Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, № 10, с. 73–76 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0095*

А.Ю. ДАНЬШИН

ГЕНЕРИРОВАНИЕ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ПОЧТИ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ОБЩЕГО ПРОСТРАНСТВА ПУТЕЙ ПРОЕКТИВНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ НА БАЗЕ

Аннотация. Найдены условия, при которых инфинитезимальное почти проективное преобразование на касательном расслоении общего пространства путей является полным лифтом Яно–Окубо–Кагана инфинитезимального проективного преобразования базового многообразия.

Ключевые слова: инфинитезимальное почти проективное преобразование, общее пространство путей, касательное расслоение, полный лифт Яно–Окубо–Кагана.

УДК: 514.763

Abstract. We obtain conditions under which an almost projective infinitesimal transformation on the tangent bundle of a general space of paths is a Yano–Okubo–Kagan complete lift of an infinitesimal projective transformation of a base manifold.

Keywords: infinitesimal almost projective transformations, general space of paths, tangent bundle, Yano–Okubo–Kagan lift.

Введение

В работе автора [1] была исследована общая структура векторного поля $\widetilde{v}$ на касательном расслоении $T(M(G))$ общего пространства путей (ОПП) $M(G)$ [2]. Поле $\widetilde{v}$ является инфинитезимальным проективным преобразованием связности $\widetilde{\Gamma}$, которая служит естественным лифтом связности G в ОПП:

$$\widetilde{v} = {}^N u + {}^V v + {}^{HX} A + {}^{VX} B + p(\dot{x})^{VX}\mathrm{id}. \tag{1}$$

В частности, векторное поле $u = u(x)$ на $M(G)$ является инфинитезимальным проективным преобразованием на $M(G)$,

$$\mathcal{L}_u G^i = \dot{x}^i q_k \dot{x}^k, \tag{2}$$

с проективным фактором $P = q_k(x)\dot{x}^k$, $\mathcal{L}_u$ — производная Ли вдоль векторного поля u.

Отметим специальный вид проективного фактора, найденного в работе [1]. Напомним, что в теории обобщенных пространств векторное поле u на ОПП называется инфинитезимальным проективным преобразованием в ОПП, если порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $x \in M$ локальная однопараметрическая группа преобразований сохраняет пути. Необходимое и достаточное условие этого состоит в равенстве [2]:

$$\mathcal{L}_u G^i = \dot{x}^i P, \tag{3}$$

Поступила 15.02.2010

где в общем случае проективный фактор $P = P(x, \dot{x})$ есть однородная функция первой степени по $\dot{x}$, не обязательно совпадающая с проективным фактором $P = q_k(x)\dot{x}^k$, соответствующим уравнению (2). Отсюда можно заключить, что полученные в [1] проективные преобразования, порождаемые векторным полем $u = u(x)$, не исчерпывают всех обобщенных преобразований вида (3).

Возникает вопрос: какие преобразования в касательном расслоении $T(M(G))$ общего пространства путей $T(M(G))$ порождают общие проективные преобразования на базе, т. е. преобразования, определяемые уравнением (3) с проективным фактором наиболее общего вида.

В работах А.В. Аминовой [3], [4] было введено понятие почти проективных преобразований. В недавних исследованиях автора [5] были рассмотрены аналогичные понятия для комплексов автопараллельных кривых на касательном расслоении общего пространства путей и найдены необходимые условия для того, чтобы векторное поле на $T(M(G))$ было инфинитезимальным почти проективным преобразованием относительно связности $\widetilde{\Gamma}$ в случае, когда комплексы являются полными лифтами тензорных полей базового многообразия. В ходе исследований автора установлено, что в более общем классе комплексов автопараллельных кривых [5] содержатся частные решения, отвечающие на поставленный выше вопрос.

В данной статье найден некоторый специальный класс обобщенных комплексов автопараллельных кривых в касательном расслоении, для каждого из которых векторное поле $u = u(x)$ в структуре соответствующего почти проективного преобразования является проективным преобразованием базового пространства в смысле уравнения (3).

1. Определения, обозначения, постановка задачи

В данной статье используются определения и обозначения, принятые в [6], [1], [5]. Уравнения почти проективных преобразований

$$\mathcal{L}_{\tilde{v}}\widetilde{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = 2\delta^{\alpha}_{(\beta}\widetilde{\varphi}_{\gamma)} + \widetilde{K}^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \tag{4}$$

в касательном расслоении со связностью полного лифта $\widetilde{\Gamma}$ подробно описаны в [5].

Результатом работы [1] является теорема, которая дает необходимый и достаточный критерий того, чтобы поле $\widetilde{v}$ являлось инфинитезимальным проективным преобразованием связности $\widetilde{\Gamma}$. Поэтому в рассматриваемых там уравнениях проективных преобразований в касательном расслоении со связностью полного лифта $\widetilde{\Gamma}$ искомые решения содержаться не могут. Анализ доказательства теоремы 1 из [1] показывает, что уравнения (3) можно рассматривать как следствия уравнений почти проективных преобразований [5], которые в терминах теории полных лифтов имеют вид

$$\underset{0}{v}{}^{i}{}_{\cdot k\cdot m} = \underset{0}{K}{}^{i}_{km},$$
$$\underset{1}{v}{}^{i}{}_{\cdot k\cdot m} - \underset{0}{v}{}^{t}G^{i}_{kmt} = 2\delta^{i}_{(k}\underset{0}{p}{}_{m)} + \underset{1}{K}{}^{i}_{km},$$
$$\nabla_k(\underset{0}{v}{}^{i}{}_{\cdot m}) = \delta^{i}_{k}\underset{0}{p}{}_{m} + \underset{2}{K}{}^{i}_{km},$$
$$\nabla_k(\underset{1}{v}{}^{i}{}_{\cdot m}) + \underset{1}{v}{}^{t}G^{i}_{kmt} + \underset{0}{v}{}^{t}{}_{\cdot m}H^{i}_{tks}\dot{x}^{s} + \underset{0}{v}{}^{t}H^{i}_{mkt} = \delta^{i}_{m}\underset{1}{p}{}_{k} + \underset{3}{K}{}^{i}_{km},$$
$$\underset{1}{v}{}^{t}G^{i}_{kmt} + \nabla_k\nabla_m\underset{0}{v}{}^{i} - \underset{0}{v}{}^{i}{}_{\cdot t}H^{t}_{mks}\dot{x}^{s} + \underset{0}{v}{}^{t}H^{i}_{mkt} = 2\delta^{i}_{(k}\underset{1}{p}{}_{m)} + \underset{6}{K}{}^{i}_{km},$$

$$\begin{aligned}\nabla_k\nabla_m\underset{1}{v}{}^{i} - \underset{1}{v}{}^{i}{}_{\cdot t}H^{t}_{mks}\dot{x}^{s} + \underset{1}{v}{}^{t}(H^{i}_{mkt} + \dot{x}^{s}\nabla_s G^{i}_{kmt}) + H^{i}_{tks}\dot{x}^{s}\nabla_m\underset{0}{v}{}^{t} + \\ + H^{i}_{tms}\dot{x}^{s}\nabla_k\underset{0}{v}{}^{t} + \underset{0}{v}{}^{t}(\dot{x}^{s}\nabla_k H^{i}_{tms} + \dot{x}^{s}\nabla_s H^{i}_{mkt} + H^{s}_{k}G^{i}_{tms} - H^{s}_{t}G^{i}_{kms}) = \underset{7}{K}{}^{i}_{km},\end{aligned} \tag{5}$$

где
$$H^i_{klm} = \partial_m G^i_{kl} - \partial_l G^i_{km} + G^s_{kl} G^i_{sm} - G^s_{km} G^i_{sl} + G^s_l G^i_{kms} - G^s_m G^i_{kls}$$
— тензор кривизны связности G [2].

Уравнения (5) отличаются от уравнений работы [1] наличием в правой части тензорных полей
$$\underset{0}{K}{}^i_{km}, \quad \underset{1}{K}{}^i_{km}, \quad \underset{2}{K}{}^i_{km}, \quad \underset{3}{K}{}^i_{km}, \quad \underset{6}{K}{}^i_{km}, \quad \underset{7}{K}{}^i_{km}, \tag{6}$$
полный лифт которых есть тензорное поле валентности $(2,1)$ на тотальном пространстве расслоения $T(M(G))$, связанное с комплексом автопараллельных кривых [5]. Однако, в отличие от [5], здесь не предполагается, что поля (6) зависят только от x, т. е. эти поля, вообще говоря, могут зависеть от $\dot{x}$.

Основной задачей является поиск решения уравнений (4), близкого по форме к разложению (1) и приводящего к условию (3).

2. Теорема о разложении инфинитезимальных почти проективных преобразований в $T(M(G))$ со специальным комплексом автопараллельных кривых

Решением поставленной задачи является

Теорема. *Пусть $M(G)$ — общее пространство путей $(n > 2)$ со связностью G и $\widetilde{K}$ — тензорное поле валентности $(2,1)$ на касательном расслоении $T(M(G))$, определяющее проективные преобразования комплекса автопараллельных кривых и имеющее специальный вид*
$$\widetilde{K} = {}^G[0, \underset{1}{K}, 0, 0, 0, 0, 0, 0],$$
где $\underset{1}{K}{}^i_{km}(x,\dot{x})$ — тензорное поле валентности $(2,1)$, однородное (-1)-й степени по $\dot{x}$ и удовлетворяющее условиям
$$\underset{1}{K}{}^i_{km}\dot{x}^m = 0, \quad \dot{x}^s \nabla_s \underset{1}{K}{}^l_{lk} = 0.$$
Для того чтобы векторное поле $\widetilde{v}$ на касательном расслоении $T(M(G))$ было инфинитезимальным почти проективным преобразованием связности $\widetilde{\Gamma}$, являющейся естественным лифтом связности G, необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид
$$\widetilde{v} = {}^N u + {}^V v + {}^{HX}A + {}^V B + p(\dot{x})^{VX}\mathrm{id},$$
где векторное поле $u = u(x)$ на M является инфинитезимальным проективным преобразованием на $M(G)$
$$\mathcal{L}_u G^i = \dot{x}^i P$$
с проективным фактором $P = P(x, \dot{x}^k)$, удовлетворяющим условию
$$\dot{x}^k \nabla_k P = 0,$$
векторное поле $v = v(x)$ на M является инфинитезимальным аффинным преобразованием на $M(G)$
$$\mathcal{L}_v G^i = 0$$
и удовлетворяет условиям
$$v^t G^i_{kmt} = 0, \quad v^t \dot{x}^s \nabla_s G^i_{kmt} = 0,$$
$p = p(x)$ — параллельная 1-форма на M
$$\nabla_k p_m = 0,$$

$A = A(x)$ — тензорное поле валентности $(1, 1)$ на M и $B = B(x, \dot{x})$ — векторное поле, однородное 1-й степени по $\dot{x}$, удовлетворяющие условиям

$$\nabla_k A^i_m = \delta^i_k p_m, A^s_t H^i_{mks} = 0, \nabla_k B^i_{\cdot m} = -\delta^i_k P_{\cdot m}, B^s H^i_{ks} - B^i_{\cdot s} H^s_{kt} \dot{x}^t = 0.$$

При этом уравнение для $\widetilde{v}$ имеет вид (4), где $\widetilde{\varphi} = {}^G[p, q]$, q есть 1-форма $q_k = P_{\cdot k}$.

Данная теорема дает частное решение поставленной выше задачи. Основной результат этой работы заключается в доказательстве существования связи между проективными преобразованиями обобщенных пространств и почти проективными преобразованиями в их касательных расслоениях.

В заключение автор благодарит профессора А.В. Аминову за постановку задачи и полезные советы.

Литература

[1] Даньшин А.Ю. *Инфинитезимальные проективные преобразования с естественным лифтом связности общего пространства путей*, Изв. вузов. Математика, №9, 8–12 (1997).

[2] Рунд Х. *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств* (Наука, М., 1981).

[3] Аминова А.В. *Определение бесконечно малых почти проективных преобразований*, Гравитация и теория относительности, вып. 13 (1976).

[4] Аминова А.В. *Группы почти проективных движений пространств аффинной связности*, Изв. вузов. Математика, №4, 71–75 (1979).

[5] Даньшин А.Ю. *О структуре векторных полей инфинитезимальных почти проективных преобразований в касательном расслоении общего пространства путей*, Изв. вузов. Математика, №9, 71–75 (2010).

[6] Каган Ф.И. *К теории лифтов тензорных полей из многообразия в его касательный пучок*, Изв. вузов. Математика, №9, 37–46 (1969).

А.Ю. Даньшин

доцент, кафедра теории относительности и гравитации,
Казанский государственный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420111,

`e-mail:` Alexander.Danshin@ksu.ru

A.Yu. Danshin

Associate Professor, Chair of Theory of Relativity and Gravitation,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Alexander.Danshin@ksu.ru