Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Специальность: 01.03.01 — Математика, бакалавр матиматики.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

Теория инвариантов конечных групп.

Работа завершена:
«____»________________2015 г. _________________Л.И. Огай
Работа проверена:
Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры алгебры и математической логики
«____»________________2015 г. _________________А.Н. Абызов
Заведующий кафедрой алгебры и математической логики
доктор физико-математических наук, профессор
«____»________________2015 г. _____________М. М. Арсланов

Казань — 2015 г.

Содержание

Введение

Дипломная работа посвящена алгебрам инвариантов некоторых конечных матричных групп. Найдены алгебры инвариантов циклических групп, групп Клейна, групп кватернионов, групп симметрии правильных многоугольников и некоторых правильных многогранников. В процессе написания дипломной работы активно использовалась теория базисов Грёбнера, теория инвариантов конечных групп. Основные вычисления были проведены в математическом пакете Maple.

Классическая теория инвариантов появилась в середине 19 века в Англии и заняла затем одно из центральных мест в математике второй половины 19 века. Своим возникновением теория инвариантов обязана трем наукам: теории чисел (гауссова классификация бинарных квадратичных форм), геометрии (проективные свойства кривых) и алгебре (теория определителей). Начальный период ее развития связан с творчеством Кэли, Сильвестра (придумавшего почти все термины теории, в том числе слово инвариант), Сальмона в Англии, Якоби, Гессе в Германии и Эрмита во Франции. Затем ведущую роль в развитии теории инвариантов начинают играть немецкие математики, среди которых особенно выделяются Аронгольд, Клебш, Гордан и Давид Гильберт.

Первая глава посвящена основным понятиям, в ней приводятся основные сведения из теории базисов Грёбнера и основные факты из теории инвариантов конечных групп.

Во второй главе приведены основные результаты. В первом параграфе второй главы были вычислены алгебры инвариантов групп Клейна и групп кватернионов. Далее были найдены алгебры инвариантов групп симметрий и групп вращений некоторых правильных многоугольников. Последние два параграфа второй главы посвящены вычислению алгебр инвариантов групп симметрий и вращений таких правильных многогранников, как куб и тетраэдр. В последнем параграфе второй главы приведены некоторые выводы и наблюдения, основанные на вычислениях в дипломной работе.

1 Предварительные сведения

1.1 Базисы Грёбнера.

Определение 1. *Мономиальным упорядочением* на $k[x_1, \ldots, x_n]$ называется любое бинарное отношение $>$ на $Z^n_{\geq 0}$, обладающее следующими свойствами:

1) $>$ является линейным упорядочением на $Z^n_{\geq 0}$.

2) если $\alpha > \beta$ и $\gamma \in Z^n_{\geq 0}$, то $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

3) $>$ вполне упорядочивает $Z^n_{\geq 0}$, т.е. любое непустое подмножество в $Z^n_{\geq 0}$ имеет минимальный (наименьший) элемент (по отношению к упорядочению $>$).

Примером мономиального упорядочения является лексикографическое упорядочение.

Определение 2. (*Лексикографическое упорядочение*). Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in Z^n_{\geq 0}$. Мы говорим, что $\alpha >_{lex} \beta$, если самая левая ненулевая координата вектора $\alpha - \beta \in Z^n$ положительна. Мы будем писать $x^\alpha >_{lex} x^\beta$, если $\alpha >_{lex} \beta$.

В дальнейшем мы будем использовать лексикографическое упорядочение.

Определение 3. Пусть задано мономиальное упорядочение. Конечное подмножество $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ элементов идеала I называется его *базисом Грёбнера* (или *стандартным базисом*), если

$$\langle LT(g_1), \ldots, LT(g_s)\rangle = \langle LT(I)\rangle.$$

Следствие 1. Пусть задано некоторое мономиальное упорядочение. Тогда любой ненулевой идеал $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ обладает базисом Грёбнера. Более того, базис Грёбнера идеала I является его пораждающим множеством.

Теорема 1. Для системы многочленов $g_1 \ldots g_n \in I$, где I - идеал алгебры многочленов от n переменных, следующие условия эквивалентны:

1) $g_1 \ldots g_n$ - базис Грёбнера идеала I.

2) Остаток от деления произвольного многочлена из I на многочлен $g_1 \ldots g_n$ всегда равен 0.

Определение 4. Пусть $I \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ - идеал и $f_1, \ldots, f_m$ - его базис. Говорят, что многочлены f_i и f_j имеют *зацепление*, если их старшие члены f_{iC} и f_{jC} делятся одновременно на некоторый одночлен ω, отличный от константы.

Теорема 2. Для каждого набора многочленов $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ после редуцирования конечного числа зацеплений мы получим набор

$f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}, \ldots, f_M$, в котором каждое зацепление разрешимо.

Теорема 3. (Бриллиантовая лемма). Базис $f_1, \ldots, f_m$ идеала I является базисом Грёбнера тогда и только тогда, когда в нем нет зацеплений или каждое зацепление разрешимо.

Теоремы 2 и 3 обосновывают существование эффективного алгоритма для построения базиса Грёбнера идеала. Этот алгоритм называется *алгоритмом Бухбергера.* Повторим еще раз его этапы. Пусть $f_1, \ldots, f_m$ - набор многочленов, являющийся базисом идеала I.

1) Проверим , есть ли в наборе зацепления. Если зацеплений нет, то набор является базисом Грёбнера идеала I, иначе переходим к пункту 2.

2) По найденному зацеплению(i, j) многочленов f_i и f_j положим $f_{iC} = \omega q_1, f_{jC} = \omega q_2$, и составим многочлен $F_{i,j} = f_i q_2 - f_j q_1$. Редуцируем многочлен $F_{i,j}$ с помощью набора f_i до тех пор, пока это возможно. Если многочлен $F_{i,j}$ редуцировался к ненулевому многочлену f, то переходим к пункту 3, иначе к пункту 4.

3) Добавляем многочлен f к набору $f_1, f_2, \ldots f_k$ в качестве f_{k+1} и переходим к пункту 4.

4) В построенном к настоящему моменту множестве многочленов $\{f_i\}$ рассматриваем зацепление, которое не было рассмотрено ранее и переходим к пункту 2. Если все имеющиеся зацепления ранее рассматривались, алгоритм завершен.

За конечное число шагов мы получим набор $f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}, \ldots, f_M$, где каждое зацепление разрешимо. Это и есть базис Грёбнера идеала $I = (f_1, \ldots, f_m)$.

Пусть $F : P[y_1, \ldots, y_m] \rightarrow P[x_1, \ldots, x_n]$ - гомоморфизм алгебр, этот гомоморфизм однозначно определяется образами порождающих:

$$F(y_1) = f_1(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\ldots$$

$$F(y_m) = f_m(x_1, \ldots, x_n)$$

Опишем способ нахождения ядра и образа:

$$KerF := \{h \in P[y_1, \ldots, y_m] | h(f_1, \ldots, f_m) = 0\},$$

$$ImF := P[f_1, \ldots, f_m].$$

Теорема 4. Пусть на множестве мономов $P[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ задан лексикографический порядок, при котором $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > y_1 > \cdots > y_n$. Если $I =< y_1 - f_1, \ldots, y_m - f_m >$ - идеал $P[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ и G-

базис Гребнера идеала I, то $G_0 = G \cap P[y_1, \ldots, y_m]$ - базис Гребнера идеала $I \cap P[y_1, \ldots, y_m]$.

Теорема 5. Пусть $I =< y_1 - f_1, \ldots, y_m - f_m >$ - идеал $P[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$. Тогда $KerF = I \cap P[y_1, \ldots, y_m]$.

Предыдущая теорема позвоялет находить все соотношения между полиномами $f_1, \ldots, f_m$. Таким образом, для того, чтобы найти все соотношения между многочленами $f_1, \ldots, f_m$ необходимо выполнить следующие действия:

а) Найти базис Грёбнера идеала $I =< y_1 - f_1, \ldots, y_m - f_m >$ алгебры $P[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$, при котором выполняется лексикографический порядок $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$.

б) В базисе Грёбнера идеала I находим все многочлены, зависящия только от $y_1, \ldots, y_m$. Семейство этих многочленов является базисом Грёбнера идеала I, состоящее из все полиномиальных соотношений многочлена $f_1, \ldots, f_m$.

Теорема 6. Пусть даны полиномы $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Рассмотрим мономиальное упорядочение в $k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$, такое, что любой моном, содержащий хотя бы одну из переменных x_i, больше всех мономов из $k[y_1, \ldots, y_m]$. Пусть G - базис Грёбнера идеала

$$\langle f_1 - y_1, \ldots, f_m - y_m \rangle \subset k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$$

Рассмотрим полином $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ и пусть $g = \bar{f}^G$ - его остаток от деления на G. Тогда

1)$f \in P[f_1, \ldots, f_n]$ в том и только то случае, когда $g \in P[y_1, \ldots, y_m]$;
2)Если $f \in P[f_1, \ldots, f_n]$, то $f = g(f_1, \ldots, f_m)$.

Предыдущая теорема 6 позволяет выяснить представление заданный многочлен f, как многочлен от $f_1, \ldots, f_m$. Опишем способ нахождения этого представления, если оно существует:

а) Найти базис Грёбнера G идеала $\langle f_1 - y_1, \ldots, f_m - y_m \rangle$.

б) Делим наш многочлен f на базис Грёбнера G.

в) Если его остаток от деления f на G зависит только от $y_1, \ldots, y_m$, то $f \in k[f_1, \ldots, f_n]$, в противном случае $f \notin k[f_1, \ldots, f_n]$.

г) Если g - остаток от деления f на G, то $f \in P[f_1, \ldots, f_n]$, то $f = g(f_1, \ldots, f_m)$.

Пример 1. Найти все полиномиальные соотношения:

$$f_1 = x^2 + y^2 + 1, \tag{1}$$

$$f_2 = xy - 1, \tag{2}$$

$$f_3 = x^2 - y^2 + 1. \tag{3}$$

Пусть $t_1 := x^2+y^2+1, t_2 := xy-1, t_3 := x^2-y^2+1$. С помощью теоремы 6 найдем соотношения, которые порождают идеал соотношений между t_1, t_2 и t_3. Проведенные вычисления показывают, что этот идеал порождается одним соотношением: $-t_3^2 - 4 + t_1^2 - 4t_2^2 + 2t_3 - 2t_1 - 8t_2$. Таким образом, множество всех полиномиальных соотношений между t_1, t_2, t_3 имеет вид: $(-t_3^2 - 4 + t_1^2 - 4t_2^2 + 2t_3 - 2t_1 - 8t_2) \cdot \mathbb{C}[t_1, t_2, t_3]$.

1.2 Конечные матричные группы и их алгебры инвариантов.

Определение 1. Пусть $G \subset GL(n,k)$ - конечная матричная группа. Полином $f(x) \in k[x_1, \ldots, x_n]$ называется *инвариантным* относительно группы G (или ее *инвариантом*), если

$$f(x) = f(A \cdot x),$$

для всех $A \in G$. Множество всех инвариантных относительно G полиномов обозначается как $k[x_1, \ldots, x_n]^G$.

Теорема 1. *Пусть $G \subset GL(n,k)$ - конечная матричная группа, тогда:*
1)*Множество $k[x_1, \ldots, x_n]^G$ замкнуто относительно сложения и умножения, а также содержит все константы.*
2)*Полином $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ инвариантен относительно G в том и только том случае, когда инвариантны его однородные компоненты.*

Лемма 1. Пусть $G \subset GL(n,k)$ - конечная матричная группа и матрицы $A_1, \ldots, A_m \in G$ таковы, что любая матрица $A \in G$ может быть представлена в виде.

$$A = B_1 B_2 \ldots B_t,$$

$B_i \in A_1, \ldots, A_m$ для любого i (другими словами,$A_1, \ldots, A_m$ порождают G). Тогда полином $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ инвариантен относительно G в том и только том случае, когда

$$f(x) = f(A_1 \cdot x) = \cdots = f(A_m \cdot x).$$

Пример 1. Рассмотрим группу перестановочных матрицы:

$$G_n = \left\{ \begin{pmatrix} e_{\bar{\sigma}(1)} \\ \ldots \\ e_{\bar{\sigma}(n)} \end{pmatrix} \,\middle|\, \sigma \in S_n \right\}, \text{ где } e_{\sigma(i)} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Например:

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Тогда многочлен f инвариантен относительно $G_n \Leftrightarrow f(A\bar{x}) = f(\bar{x}) \Leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma_{(1)}}, \ldots, x_{\sigma_{(n)}})$, таким образом $k[x_1, \ldots, x_n]^{G_n}$ = множество всех симметрических многочленов от n - переменных. Значит, каждый инвариант является полиномом от конечного числа инвариантов.

Пример 2. Возьмем циклическую группу $C_2 = \{\pm I_2\} \subset GL(2, k)$ второго порядка. В этом случае инвариантами являются $f \in k[x, y]$, такие, что $f(x, y) = f(-x, -y)$. Порождающая матрица этой группы:

$$I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \subset GL(2, k),$$

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(-x, -y) &\Longleftrightarrow \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j = \sum_{ij} a_{ij} (-x)^i (-y)^j \\ &\Longleftrightarrow \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j = \sum_{ij} a_{ij} (-1)^i x^i (-1)^j y^j \\ &\Longleftrightarrow a_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij} \end{aligned}$$

Таким образом, $a_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$, при всех $i+j$, следовательно, $a_{ij} = 0$, если $i+j$ нечетно. Значит, $a_{ij} \neq 0$, если $i+j$ - четное, значит, i - четное и j - четное, или i - нечетное и j - нечетное. Это значит, что каждый моном $x^i y^j$, входящий в f, имеет вид:

$$x^i y^j = \begin{cases} x^{2m} y^{2l} = (x^2)^m (y^2)^l, & \text{если } i, j \text{ четны}, \\ x^{2m+1} y^{2l+1} = (x^2)^m (y^2)^l xy, & \text{если } i, j \text{ нечетны}. \end{cases}$$

Значит,

$$k[x, y]^{C_2} = k[x^2, y^2, xy].$$

Определение 2. Пусть $G \subset GL(n, k)$ - конечная матричная группа. *Оператором Рейнольдса* называется отображение $R_G : k[x_1, \ldots, x_n] \to k[x_1, \ldots, x_n]$, которое действует по следующему правилу:

$$R_G(f)(x) = \frac{1}{\mid G \mid} \sum_{A \in G} f(A \cdot x),$$

где $f(x) \in k[x_1, \ldots, x_n]$.

Лемма 2. Для многочлена $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ следующие условия равносильны:
1) $f(x) \in k[x_1, \ldots, x_n]^G$.
2)$R_G(f) = f$.

1.3 Теорема Молина.

Теорема 1. Каждая конечная матричная группа $\Gamma \subset GL(C^n)$ имеет n алгебраически независимых инвариантов над $\mathbb{C}$, то есть $\mathbb{C}[x]^\Gamma$ - кольцо степени трансцендентности n.

Напомним, степенью трансцендентности алгебры $\mathbb{C}[x]^\Gamma$ называется максимальное количество алгебраически независимых многочленов их $\mathbb{C}[x]^\Gamma$.

Теорема 2. (Теорема Гильберта о конечности). Кольцо инвариантнов $\mathbb{C}[x]^\Gamma$ конечной матричной группы $\Gamma \subset GL(C^n)$ является конечно порожденным.

Теорема 3. (Теорема Нетера о граничности степени). Кольцо инвариантов $\mathbb{C}[x]^\Gamma$ конечной матричной группы Γ имеет не более чем $\binom{n+|\Gamma|}{n}$ инвариантов, чьи степени ограниченны порядком группы $|\Gamma|$.

Определение 1. Алгебра A называется **градуированной**, если A, как векторное пространство разлагается в прямую сумму $A = \oplus_{i=0}^{\infty} A_i$, причем выполняется : $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$. Алгебра инвариантов конечной группы $\mathbb{C}[x]^\Gamma$ является градуированной алгеброй.

Определение 2. Рядом Гильберта алгебры A называется ряд вида: $\sum_{d=0}^{\infty} z^i \cdot dim A_i$.

Ряд Гильберта для градуированной алгебры $\mathbb{C}[x]^\Gamma$ обозначается как $\Phi_\Gamma(z)$.

Теорема 4 (Теорема Молина). Ряд Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x]^\Gamma$ равен $\Phi_\Gamma(z) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\pi \in \Gamma} \frac{1}{det(id - z\pi)}$.

Лемма 1. Пусть $\Gamma \subset GL(C^n)$ конечная матричная группа. Тогда размерность подпространства инвариантов

$$V^\Gamma = \{v \in C^n : \pi v = v \text{ для всех } \pi \in \Gamma\}$$

равна $\frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\pi \in \Gamma} trace(\pi)$.

Лемма 2. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_m$ - алгебраически независимые элементы из $\mathbb{C}[x]$, имеющие однородные степени $d_1, d_2, \ldots, d_m$. Тогда ряд Гильберта подкольца $R := C[p_1, p_2, \ldots, p_m]$ равен $H(R, z) := \sum_{n=0}^{\infty} (dim_c R_d) z^d = \frac{1}{(1-z^{d_1})(1-z^{d_2})\ldots(1-z^{d_m})}$.

1.4 Теорема Шевалле - Шефарда - Тодда.

Определение 1. Пусть G - конечная группа. Будем говорить, что элемент $g \in G$ является **отражением**, если ровно $n-1$ из его собственных значений равны 1 и, кроме того, существует базис, состоящий из собственных векторов преобразования g.

Теорема 1. (Теорема Шевалле - Шефарда - Тодда.) Следующие свойства конечной группы G эквивалентны:

1) G является конечной группой, порожденной отражениями;

2) $\mathbb{C}[x]^G$ порождена n алгебраически независимыми однородными элементами.

2 Инварианты конечных групп

2.1 Алгебра инвариантов групп Клейна и групп кватернионов.

Пример 1. Рассмотрим конечную матричную группу

$$V_4 = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \subset GL(2,k),$$

с двумя порождающими матрицами этой группы:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Первое решение:

Согласано лемме 1 из §1.2, полином $f \in k[x,y]$ является инвариантом группы V_4 в том случае, если

$$f(x,y) = f(-x,y) = f(x,-y).$$

Пусть $f = \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(-x,y) &\Longleftrightarrow \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j = \sum_{ij} a_{ij} (-x)^i y^j \\ &\Longleftrightarrow \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j = \sum_{ij} a_{ij} (-1)^i x^i y^j \\ &\Longleftrightarrow a_{ij} = (-1)^i a_{ij} \end{aligned}$$

Таким образом, $a_{ij} = (-1)^j a_{ij}$, при всех i, j, следовательно, $a_{ij} = 0$, если i нечетно.

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x,-y) &\Longleftrightarrow \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j = \sum_{ij} a_{ij} x^i (-y)^j \\ &\Longleftrightarrow \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j = \sum_{ij} a_{ij} (-1)^j x^i y^j \\ &\Longleftrightarrow a_{ij} = (-1)^j a_{ij} \end{aligned}$$

Таким образом, $a_{ij} = (-1)^i a_{ij}$, при всех i, j, следовательно, $a_{ij} = 0$, если j нечетно. Значит $f(x, y) = f(x^2, y^2)$.
Ответ: $k[x, y]^{V_4} = k[x^2, y^2]$.

Второе решение:

Алгебра инвариантов группы V_4, состоящая из $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$.

Вычислим ряд Гильберта $\Phi_{V_4}(z)$ алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{V_4}$ используя теорему Молина:

$$\Phi_{V_4}(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1-z & 0\\ 0 & 1-z\end{smallmatrix}\right|} + \frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1+z & 0\\ 0 & 1-z\end{smallmatrix}\right|} + \frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1-z & 0\\ 0 & 1+z\end{smallmatrix}\right|} + \frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1+z & 0\\ 0 & 1+z\end{smallmatrix}\right|} + \right) =$$
$$= 1 + 2z^2 + 3z^4 + 4z^6 + 5z^8 + 6z^{10} + 7z^{12} + 8z^{14} + 9z^{16} + 10z^{18} + 11z^{20} + \ldots$$

Найдем инварианты наименьшей степени группы V_4, это $g_1 := x^2$ и $g_2 := y^2$. С помощью базиса Гребнера найдем соотношения между g_1 и g_2, в нашем случае их нет, значит, используя лемму 2 из §1.3 построим ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_2]$:

$$\frac{1}{(1-z^2)^2} = 1+2z^2+3z^4+4z^6+5z^8+6z^{10}+7z^{12}+8z^{14}+9z^{16}+10z^{18}+11z^{20}+\ldots$$

Алгебра $\mathbb{C}[g_1, g_2]$ подалгебра алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{V_4}$. Для того, чтобы доказать, что эти 2 алгебры равны, нам достаточно того, что для каждого $n \in N$ компоненты из $\mathbb{C}[g_1, g_2]_n$ и $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{V_4}$ имеют одинаковую размерность. Другими словами, мы должны показать, что ряд Гильберта $\mathbb{C}[g_1, g_2]$ равен ряду Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{V_4}$, что мы и показали.

Ответ: $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{V_4} = \mathbb{C}[x^2, y^2]$

Пример 2. Алгебра инвариантов группы Q_8.

$$Q_8 = \left\{ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} \right\}$$

Вычислим ряд Гильберта $\Phi_{Q_8}(z)$ алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{Q_8}$ используя теорему Молина:

$$\Phi_{Q_8}(z) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1-z & 0\\ 0 & 1-z\end{smallmatrix}\right|} + \frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1-Iz & 0\\ 0 & 1+Iz\end{smallmatrix}\right|} + \frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1+z & 0\\ 0 & 1+z\end{smallmatrix}\right|} + \frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1+Iz & 0\\ 0 & 1-Iz\end{smallmatrix}\right|} + \frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1 & -z\\ z & 1\end{smallmatrix}\right|} + \right.$$

$$+\frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1 & z\\ -z & 1\end{smallmatrix}\right|}+\frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1 & Iz\\ Iz & 1\end{smallmatrix}\right|}+\frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1 & -Iz\\ -Iz & 1\end{smallmatrix}\right|}\Bigg) = 1+2z^4+z^6+3z^8+2z^{10}+4z^{12}+3z^{14}+$$

$$+5z^{16}+4z^{18}+6z^{20}+5z^{22}+7z^{24}+6z^{26}+8z^{28}+\dots$$

Найдем первые инварианты: $g_1 := x^4+y^4$ и $g_2 := x^2y^2$. С помощью базиса Гребнера найдем соотношения между g_1 и g_2, в нашем случае их нет, значит, используя лемму 1 построим ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_2]$:

$$\frac{1}{(1-z^4)^2} = 1+2z^4+3z^8+4z^{12}+5z^{16}+6z^{20}+7z^{24}+8z^{28}+9z^{32}+10z^{36}\dots$$

Полученный ряд не совпадает, не хватает члена z^6, значит найдем инвариант шестой степени $g_3 := x^5y - xy^5$. С помощью базиса Гребнера найдем соотношение (между g_1, g_2 и g_3): $g_1^2g_2 - 4g_2^3 - g_3^2$. Это значит, что каждый полином $p \in \mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$ может выражаться однозначно в виде $p(g_1, g_2, g_3) = q(g_1, g_2) + g_3 \cdot r(g_1, g_2)$, где q и r полиномы от двух переменных. Другимим словами, градуированная алгебра $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$ раскладывается как прямая сумма.

$$\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3] = \mathbb{C}[g_1, g_3] \oplus g_3C[g_1, g_2]$$

Используя лемму 2 из §1.3, построим ряд Гильберта :

$$\frac{1}{(1-z^4)^2}+\frac{z^6}{(1-z^4)^2} = 1+2z^4+z^6+3z^8+2z^{10}+4z^{12}+3z^{14}+5z^{16}+4z^{18}+$$

$$+6z^{20}+5z^{22}+7z^{24}+6z^{26}+8z^{28}+\dots$$

Алгебра $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$ подалгебра алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{Q_8}$. Для того, чтобы доказать, что эти 2 алгебры равны, нам достаточно того, что для каждого $n \in N$ компоненты из $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]_n$ и $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{Q_8}$ имеют одинаковую размерность. Другими словами, мы должны показать, что ряд Гильберта $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$ равен ряду Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{Q_8}$, что мы и показали.

Ответ: $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{Q_8} = \mathbb{C}[x^4+y^4, x^2y^2, x^5y - xy^5]$

2.2 Алгебра инвариантов циклических групп и групп диэдра.

Пример 1. Рассмотрим матричную циклическую группу $C_4 \subset GL(2,k)$ порядка 4, порожденную матрицей

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Первое решение:

Найдем оператор Рейнольдса группы C_4 с помощью формулы:

$$R_{C_4}(f)(x,y) = \frac{1}{4}(f(x,y) + f(ix,-iy) + f(-x,-y) + f(-ix,iy))$$

Посчитаем оператор Рейнольдса для мономов $x^i y^j$, количество мономов: $i + j \leq 4$.

$$R_{C_4}(x^2) = \frac{1}{4}(x^2 - x^2 + x^2 - x^2) = 0$$

$$R_{C_4}(xy) = \frac{1}{4}(xy + xy + xy + xy) = xy$$

$$R_{C_4}(y^2) = \frac{1}{4}(y^2 + y^2 - y^2 - y^2) = 0$$

$$R_{C_4}(x^2y) = \frac{1}{4}(x^2y - x^2y + ix^2y - ix^2y) = 0$$

$$R_{C_4}(x^3y) = \frac{1}{4}(x^3y + x^3y - x^3y - x^3y) = \frac{1}{2}x^3y - \frac{1}{2}x^3y = 0$$

$$R_{C_4}(x^2y^2) = \frac{1}{4}(x^2y^2 + x^2y^2 + x^2y^2 + x^2y^2) = x^2y^2$$

$$R_{C_4}(x^4) = \frac{1}{4}(x^4 + x^4 + x^4 + x^4) = x^4$$

$$R_{C_4}(y^4) = \frac{1}{4}(y^4 + y^4 + y^4 + y^4) = y^4$$

Как видно, инвариант x^2y^2 выражается через инвариант xy, поэтому его можно не писать. Таким образом: $xy, x^4, y^4 \in k[x,y]^{C_4}$. Эти инварианты порождают кольцо $k[x,y]^{C_4}$.

Второе решение:

Алгебра инвариантов группы C_4, состоящая из $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)$.

Вычислим ряд Гильберта $\Phi_{C_4}(z)$ алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{C_4}$ используя теорему Молина:

$$\Phi_{C_4}(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\left|\begin{smallmatrix} 1-z & 0 \\ 0 & 1-z \end{smallmatrix}\right|} + \frac{1}{\left|\begin{smallmatrix} 1+z & 0 \\ 0 & 1+z \end{smallmatrix}\right|} + \frac{1}{\left|\begin{smallmatrix} 1-iz & 0 \\ 0 & 1+iz \end{smallmatrix}\right|} + \frac{1}{\left|\begin{smallmatrix} 1+iz & 0 \\ 0 & 1-iz \end{smallmatrix}\right|}\right) = 1 + z^2 +$$

$$+3z^4 + 3z^6 + 5z^8 + 5z^{10} + 7z^{12} + 7z^{14} + 9z^{16} + 9z^{18} + 11z^{20} + \ldots$$

Найдем инварианты наименьшей степени группы C_4, это $g_1 := xy$ и $g_2 := x^2y^2$. Уже видно, что $g_2 = g_1^2$, поэтому возьмем следующий инвариант $g_3 : x^4$. С помощью базиса Гребнера найдем соотношения между g_1 и g_3, в нашем случае их нет, значит, используя лемму 2 из §1.3 построим ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_3]$:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^4)} = 1+z^2+2z^4+2z^6+3z^8+3z^{10}+4z^{12}+4z^{14}+5z^{16}+5z^{18}+6z^{20}+\ldots$$

Полученный ряд не совпадает, не хватает члена z^4, значит найдем инвариант шестой степени $g_4 := y^4$. С помощью базиса Гребнера найдем соотношение (между g_1, g_3 и g_4): $g_1^4 - g_3g_2$. Это значит, градуированная алгебра $\mathbb{C}[g_1, g_3, g_4]$ раскладывается как прямая сумма:

$$\mathbb{C}[g_1, g_3, g_4] = \mathbb{C}[g_3, g_4] \oplus g_1\mathbb{C}[g_3, g_4] \oplus g_1^2\mathbb{C}[g_3, g_4] \oplus g_1^3\mathbb{C}[g_3, g_4]$$

Используя лемму 2 из §1.3, построим ряд Гильберта :

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^4)} + \frac{z^2}{(1-z^2)(1-z^4)} + \frac{z^4}{(1-z^2)(1-z^4)} + \frac{z^6}{(1-z^2)(1-z^4)} =$$

$$= 1 + z^2 + 3z^4 + 3z^6 + 5z^8 + 5z^{10} + 7z^{12} + 7z^{14} + 9z^{16} + 9z^{18} + 11z^{20} + \ldots$$

Алгебра $\mathbb{C}[g_1, g_3, g_4]$ подалгебра алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{C_4}$. Для того, чтобы доказать, что эти 2 алгебры равны, нам достаточно того, что для каждого $n \in N$ компоненты из $\mathbb{C}[g_1, g_3, g_4]_n$ и $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{C_4}$ имеют одинаковую размерность. Другими словами, мы должны показать, что ряд Гильберта $\mathbb{C}[g_1, g_3, g_4]$ равен ряду Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{C_4}$, что мы и показали.

Ответ: $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{C_4} = \mathbb{C}[xy, x^4, y^4]$

Пример 2. Алгебра инвариантов $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{z_4}$ группы $\{(\pm\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}), (\pm\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix})\}$ образована инвариантами $I_1 := x_1^2 + x_2^2$ и $I_2 := x_1^2x_2^2$ и $I_3 := x_1x_2^3 - x_1^3x_2$.

Доказательство. Алгебра $\mathbb{C}[I_1, I_2, I_3]$ подалгебра алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{z_4}$. Для того, чтобы доказать, что эти 2 алгебры равны, нам достаточно того, что для каждого $d \in N$ компоненты из $\mathbb{C}[I_1, I_2, I_3]_d$ и $\mathbb{C}[x_1, x_2]_d^{z_4}$ имеют одинаковую размерность. Другими словами, мы должны показать, что ряд Гильберта $\mathbb{C}[I_1, I_2, I_3]$ равен ряду Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_2]$.

Вычислим ряд Гилберьта $\Phi_{z_4}(z)$ от $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{z_4}$ используя теорему Молина:

$$\Phi_{z_4}(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\left|\begin{smallmatrix} 1-z & 0 \\ 0 & 1-z \end{smallmatrix}\right|} + \frac{1}{4}\frac{1}{\left|\begin{smallmatrix} 1+z & 0 \\ 0 & 1+z \end{smallmatrix}\right|} + \frac{1}{4}\frac{1}{\left|\begin{smallmatrix} 1 & z \\ -z & 1 \end{smallmatrix}\right|} + \frac{1}{4}\frac{1}{\left|\begin{smallmatrix} 1 & -z \\ z & 1 \end{smallmatrix}\right|}\right) = 1 + z^2 + 3z^4 +$$
$$+3z^6 + 5z^8 + 5z^{10} + 7z^{12} + \dots$$

Таким же образом находится ряд Гильберта и для $\mathbb{C}[I_1, I_2, I_3]$. Используя метод базиса Грёбнера находим алгебраическое отношение $I_3^2 - I_2 I_1 + 4I_2^2$ образовано идеалом из I_j. Это значит, что каждый полином $p \in \mathbb{C}[I_1, I_2, I_3]$ может выражаться однозначно в виде $p(I_1, I_2, I_3) = q(I_1, I_2) + I_3 \cdot r(I_1, I_2)$, где q и r полиномы от двух переменных. Другимим словами, градуированная алгебра раскладывается как прямая сумма.

$$\mathbb{C}[I_1, I_2, I_3] = \mathbb{C}[I_1, I_3] \oplus I_3\mathbb{C}[I_1, I_2]$$

Первый компонент в этом разложении - это полукольцо, образованное алгебраически независимыми однородными полиномами. Используя лемму 1 из §1.3, мы получим, что ряд Гильберта будет равен $\frac{1}{(1-z^2)(1-z^4)}$. Поскольку элементы со степенью d из $\mathbb{C}[I_1, I_2]$ в один в один равны элементам со степенью $d + 4$ из $I_3[I_1, I_2]$, то ряд Гильберта второго компонента равен $\frac{z^4}{(1-z^2)(1-z^4)}$. Сумма этих двух рядов даёт нам ряд Гильберта для $\mathbb{C}[I_1, I_2, I_3]$.

Пример 3. Алгебра инвариантов группы $D_3 = \{e, a, a^2, b, ba, ba^2\}$, где $e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\frac{1}{2}a = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Вычислим ряд Гильберта $\Phi_{D_3}(z)$ алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{D_3}$ используя теорему Молина:

$$\Phi_{D_3}(z) = 1 + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + 2z^6 + z^7 + 2z^8 + 2z^9 + \dots$$

Найдем инварианты второй и третьей степени: $g_1 := x^2 + y^2, g_2 := x^3 - 3xy^2$.

С помощью базиса Гребнера найдем соотношения между g_1 и g_2, в нашем случае их нет, значит, используя лемму 2 из §1.3 построим ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_2]$:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)} = 1 + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + 2z^6 + z^7 + 2z^8 + 2z^9 + \dots$$

Алгебра $\mathbb{C}[g_1, g_2]$ подалгебра алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{D_3}$. Для того, чтобы доказать, что эти 2 алгебры равны, нам достаточно того, что для каждого $n \in N$ компоненты из $\mathbb{C}[g_1, g_2]_n$ и $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{D_3}$ имеют одинаковую конечную размерность. Другими словами, мы должны показать, что ряд Гильберта $\mathbb{C}[g_1, g_2]$ равен ряду Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{D_3}$, что мы и показали.

Ответ: $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{D_3} = \mathbb{C}[x^2 + y^2, x^3 - 3xy^2]$

Рассмотрим неполную группу симметрии, а лишь группу вращения $C_3 = \{e, a, a^2\}$, где $e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $a = \frac{1}{2}a = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

Вычислим ряд Гильберта $\Phi_{C_3}(z)$ алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{C_3}$ используя теорему Молина:

$$\Phi_{C_3}(z) = 1 + z^2 + 2z^3 + z^4 + 2z^5 + 3z^6 + 2z^7 + 3z^8 + 4z^9 + \dots$$

Найдем инварианты группы C_3, это инвариант второй степени: $g_1 := x^2 + y^2$ и инвариант третьей степени: $g_2 := x^3 - 3xy^2$. С помощью базиса Гребнера найдем соотношения между g_1 и g_2, в нашем случае их нет, значит, используя лемму 2 из §1.3 построим ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_2]^{C_3}$:

$$\frac{1}{(1 - z^2)(1 - z^3)} = 1 + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + 2z^6 + z^7 + 2z^8 + 2z^9 + \dots$$

Как мы можем видеть, не хватает инварианта третьей степени, найдем его: $g_3 := 3x^2y - y^3$. С помощью базиса Гребнера найдем соотношения между g_1, g_2 и g_3, в нашем случае появляется соотношение: $g_1^3 - g_3^2 - g_2^2 = 0$.

Значит, ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$, будет выглядеть так:

$$\frac{1}{(1 - z^2)(1 - z^3)} + \frac{z^3}{(1 - z^2)(1 - z^3)} = 1 + z^2 + 2z^3 + z^4 + 2z^5 + 3z^6 + 2z^7 + 3z^8 + 4z^9 + \dots$$

Алгебра $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$ подалгебра алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{C_3}$. Для того, чтобы доказать, что эти 2 алгебры равны, нам достаточно того, что для каждого $n \in N$ компоненты из $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]_n$ и $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{C_3}$ имеют одинаковую размерность. Другими словами, мы должны показать, что ряд Гильберта $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$ равен ряду Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{C_3}$, что мы и показали.

Ответ: $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{C_3} = \mathbb{C}[x^2 + y^2, x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3]$

Пример 4. Алгебра инвариантов группы $D_4 = \{e, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$, где $e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $a = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Вычислим ряд Гильберта $\Phi_{D_4}(z)$ алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{D_4}$ используя теорему Молина:

$$\Phi_{D_4}(z) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1-z & 0\\ 0 & 1-z\end{smallmatrix}\right|}+\frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1 & z\\ -z & 1\end{smallmatrix}\right|}+\frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1+z & 0\\ 0 & 1+z\end{smallmatrix}\right|}+\frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1 & -z\\ z & 1\end{smallmatrix}\right|}+\frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1-z & 0\\ 0 & 1+z\end{smallmatrix}\right|}+\frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1 & z\\ z & 1\end{smallmatrix}\right|}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1+z & 0\\ 0 & 1-z\end{smallmatrix}\right|}+\frac{1}{\left|\begin{smallmatrix}1 & -z\\ -z & 1\end{smallmatrix}\right|}\right) = 1+z^2+2z^4+2z^6+3z^8+3z^{10}+4z^{12}+4z^{14}+5z^{16}+\ldots$$

Найдем инварианты группы D_4, это инвариант второй степени: $g_1 := x^2+y^2$ и инвариант четвертой степени: $g_2 := x^2y^2$. С помощью базиса Гребнера найдем соотношения между g_1 и g_2, в нашем случае их нет, значит, используя лемму 2 из §1.3 построим ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_2]$:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^4)} = 1+z^2+2z^4+2z^6+3z^8+3z^{10}+4z^{12}+4z^{14}+5z^{16}+5z^{18}+\ldots$$

Алгебра $\mathbb{C}[g_1, g_2]$ подалгебра алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{D_4}$. Для того, чтобы доказать, что эти 2 алгебры равны, нам достаточно того, что для каждого $n \in N$ компоненты из $\mathbb{C}[g_1, g_2]_n$ и $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{D_4}$ имеют одинаковую конечную размерность. Другими словами, мы должны показать, что ряд Гильберта $\mathbb{C}[g_1, g_2]$ равен ряду Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{D_4}$, что мы и показали.

Ответ: $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{D_4} = \mathbb{C}[x^2+y^2, x^2y^2]$

Рассмотрим неполную группу симметрии, а лишь группу вращения $C_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$, где $e = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ и $a = \left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$.

Вычислим ряд Гильберта $\Phi_{C_4}(z)$ алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{C_4}$ используя теорему Молина:

$$\Phi_{C_4}(z) = 1 + z^2 + 3z^4 + 3z^6 + 5z^8 + 5z^{10} + 7z^{12} + 7z^{14} + \ldots$$

Найдем инварианты группы C_4, это инвариант второй степени: $g_1 := x^2+y^2$ и инвариант четвертой степени: $g_2 := x^2y^2$. С помощью базиса Гребнера найдем соотношения между g_1 и g_2, в нашем случае их нет, значит, используя лемму 2 из §1.3 построим ряд Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[g_1, g_2]^{C_4}$:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^4)} = 1+z^2+2z^4+2z^6+3z^8+3z^{10}+4z^{12}+4z^{14}+5z^{16}+5z^{18}+\ldots$$

Как мы можем видеть, не хватает инварианта четвертой степени, найдем его: $g_3 := xy^3 - x^3y$. С помощью базиса Гребнера найдем соотношения между g_1, g_2 и g_3, в нашем случае появляется соотношение: $-4g_2^2+g_2g_1^2-g_3^2 = 0$.

Значит, ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$ будет выглядеть так:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^4)}+\frac{z^4}{(1-z^2)(1-z^4)} = 1+z^2+3z^4+3z^6+5z^8+5z^{10}+7z^{12}+7z^{14}+\dots$$

Алгебра $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$ подалгебра алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{C_4}$. Для того, чтобы доказать, что эти 2 алгебры равны, нам достаточно того, что для каждого $n \in N$ компоненты из $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]_n$ и $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{D_4}$ имеют одинаковую размерность. Другими словами, мы должны показать, что ряд Гильберта $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$ равен ряду Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{C_4}$, что мы и показали.

Ответ: $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{C_4} = \mathbb{C}[x^2+y^2, x^2y^2, xy^3-x^3y]$

Пример 5. Алгебра инвариантов группы $D_5 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, b, ba, ba^2, ba^3, ba^4\}$, где $e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $a = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) & -\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}} \\ \sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}} & \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \end{pmatrix}$, $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Вычислим ряд Гильберта $\Phi_{D_5}(z)$ алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{D_5}$ используя теорему Молина:

$$\Phi_{D_5}(z) = 1 + z^2 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + z^9 + 2z^{10} + z^{11} + \dots$$

Найдем инварианты группы D_5, это инвариант второй степени: $g_1 := x^2 + y^2$ и инвариант пятой степени: $g_2 := x^5 + 5xy^4 - 10x^3y^2$. С помощью базиса Гребнера найдем соотношения между g_1 и g_2, в нашем случае их нет, значит, используя лемму 2 из §1.3 построим ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_2]$:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^5)} = 1 + z^2 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + z^9 + 2z^{10} + z^{11} + \dots$$

Алгебра $\mathbb{C}[g_1, g_2]$ подалгебра алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{D_5}$. Для того, чтобы доказать, что эти 2 алгебры равны, нам достаточно того, что для каждого $n \in N$ компоненты из $\mathbb{C}[g_1, g_2]_n$ и $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{D_5}$ имеют одинаковую конечную размерность. Другими словами, мы должны показать, что ряд Гильберта $\mathbb{C}[g_1, g_2]$ равен ряду Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{D_5}$, что мы и показали.

Ответ: $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{D_5} = \mathbb{C}[x^2+y^2, x^5+5xy^4-10x^3y^2]$

Рассмотрим неполную группу симметрии, а лишь группу вращения $C_5 = \{e, a, a^2, a^3, a^4\}$, где $e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $a = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) & -\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}} \\ \sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}} & \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \end{pmatrix}$.

Вычислим ряд Гильберта $\Phi_{C_5}(z)$ алгебры $\mathbb{C}[x_1,x_2]^{C_5}$ используя теорему Молина, он равен:

$$\Phi_{C_5}(z) = 1 + z^2 + z^4 + 2z^5 + z^6 + 2z^7 + z^8 + 2z^9 + 3z^{10} + 2z^{11} + \dots$$

Найдем инварианты группы C_5, это инвариант второй степени: $g_1 := x^2 + y^2$ и инвариант пятой степени: $g_2 := x^5 + 5xy^4 - 10x^3y^2$. С помощью базиса Гребнера найдем соотношения между g_1 и g_2, в нашем случае их нет, значит, используя лемму 2 из §1.3 построим ряд Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[g_1,g_2]^{C_5}$:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^5)} = 1 + z^2 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + z^9 + 2z^{10} + z^{11} + \dots$$

Как мы можем видеть, не хватает инварианта пятой степени, найдем его: $g_3 := -y^5 - 5x^4y + 10x^2y^3$. С помощью базиса Гребнера найдем соотношения между g_1, g_2 и g_3, в нашем случае появляется соотношение: $g_1^5 - g_3^2 - g_2^2 = 0$.

Значит, ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1,g_2,g_3]$ будет выглядеть так:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^5)} + \frac{z^5}{(1-z^2)(1-z^5)} = 1+z^2+z^4+2z^5+z^6+2z^7+z^8+2z^9+3z^{10}+\dots$$

Алгебра $\mathbb{C}[g_1,g_2,g_3]$ подалгебра алгебры $\mathbb{C}[x_1,x_2]^{C_5}$. Для того, чтобы доказать, что эти 2 алгебры равны, нам достаточно того, что для каждого $n \in N$ компоненты из $\mathbb{C}[g_1,g_2,g_3]_n$ и $\mathbb{C}[x_1,x_2]_n^{C_5}$ имеют одинаковую размерность. Другими словами, мы должны показать, что ряд Гильберта $\mathbb{C}[g_1,g_2,g_3]$ равен ряду Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x_1,x_2]_n^{C_5}$, что мы и показали.

Ответ: $\mathbb{C}[x_1,x_2]^{C_5} = \mathbb{C}[x^2+y^2, x^5+5xy^4-10x^3y^2, -y^5-5x^4y+10x^2y^3]$

Пример 6. Алгебра инвариантов группы $D_6 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, b, ba, ba^2, ba^3, ba^4, ba^5\}$, где $e = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$, $b = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$.

Вычислим ряд Гильберта $\Phi_{D_6}(z)$ алгебры $\mathbb{C}[x_1,x_2]^{D_6}$ используя теорему Молина:

$$\Phi_{D_6}(z) = 1+z^2+z^4+2z^6+2z^8+2z^{10}+3z^{12}+3z^{14}+3z^{16}+4z^{18}+4z^{20}+4z^{22}+\dots$$

Найдем инварианты группы D_6, это инвариант второй степени: $g_1 := x^2+y^2$ и инвариант шестой степени: $g_2 := 33x^6+45x^4y^2+135x^2y^4+27y^6$. С помощью базиса Гребнера найдем соотношения между g_1 и g_2, в нашем случае их нет, значит, используя лемму 2 из §1.3 построим ряд Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[g_1, g_2]^{D_6}$:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^6)} = 1+z^2+z^4+2z^6+2z^8+2z^{10}+3z^{12}+3z^{14}+3z^{16}+4z^{18}+4z^{20}+\dots$$

Алгебра $\mathbb{C}[g_1, g_2]$ подалгебра алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{D_6}$. Для того, чтобы доказать, что эти 2 алгебры равны, нам достаточно того, что для каждого $n \in N$ компоненты из $\mathbb{C}[g_1, g_2]_n$ и $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{D_6}$ имеют одинаковую размерность. Другими словами, мы должны показать, что ряд Гильберта $\mathbb{C}[g_1, g_2]$ равен ряду Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{D_6}$, что мы и показали.

Ответ: $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{D_6} = \mathbb{C}[x^2 + y^2, 33x^6 + 45x^4y^2 + 135x^2y^4 + 27y^6]$

Рассмотрим неполную группу симметрии, а лишь группу вращения $C_6 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$, где $e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислим ряд Гильберта $\Phi_{C_6}(z)$ алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{C_6}$ используя теорему Молина:

$$\Phi_{C_6}(z) = 1 + z^2 + z^4 + 3z^6 + 3z^8 + 3z^{10} + 5z^{12} + \dots$$

Найдем инварианты группы C_6, это инвариант второй степени: $g_1 := x^2+y^2$ и инвариант шестой степени: $g_2 := 9xy^5 + 9x^5y - 30x^3y^3$.С помощью базиса Гребнера найдем соотношения между g_1 и g_2, в нашем случае их нет, значит, используя лемму 2 из §1.3 построим ряд Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[g_1, g_2]^{C_6}$:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^6)} = 1 + z^2 + z^4 + 2z^6 + 2z^8 + 2z^{10} + 3z^{12} + 3z^{14} + \dots$$

Как мы можем видеть, не хватает инварианта шестой степени, найдем его: $g_3 := 33x^6 + 45x^4y^2 + 135x^2y^4 + 27y^6$. С помощью базиса Гребнера найдем соотношения между g_1, g_2 и g_3, в нашем случае появляется соотношение:

$891g_1^6 - 60g_1^3g_2 + g_2^2 + 4g_3^2 = 0.$

Значит, ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$ будет выглядеть так:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^6)} + \frac{z^6}{(1-z^2)(1-z^6)} = 1+z^2+z^4+3z^6+3z^8+3z^{10}+5z^{12}+\dots$$

Алгебра $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$ подалгебра алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{C_6}$. Для того, чтобы доказать, что эти 2 алгебры равны, нам достаточно того, что для каждого $n \in N$ компоненты из $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]_n$ и $C[x_1, x_2]_n^{C_6}$ имеют одинаковую размерность. Другими словами, мы должны показать, что ряд Гильберта $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$ равен ряду Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{C_6}$, что мы и показали.

Ответ: $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{C_6} = \mathbb{C}[x^2 + y^2, 9xy^5 + 9x^5y - 30x^3y^3, 33x^6 + 45x^4y^2 + 135x^2y^4 + 27y^6]$

Пример 7. Алгебра инвариантов группы $D_8 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, b, ba, ba^2, ba^3, ba^4, ba^5, ba^6, ba^7\}$, где $e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Вычислим ряд Гильберта $\Phi_{D_8}(z)$ алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{D_8}$ используя теорему Молина:

$$\Phi_{D_8}(z) = 1+z^2+z^4+z^6+2z^8+2z^{10}+2z^{12}+2z^{14}+3z^{16}+3z^{18}+3z^{20}+3z^{22}+4z^{24}+\dots$$

Найдем инварианты группы D_8, это инвариант второй степени: $g_1 := x^2+y^2$ и инвариант восьмой степени: $g_2 := 11x^4y^4 - 2x^6y^2 - 2x^2y^6 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{1}{2}y^8$. С помощью базиса Гребнера найдем соотношения между g_1 и g_2, в нашем случае их нет, значит, используя лемму 2 из §1.3 построим ряд Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[g_1, g_2]^{D_8}$:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^8)} = 1+z^2+z^4+z^6+2z^8+2z^{10}+2z^{12}+2z^{14}+3z^{16}+3z^{18}+3z^{20}+\dots$$

Алгебра $\mathbb{C}[g_1, g_2]$ подалгебра алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{D_8}$. Для того, чтобы доказать, что эти 2 алгебры равны, нам достаточно того, что для каждого $n \in N$ компоненты из $\mathbb{C}[g_1, g_2]_n$ и $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{D_8}_n$ имеют одинаковую размерность. Другими словами, мы должны показать, что ряд Гильберта $\mathbb{C}[g_1, g_2]$ равен ряду Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{D_8}_n$, что мы и показали.

Ответ: $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{D_8} = \mathbb{C}[x^2 + y^2, 11x^4y^4 - 2x^6y^2 - 2x^2y^6 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{1}{2}y^8]$
Рассмотрим неполную группу симметрии, а лишь группу вращения $C_8 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7\}$, где $e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Вычислим ряд Гильберта $\Phi_{C_8}(z)$ алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{C_8}$ используя теорему Молина:

$$\Phi_{C_8}(z) = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + 3z^8 + 3z^{10} + 3z^{12} + 3z^{14} + 5z^{16} + \dots$$

Найдем инварианты группы C_8, это инвариант второй степени: $g_1 := x^2+y^2$ и инвариант шестой степени: $g_2 := 11x^4y^4-2x^6y^2-2x^2y^6+\frac{1}{2}x^8+\frac{1}{2}y^8$.С помощью базиса Гребнера найдем соотношения между g_1 и g_2, в нашем случае их нет, значит, используя лемму 2 из §1.3 построим ряд Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[g_1, g_2]^{C_8}$:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^8)} = 1+z^2+z^4+z^6+2z^8+2z^{10}+2z^{12}+2z^{14}+3z^{16}+3z^{18}+3z^{20}+\dots$$

Как мы можем видеть, не хватает инварианта восьмой степени, найдем его: $g_3 := -\frac{1}{2}x^7y + \frac{1}{2}xy^7 - \frac{7}{2}x^3y^5 + \frac{7}{2}x^5y^3$. С помощью базиса Гребнера найдем соотношения между g_1, g_2 и g_3, в нашем случае появляется соотношение:

$g_1^8 - 6g_2g_1^4 + 32g_3^2 + 8g_2^2 = 0.$

Значит, ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$ будет выглядеть так:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^8)} + \frac{z^8}{(1-z^2)(1-z^8)} = 1+z^2+z^4+z^6+3z^8+3z^{10}+3z^{12}+3z^{14}+\dots$$

Алгебра $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$ подалгебра алгебры $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{C_8}$. Для того, чтобы доказать, что эти 2 алгебры равны, нам достаточно того, что для каждого $n \in N$ компоненты из $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]_n$ и $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{C_8}$ имеют одинаковую размерность. Другими словами, мы должны показать, что ряд Гильберта $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$ равен ряду Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x_1, x_2]_n^{C_8}$, что мы и показали.

Ответ: $\mathbb{C}[x_1, x_2]^{C_8} = \mathbb{C}[x^2+y^2, 11x^4y^4 - 2x^6y^2 - 2x^2y^6 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{1}{2}y^8, -\frac{1}{2}x^7y + \frac{1}{2}xy^7 - \frac{7}{2}x^3y^5 + \frac{7}{2}x^5y^3]$.

Пример 8. Найти многочлен, который инвариантен относительно перестановок переменных $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, т.е. найти многочлен, для которого выполняется равентсво $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_3, x_4, x_1, x_2), f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_2, x_1, x_4, x_3), f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_4, x_3, x_2, x_1)$.

Найдем ряд Гильберта, используя теорему Молина: $1 + z + 4z^2 + 5z^3 + 11z^4 + 14z^5 + 24z^6 + 30z^7 + 45z^8 + 55z^9 + 76z^{10} + 91z^{11} + 119z^{12} + 140z^{13} + 176z^{14} + 204z^{15} + 249z^{16} + 285z^{17} + 340z^{18} + 385z^{19} + 451z^{20} + 506z^{21} + 584z^{22} + 650z^{23} + 741z^{24} + 819z^{25}$

Используя оператор Рейнольдса, найдем инварианты: $g_1 := x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $g_2 := x_1x_2 + x_3x_4$, $g_3 := x_1x_3 + x_2x_4$, $g_4 := x_1x_4 + x_2x_3$, $g_5 := x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4$. При помощи базиса Гребнера находим соотношение: $4g_5^2 + 4g_4g_3^2 + 8g_4g_3g_2 + 4g_3^2g_2 + 4g_4g_2^2 + 4g_3g_2^2 + 4g_4^2g_3 + 4g_4^2g_2 - g_1^2g_4g_3 - 4g_5g_2g_1 - 4g_5g_3g_1 - 4g_5g_4g_1 - g_4g_2g_1^2 - g_3g_2g_1^2 + g_5g_1^3$.

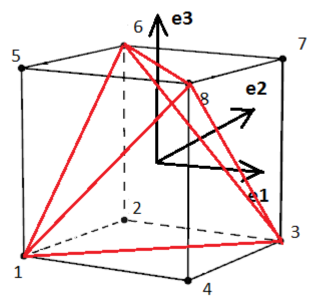
Значит, ряд Гильберта, будет выглядеть так: $\frac{1}{(1-z)(1-z^2)^3} + \frac{z^3}{(1-z)(1-z^2)^3} = 1+z+4z^2+5z^3+11z^4+14z^5+24z^6+506z^21+451z^20+30z^7+45z^8+55z^9+76z^{10}+91z^{11}+119z^{12}+140z^{13}+176z^{14}+204z^{15}+249z^{16}+285z^{17}+340z^{18}+385z^{19}+584z^{22}+650z^{23}+741z^{24}+819z^{25}$. Ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3, g_4, g_5]$ равен ряду Гильберта алгебры инвариантов.Таким образом, множество, удовлетворяющее равенству от четырех переменных: x_1, x_2, x_3, x_4 имеет вид: $\mathbb{C}[(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), (x_1x_2 + x_3x_4), (x_1x_3 + x_2x_4), (x_1x_4 + x_2x_3), (x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4)]$

Выполним проверку, для примера возьмем инвариант пятой степени: $g_6 := x^5 + y^5 + z^5 + t^5$. Поделим его на базис Гребнера инвариантов g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 и получим выражение : $5g_1g_3^2 + g_1^5 + \frac{15}{4}g_5g_1^2 - 5g_5g_3 - 5g_5g_2 - 5g_5g_4 + 5g_1g_4^2 - 5g_1^3g_2 - 5g_1^3g_3 - 5g_1^3g_4 + 5g_2^2g_1 + \frac{45}{4}g_1g_2g_4 + \frac{45}{4}g_3g_2g_1 + \frac{45}{4}g_1g_3g_4$

Подставим наши инварианты в это выражение и получим $x^5 + y^5 + z^5 + t^5$, это как раз наш инвариант пятой степени.

2.3 Алгебра инвариантов группы симметрий тетраэдра.

Пример 1. Найти инварианты группы вращений тетраэдра. Рассмотрим тетраэдр, вписанный в куб :



Выпишем все матрицы группы вращений тетраэдра C_{Th}:
1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
7) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 8) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 9) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 10) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 11) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
12) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Вычислим ряд Гильберта $\Phi_{C_{Th}}(z)$ алгебры $\mathbb{C}[x, y, z]^{C_{Th}}$ используя теорему Молина:

$$\Phi_{C_{Th}}(z) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{-(-1+z)^3} + 8\frac{1}{1-z^3} + 3\frac{1}{-(1+z)^2(-1+z)}\right) = 1 + z^2 + z^3 + 2z^4 +$$
$$+ z^5 + 4z^6 + 2z^7 + 5z^8 + 4z^9 + 7z^{10} + 10z^{12} + \dots$$

Найдем наименьший инвариант второй степени (так как есть коэффициент перед z^2), это $g_1 = x^2 + y^2 + z^2$. Построим ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1]$:

$$\frac{1}{(1-z^2)} = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + z^8 + \dots$$

Как мы можем видеть, не хватает инварианта третьей степени, найдем его. Это $g_2 = xyz$. Ищем соотношения между g_1 и g_2, в нашем случае их нет, значит можем построить ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_2]$:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)} = 1 + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + 2z^6 + 2z^7 + 2z^8 + \dots$$

В этот раз у нас отсутствует инвариант четвертой степени. Ищем его, это $g_3 = x^4 + y^4 + z^4$. Ищем соотношения между g_1, g_2 и g_3, в нашем случае их нет, значит можем построить ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)} = 1 + z^2 + z^3 + 2z^4 + z^5 + 3z^6 + 2z^7 + 4z^8 + \ldots$$

Как мы можем видеть, не хватает инварианта шестой степени, найдем его. Это $g_4 = x^4y^2 + y^4z^2 + x^2z^4$. При помощи базиса Гребнера найдем соотношение между g_1, g_2, g_3 и g_4. В нашем случаем оно есть и равно: $g_1^6 - 3g_3g_1^4 - 16g_2^2g_1^3 + 3g_3^2g_1^2 - 4g_4g_1^3 + 24g_1g_2^2g_3 + 72g_2^4 - g_3^3 + 4g_4g_3g_1 + 24g_4g_2^2 + 8g_4^2 = 0$

Значит, инвариант шестой степени выражается через инваринты второй, третьей и четвертой степени. Составим ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3, g_4]$:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)} + \frac{z^6}{(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)} = 1 + z^2 + 2z^4 + z^5 +$$
$$4z^6 + 2z^7 + 5z^8 + 4z^9 + 7z^{10} + 10z^{12} \ldots$$

Алгебра $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3, g_4]$ подалгебра алгебры $\mathbb{C}[x, y, z]^{C_{Th}}$. Для того, чтобы доказать, что эти 2 алгебры равны, нам достаточно того, что для каждого $n \in N$ компоненты из $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3, g_4]_n$ и $\mathbb{C}[x, y, z]_n^{C_{Th}}$ имеют одинаковую размерность. Другими словами, мы должны показать, что ряд Гильберта $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3, g_4]$ равен ряду Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x, y, z]^{C_{Th}}$, что мы и показали.

Ответ: $\mathbb{C}[x, y, z]^{C_{Th}} = \mathbb{C}[x^2 + y^2 + z^2, xyz, x^4 + y^4 + z^4, x^4y^2 + y^4z^2 + x^2z^4]$.

Пример 2. Найти инварианты группы симметрий тетраэдра.

Выпишем все матрицы группы симметрий тетраэдра D_{Th}:
1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
7) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 8) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 9) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 10) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 11) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
12) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 13) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 14) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 15) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 16) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,
17) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 18) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 19) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 20) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 21) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
22) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 23) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 24) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислим ряд Гильберта $\Phi_{D_{Th}}(z)$ алгебры $\mathbb{C}[x, y, z]^{D_{Th}}$ используя теорему Молина:

$$\Phi_{D_{Th}}(z) = \frac{1}{24}\Bigg(\frac{1}{-(-1+z)^3} + 8\frac{1}{1-z^3} + 3\frac{1}{-(1+z)^2(-1+z)} + 4\frac{1}{1-z-z^2+z^3} +$$

$$+4\frac{1}{1+z+z^2+z^3}+2\frac{1}{(1+z)(1+z^2)}++2\frac{1}{(-1+z)(-1+z^2)}\Bigg)=1+z^2+z^3+$$
$$+2z^4+z^5+3z^6+2z^7+4z^8+3z^9+5z^{10}+4z^{11}+7z^{12}\dots$$

Найдем наименьший инвариант второй степени (так как есть коэффициент перед z^2), это $g_1 = x^2+y^2+z^2$. Построим ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1]$:

$$\frac{1}{(1-z^2)} = 1+z^2+z^4+z^6+z^8+\dots$$

Как мы можем видеть, не хватает инварианта третьей степени, найдем его. Это $g_2 = xyz$. Ищем соотношения между g_1 и g_2, в нашем случае их нет, значит можем построить ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_2]$:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)} = 1+z^2+z^3+z^4+z^5+2z^6+2z^7+2z^8+\dots$$

В этот раз у нас отсутствует инвариант четвертой степени. Ищем его, это $g_3 = x^4+y^4+z^4$. Ищем соотношения между g_1, g_2 и g_3, в нашем случае их нет, значит можем построить ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$:

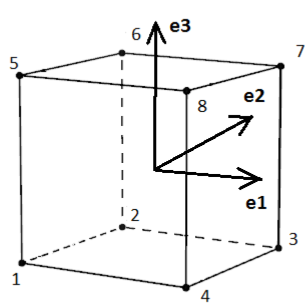
$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)} = 1+z^2+z^3+2z^4+z^5+3z^6+2z^7+4z^8+\dots$$

Алгебра $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$ подалгебра алгебры $\mathbb{C}[x,y,z]^{D_{Th}}$. Для того, чтобы доказать, что эти 2 алгебры равны, нам достаточно того, что для каждого $n \in N$ компоненты из $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]_n$ и $\mathbb{C}[x,y,z]_n^{D_{Th}}$ имеют одинаковую размерность. Другими словами, мы должны показать, что ряд Гильберта $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$ равен ряду Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x,y,z]^{D_{Th}}$, что мы и показали.

Ответ: $\mathbb{C}[x,y,z]^{D_{Th}} = \mathbb{C}[x^2+y^2+z^2, xyz, x^4+y^4+z^4]$.

2.4 Алгебра инвариантов группы симметрий куба.

Пример 1. Найти инварианты группы вращений куба. Рассмотрим куб
:



Выпишем все матрицы группы вращений куба C_{Cube}:
$1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $2)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $3)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $5)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $6)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$7)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $8)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $9)\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $10)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $11)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $12)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
$13)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $14)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $15)\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $16)\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $17)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$18)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $19)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $20)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $21)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $22)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$23)\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $24)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Вычислим ряд Гильберта $\Phi_{C_{Cube}}(z)$ алгебры $\mathbb{C}[x,y,z]^{C_{Cube}}$ используя теорему Молина:

$$\Phi_{C_{Cube}}(z) = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{-(z-1)^3} + 2\frac{1}{-(-1+z)(1+z^2)} + 4\frac{1}{1-z+z^2-z^3} + 8\frac{1}{1-z^3} + \right.$$

$$\left. +2\frac{1}{-(1+z)(-1+z^2)} + 4\frac{1}{1+z-z^2-z^3} + 3\frac{1}{-(1+z)^2(-1+z)}\right) =$$

$$= 1 + z^2 + 2z^4 + 3z^6 + 4z^8 + z^9 + 5z^{10} + z^{11} \dots$$

Найдем наименьший инвариант второй степени (так как есть коэффициент перед z^2), это $g_1 = x^2+y^2+z^2$ и наименьший инвариант четвертой степени (так как есть коэффициент 2 перед z^4), это $g_2 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$. При помощи базиса Гребнера проверим, есть ли у нас соотношения между g_1 и g_2. Так как у нас соотношений нет, можем построить ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_2]$:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^4)} = 1 + z^2 + 2z^4 + 2z^6 + 3z^8 + \dots$$

Как мы можем видеть, не хватает инварианта шестой степени, найдем его. Это $g_3 = x^2y^2z^2$. Ищем соотношения между g_1, g_2 и g_3, в нашем случае их нет, значит можем построить ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)} = 1 + z^2 + 2z^4 + 3z^6 + 4z^8 + 5z^{10} + 7z^{12} + \dots$$

В этот раз у нас отсутствует инвариант девятой степени. Ищем его, это $g_4 = (xyz)(x^2-y^2)(x^2-z^2)(y^2-z^2)$. При помощи базиса Гребнера найдем соотношения между g_1, g_2, g_3 и g_4. В нашем случае оно есть и равно:
$-g_2^2g_1^2g_3 + 4g_1^3g_3^2 + 4g_2^3g_3 - 18g_2g_1g_3^2 + 27g_3^3 + g_4^2 = 0$

Значит, инвариант девятой степени выражается через инваринты второй, четвертой и шестой степени. Составим ряд Гильберта алгебры

$\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3, g_4]$:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)}+\frac{z^9}{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)}=1+z^2+2z^4+3z^6+4z^8+$$

$$+z^9+5z^{10}+z^{11}+7z^{12}+2z^{13}+8z^{14}+3z^{15}+10z^{16}+\dots$$

Алгебра $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3, g_4]$ подалгебра алгебры $\mathbb{C}[x, y, z]^{C_{Cube}}$. Для того, чтобы доказать, что эти 2 алгебры равны, нам достаточно того, что для каждого $n \in N$ компоненты из $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3, g_4]_n$ и $\mathbb{C}[x, y, z]_n^{C_{Cube}}$ имеют одинаковую размерность. Другими словами, мы должны показать, что ряд Гильберта $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3, g_4]$ равен ряду Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x, y, z]^{C_{Cube}}$, что мы и показали.

Ответ: $\mathbb{C}[x, y, z]^{C_{Cube}} = \mathbb{C}[x^2+y^2+z^2, x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2, x^2y^2z^2, (xyz)(x^2-y^2)(x^2-z^2)(y^2-z^2)]$.

Пример 2. Найти инварианты группы симметрий куба.

Выпишем все матрицы группы симметрий куба D_{Cube}:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 8) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 9) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 10) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 11) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 12) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 14) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 15) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 16) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 17) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

18) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 19) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 20) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 21) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 22) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

23) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 24) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 25) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 26) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 27) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

28) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 29) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 30) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 31) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 32) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

33) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 34) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 35) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 36) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 37) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

38) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 39) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 40) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 41) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 42) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

43) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 44) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 45) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 46) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 47) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

48) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Вычислим ряд Гильберта $\Phi_{C_{Cube}}(z)$ алгебры $\mathbb{C}[x, y, z]^{D_{Cube}}$ используя теорему Молина:

$$\Phi_{C_{Cube}}(z)=\frac{1}{48}\left(\frac{1}{-(z-1)^3}+2\frac{1}{-(-1+z)(1+z^2)}+4\frac{1}{1-z+z^2-z^3}+8\frac{1}{1-z^3}+\right.$$

$$+2\frac{1}{-(1+z)(-1+z^2)}+4\frac{1}{1+z-z^2-z^3}+3\frac{1}{-(1+z)^2(-1+z)}+8\frac{1}{1+z^3}+$$

$$+\frac{1}{(1+z)^3}+3\frac{1}{(1+z)(-1+z^2)}+4\frac{1}{1-z-z^2+z^3}+4\frac{1}{1+z+z^2+z^3}+$$

$$+2\frac{1}{(1+z)(1+z^2)}+2\frac{1}{(-1+z)(-1+z^2)}\Bigg)=1+z^2+4z^4+3z^6+4z^8+z^9+$$

$$+5z^{10}+7z^{12}+8z^{14}\dots$$

Найдем наименьший инварианты второй степени (так как есть коэффициент перед z^2), это $g_1=x^2+y^2+z^2$. Построим ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1]$:

$$\frac{1}{(1-z^2)}=1+z^2+z^4+z^6+z^8+\dots$$

Как мы можем видеть, не хватает инварианта четвертой степени, найдем его. Это $g_2=x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2$. Ищем соотношения между g_1 и g_2, в нашем случае их нет, значит можем построить ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1,g_2]$:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^4)}=1+z^2+2z^4+2z^6+3z^8+\dots$$

В этот раз у нас отсутствует инвариант шестой степени. Ищем его, это $g_3=$ $=x^2y^2z^2$. При помощи базиса Гребнера найдем соотношения между g_1,g_2 и g_3. В нашем случае их нет, значит можем построить ряд Гильберта алгебры $\mathbb{C}[g_1,g_2,g_3]$:

$$\frac{1}{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)}=1+z^2+2z^4+3z^6+4z^8+5z^{10}+7z^{12}+8z^{14}\dots$$

Алгебра $\mathbb{C}[g_1,g_2,g_3]$ подалгебра алгебры $\mathbb{C}[x,y,z]^{D_{Cube}}$. Для того, чтобы доказать, что эти 2 алгебры равны, нам достаточно того, что для каждого $n\in N$ компоненты из $\mathbb{C}[g_1,g_2,g_3]_n$ и $\mathbb{C}[x,y,z]_n^{D_{Cube}}$ имеют одинаковую размерность. Другими словами, мы должны показать, что ряд Гильберта $\mathbb{C}[g_1,g_2,g_3]$ равен ряду Гильберта алгебры инвариантов $\mathbb{C}[x,y,z]^{D_{Cube}}$, что мы и показали.

Ответ: $\mathbb{C}[x,y,z]^{D_{Cube}}=\mathbb{C}[x^2+y^2+z^2,x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2,x^2y^2z^2]$.

2.5 Выводы.

Вывод для правильного многоугольника. Если G - группа симметрий правильного n - угольника, то алгебра инвариантов для этой группы имеет вид:

$$C[x_1, x_2]^G = C[g_1, g_2]$$

При этом $degg_1 = 2$ и $degg_2 = n$.

Если G - группа вращений правильного n - угольника, то алгебра инвариантов для этой группы имеет вид:

$$C[x_1, x_2]^G = C[g_1, g_2, g_3]$$

При этом $C[g_1, g_2] \subset C[g_1, g_2, g_3]$ целое расширение, в котором соотношение для g_3 имеет вид: $g_3^2 + f(g_1, g_2) = 0$, где $f \in C[x, y]$.

Вывод для группы симметрий правильного многогранника. Если G - группа симметрий правильного многогранника, то алгебра инвариантов для этой группы имеет вид:

$$C[x, y, z]^G = C[g_1, g_2, g_3]$$

Если G - группа вращений правильного многогранника, то алгебра инвариантов для этой группы имеет вид:

$$C[x, y, z]^G = C[g_1, g_2, g_3, g_4]$$

При этом $C[g_1, g_2, g_3] \subset C[g_1, g_2, g_3, g_4]$ целое расширение, в котором соотношение для g_4 имеет вид: $g_4^2 = g_4 f(g_1, g_2) + f'(g_1, g_2)$, где $f, f' \in C[x, y, z]$.

Список литературы

[1] Кокс, Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы /Д.Кокс, Дж.Литтл, Д.О'Ши.- М.: Мир, 2000.- 686 с.

[2] Винберг, Э.Б. Курс Алгебры /Э.Б.Винберг.- М.: МЦНМО, 2013.- 592 с.

[3] Sturmfels, B. Algorithms in Invariant Theory /Bernd Sturmfels.- G.: SpringerWienNewYork, 2008.- 197 c.