре и началам анализа: 10 класс.* – М.: ВАКО, 2009.

Т. А. Калмыкова

Дальневосточный федеральный университет,

Школа естественных наук,

kalmykova.ta@dvfu.ru

СВОЙСТВА ВЫПУКЛОСТИ И ВОГНУТОСТИ ОБОБЩЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В данной работе изучаются свойства монотонности, выпуклости и вогнутости обобщенных двухпараметрических тригонометрических и гиперболических функций. Исследование указанных свойств основывается на использовании основной леммы и доказательстве некоторых неравенств.

Определим двухпараметрическую обобщенную функцию $\sin_{p,q}(y)$ как функцию, обратную к интегралу:

$$y = F_{p,q}(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1-t^q)^{1/p}},$$

$p, q > 1$, $x \in (0,1)$, $y \in (0, \pi_{p,q}/2)$, где

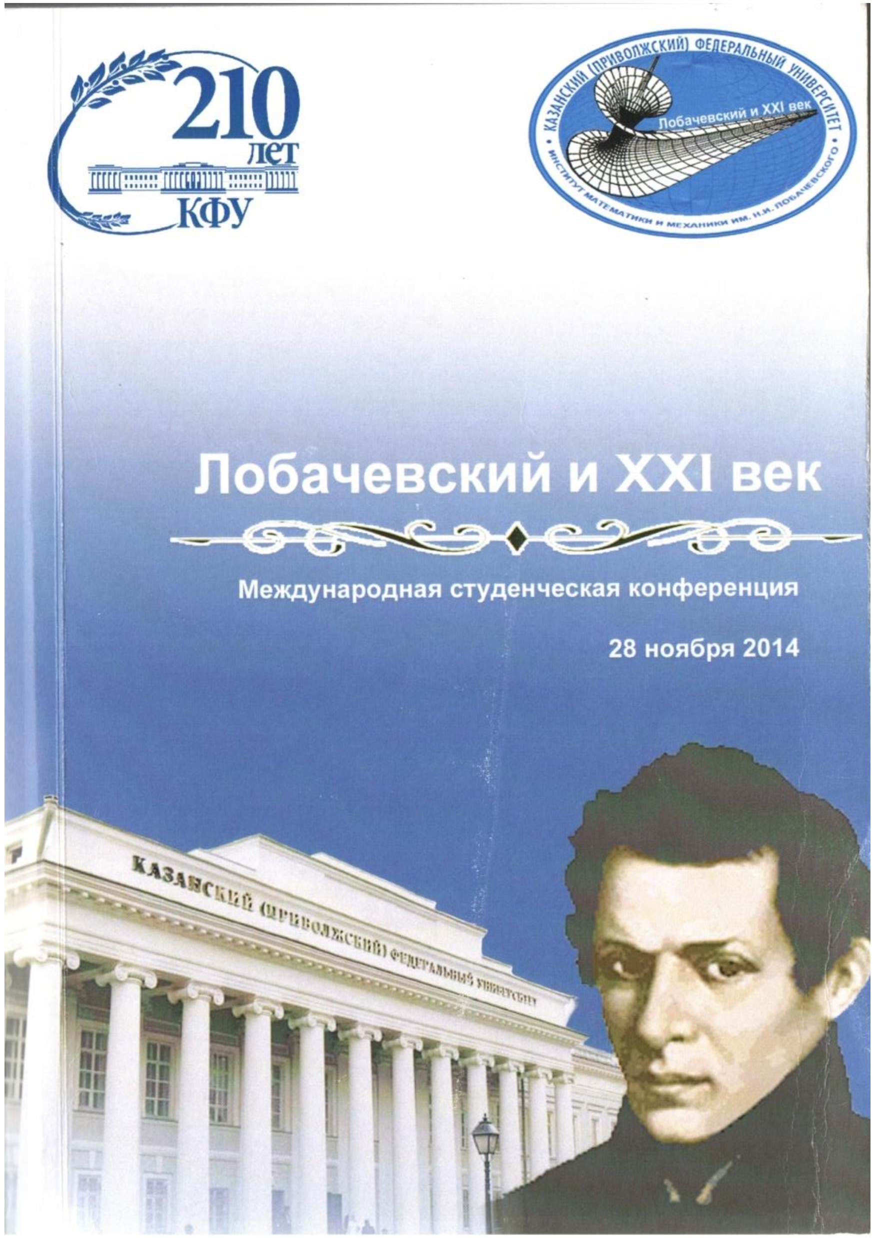
$$\pi_{p,q} = 2\int_0^1 \frac{dt}{(1-t^q)^{1/p}}.$$

Эта функция распространяется по симметрии на $(0, \pi_{p,q})$, затем по нечетности на $(-\pi_{p,q}, \pi_{p,q})$ и по периодичности – на все действительные значения y. В свою очередь, функцию $\operatorname{sh}_{p,q}(y)$ определим как функцию, обратную к интегралу

$$y = F_{p,q}(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^q)^{1/p}},$$

для положительных x и y, затем распространяем ее по нечетности для отрицательных y.

Приложение 3



КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

ЛОБАЧЕВСКИЙ И XXI ВЕК

Материалы
Международной студенческой конференции,
посвященной 210-летию Казанского университета
и Дню математики

г. Казань, 28 ноября 2014 года

КАЗАНЬ
2014

УДК 51
ББК 22.1
Л68

*Печатается по рекомендации
Ученого совета Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Казанского (Приволжского) федерального университета*

Научный редактор
доктор педагогических наук, профессор **Л.Р. Шакирова**

Печатается за счет средств субсидии
по Программе развития деятельности студенческих объединений
Казанского федерального университета

Л68 Лобачевский и XXI век: материалы Международной студенческой конференции, посвященной 210-летию Казанского университета и Дню математики / под ред. Л.Р. Шакировой. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – 258 с.

В сборнике представлены материалы студенческой конференции «Лобачевский и XXI век», посвященной 210-летию Казанского университета и Дню математики. В работах студентов отражены результаты самостоятельной поисковой, исследовательской работы, методические разработки, а также эссе, представленные на Международный конкурс на лучшую студенческую работу «Лобачевский и XXI век».

УДК 51
ББК 22.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

3. Лобачевский Н.И. Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма / под ред. П.С. Александрова, И.Н. Бронштейна, Б.Л. Лаптева, А.И. Маркушевича, В.В. Морозова, А.П. Нордена. М., 1976. – С. 664.
4. Речь Н.И. Лобачевского «О важнейших предметах воспитания». - 1828.
5. Синдаловский Б.Г. Очерки о русской науке / М.: Тип. К. Нестеренко, 1902. - С. 239.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПАРАЛЛЕЛИ С ВЕЛИКИМ ЛОБАЧЕВСКИМ

Идиятова Э.Э.
Россия, г. Казань,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Научный руководитель: к.п.н., доцент Шакирова К.Б.

В математике всего важнее способ преподавания.

Н.И. Лобачевский

Математики всего мира на любом конце земного шара знают город Казань благодаря выдающемуся ученому – геометру Н.И. Лобачевскому. Нам, студентам Казанского федерального университета, посчастливилось учиться в зданиях, построенных при нем, слушать лекции в знаменитом Актовом зале, заниматься в библиотеке, основанной Лобачевским, где сама обстановка способствует занятию наукой.

В университете мы знакомимся с величайшим открытием Лобачевского не только по учебникам геометрии, но и непосредственно читая его труды, а также труды исследователей его жизни и научной деятельности.

Читая о Николае Ивановиче Лобачевском, в том числе и художественные книги Д. Тарзиманова «*Лобачевский*» и «*Юность Лобачевского*», поражаемся разносторонностью и разумностью высказываний этого гениального человека. Нам были особо интересны и близки методические наставления Н.И. Лобачевского, как будущему учителю математики. Изучая содержательные методические рекомендации Н.И. Лобачевского, осознаешь, насколько значимы и актуальны его работы в наши дни.

К сожалению, за исключением двух наставлений по преподаванию математики и физики в гимназиях и речи «*О важнейших предметах воспитания*», Лобачевский не оставил каких-либо полных и развернутых работ, характеризующих его педагогические взгляды. Однако, даже эти материалы позволяют

при внимательном и комплексном их изучении говорить о крупном вкладе Лобачевского в развитие русской педагогической мысли.

Как будущим учителям математики нам было интересно узнать, что думал по поводу обучения геометрии Николай Иванович. Геометрия в ряду школьных предметов занимает особое место. Он (предмет) уникален с точки зрения формирования логического и пространственного мышления детей. Вопросы «*Чему учить?*» и «*Как учить?*» актуальны всегда. На эти вопросы отвечает методика обучения геометрии. Она раскрывает цели, задачи, принципы, формы, методы и средства обучения геометрии. Знакомясь с трудами самого Н.И. Лобачевского, а также исследователей его научной и педагогической деятельности, мы поставили *задачу*: *определить, как изменились и изменились ли вообще подходы к обучению геометрии?*

Н.И. Лобачевский преподавал Евклидову геометрию, что пробудило у него научный интерес к предмету и его основам. В конечном счете, это привело к величайшему научному открытию. На первичную педагогическую задачу (преподавание геометрии) он посмотрел глазами ученого, увидев за методической проблемой серьезную научную проблему. Такой взгляд присущ настоящему ученому.

Среди работ Лобачевского нет специального труда, посвященного методике обучения геометрии, но педагогические взгляды пронизывают все его наследие. Исследователи научной и педагогической деятельности Лобачевского систематизировали его высказывания по вопросам обучения, в которых отразилась сущность дидактической концепции великого геометра. В речи «*О важнейших предметах воспитания*» нашли отражение прогрессивные мировоззренческие и педагогические взгляды Лобачевского. Наибольший интерес для нас представляют «*Наставления учителям математики в гимназиях*», раскрывающие задачи, закономерности и принципы обучения. Повышенное внимание к методике математики объяснялось усилением роли математических знаний в жизни общества. Это характерно и для нашего времени. Для повышения уровня математического образования разрабатываются современные технологии обучения математике. Для нас очень важно, что Николай Иванович видел в своем педагогическом деле второе свое призвание и долг.

В отличие от многих его современников, занимающихся методикой математики, Лобачевский придерживался теоретического направления в этой науке, а именно от конкретной учебной задачи к дидактическому выводу, а от него к методическим рекомендациям. Процесс обучения он рассматривал как постепенное восхождение от чувственного восприятия к формированию отвлеченных понятий и суждений. «*Математическим наукам*, – писал он в «*Наставлениях*», – *служат те первые понятия, которые мы получаем в природе прямо* *чувствами; даже первые наши суждения о предметах, составляющих сии понятия, заключаются более в чувствах по навыку, нежели в действии ума»* [1]. Основной вопрос дидактики – содержание образования – Лобачевский решал, исходя из своего понимания цели и значения образования, которые заключались в вооружении молодежи знаниями.

Лобачевский строил конкретный план изучения математики, разбивая его на этапы:

- подготовка ребенка к переходу от чувственных впечатлений к абстрактному мышлению;
- установлению связей между понятиями;
- строгое математическое учение.

Интересно, что аналогичные мысли о структуре обучения спустя 30 лет высказал выдающийся русский педагог К.Д. Ушинский.

Геометрию, как «классический» предмет классического образования, – и по средствам, и по способам преподавания, и по целям преподавания – Лобачевский рассматривал, прежде всего, с точки зрения ее практической применимости.

Обучение Лобачевский рассматривал как единый процесс умственного и нравственного развития ребенка, что важно учитывать и в наши дни. Очень важным в дидактике является вопрос соотношения науки и учебного предмета. Великий Лобачевский, несмотря на свое открытие, рекомендовал до поры сохранять в основе старый способ преподавания геометрии. Логика науки никогда не вступала у Лобачевского в противоречие с логикой учебного предмета. Исходными требованиями Лобачевского к школьному обучению были ясность и отчетливость первоначальных понятий.

Лобачевский важнейшую роль в уяснении первоначальных понятий отводил наглядному преподаванию. В наглядности он видел не метод обучения, а фундаментальный общедидактический принцип, пронизывающий и содержание обучения и его методы. Система школьного математического образования, по Лобачевскому, должна обеспечивать последовательное продвижение учащихся от конкретных представлений к формированию отвлеченных понятий и далее – к их систематизации [1].

Важнейшую роль в реализации учебно-воспитательных задач Лобачевский отводил методам обучения. По его мнению, в достижении учебных целей, ведущую роль играет методическое искусство преподавания. «*Всякое преподавание*, – отмечал он, – *должно делаться занимательным не по сущности самого предмета, а по способу преподавания*» [1]. Лобачевский выделял два главных метода бучения – синтетический и аналитический, большое значение он придавал практическим методам обучения – устным и письменным упражнениям, лабораторным работам.

«*Наставления учителям математики в гимназиях, составленное г. ректором университета о[рдинарным] профессором Лобачевским*», написанное 16 августа 1830 г., может стать первоисточником по методике обучения математике и для современных учителей математики.

Вопросы методики обучения математике во все времена волновали ученых–математиков. И сегодня школьные учебники по алгебре и геометрии пишут академики. Например, учебник по геометрии для 10-11 классов и школ с углубленным изучением математики написан группой авторов под руководством академика А.Д. Александрова в рамках проекта «Российская академия наук, Российская академия образования, издательство «Просвещение» - российской школе». Учебники алгебры и начала анализа 10-11 классов под руководством академика С.М. Никольского в серии «МГУ – школе».

Литература

1. Александров П.С., Бронштейн И.Н., Лаптев Б.Л. Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма. – Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1976. – 664 стр.

УЧЕНЫЕ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Н.И. ЛОБАЧЕВСКИЙ И И.М. СИМОНОВ

Альдиванова А.В.,
Россия, г. Казань,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Научный руководитель: д.п.н., проф. Шакирова Л.Р.

Более тридцати лет два ученых и педагога – Николай Иванович Лобачевский и Иван Михайлович Симонов – рука об руку трудились во имя процветания Казанского университета и принесли ему мировую славу. Это были высокоодаренные личности в математических науках.

Цель работы заключается в сравнительном анализе научного вклада и деятельности Н.И. Лобачевского и И.М. Симонова в Казанском университете.

Объект исследования – биографические сведения о Н.И. Лобачевском и И.М. Симонове. *Предмет исследования* – научная, педагогическая и административная деятельность ученых в Казанском университете.

Приложение 4


Казанский (Приволжский) федеральный университет

XXIII Международная конференция

Математика. Образование. Информатизация.

Сборник тезисов

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.

Идиятова Э.Э., Шакирова К.Б.
К(П)ФУ,
Evelinochka_20@mail.ru.

Методы решения уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции, опираются на их свойства, а также на формулы, их связывающие. Свойства ограниченности и монотонности являются ключевыми при решении уравнений и неравенств с обратными тригонометрическими функциями. В статье рассматривается 4 основных метода решения таких уравнений и неравенств, приводятся образцы этих заданий.

1. **Уравнения и неравенства, левая и правая части которых являются одноименными обратными тригонометрическими функциями.** Данный метод основывается на свойстве монотонности этих функций. Примером могут служить следующие уравнения и неравенства.

Решите уравнение: $arcsin(3x^2 - 4x - 1) = arcsin(x + 1)$. Ответ: $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Решите неравенство: $3arcsin2x < 1$. Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}sin\frac{1}{3}\right)$.

2. **Уравнения и неравенства, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями.**

При решении уравнений и неравенств, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями, пользуются известными тригонометрическими тождествами.

Решите уравнение: $arccos\frac{7x+5}{13} = arcsin\frac{4x+1}{13}$. Ответ: $\{1\}$.

Решите неравенство: $arcsin\frac{x+2}{5} \leq arccos\frac{3x+1}{5}$. Ответ: $[-2; 1]$.

3. **Метод замены переменной.**

Некоторые уравнения и неравенства, которые содержат обратные тригонометрические функции, можно сводить к алгебраическим, для этого необходимо сделать соответствующую замену переменной.

Решите неравенство: $arccos^2x - 3arccosx + 2 \geq 2$.Ответ: $[-1; cos2] \cup [cos1; 1]$.

4. **Использование свойств монотонности и ограниченности обратных тригонометрических функций.**

Решения некоторых уравнений и неравенств, которые содержат обратные тригонометрические функции,основываются на определенных свойствах этих функций.

Пример. Решите уравнение: $2arcsin2x = 3arccosx$. Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

В данной работе мы рассмотрели свойства обратных тригонометрических функций и составили классификацию методов решения уравнений и неравенств, содержащих аркфункции. Статья содержит не только теоретический материал, но и практический (к каждому методу приводится пример с решением). Этот материал может быть полезен учителям, работающим в общеобразовательных и математических классах, а так же ученикам, поступающим в вузы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дроздов В.Б. Аркфункции в задачах // Математика в школе,2010.№4. С. 31–35.
2. Мирошин В.В. Обратные тригонометрические функции. М.: Чистые пруды, 2007. 32с.