ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 4 (467)

УДК 510.5

И.Ш. КАЛИМУЛЛИН

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛУРЕШЕТОК n-Р.П. СТЕПЕНЕЙ ПО ПЕРЕЧИСЛИМОСТИ

1. Введение

Сводимость по перечислимости образуется при релятивизации понятия *рекурсивной перечислимости* множества, а именно, множество A натуральных чисел *сводится по перечислимости* к множеству натуральных чисел B (записывается $A \leq_e B$), если существует эффективная процедура перечисления множества A по произвольному данному перечислению множества B. Согласно более формальному определению ([1], с. 189–193) $A \leq_e B$ тогда и только тогда, когда существует перечислимое множество Γ (называемое в данном контексте e-оператором) такое, что для всех натуральных x выполнено

$$x \in A \Leftrightarrow (\exists F \text{ — конечное множество})[\langle x, F\rangle \in \Gamma \,\&\, F \subseteq B]$$

(в этом случае пишем для краткости $A = \Gamma(B)$). Здесь конечное множество F отождествляется с его номером в канонической нумерации всех конечных множеств, а $\langle x, F\rangle$ — упорядоченная пара.

Классы эквивалентности, индуцированной предпорядком $\leq_e$, называются *степенями по перечислимости* (или *e-степенями*). Множество всех e-степеней образует верхнюю полурешетку $\mathcal{D}_e$ относительно порядка $\leq$, полученного из отношения $\leq_e$. При этом отображение, переводящее множество в график его характеристической функции, индуцирует изоморфное вложение $\iota : \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_e$ полурешетки тьюринговых степеней в полурешетку e-степеней.

В данной работе изучаются полурешетки $\mathcal{D}_e^n$ всех n-р. п. e-степеней (т. е. e-степеней n-р. п. множеств), $n \geq 2$, и их связь с родственными им структурами $\mathcal{D}_T^n$ всех n-р. п. тьюринговых степеней.

Легко видеть, что отображение ι осуществляет изоморфизм полурешеток $\mathcal{D}_T^1$ и $\mathcal{D}_e^2$. Однако из существования 3-р.п. квазиминимальных e-степеней [2] следует, что если $n > 1$, то образ мономорфизма ι при ограничении его действия на $\mathcal{D}_T^n$ будет собственным подмножеством в $\mathcal{D}_e^{n+1}$.

Автором ранее было показано (работа готовится к печати), что для степеней по перечислимости так называемая гипотеза Доунея не верна, а именно, что если $1 < m < 2p \leq n$ для некоторого целого p, то элементарные теории $\mathcal{D}_e^n$ и $\mathcal{D}_e^m$ различны. Этот результат интересен тем, что исходная гипотеза Доунея, утверждающая, что все полурешетки $\mathcal{D}_T^n$, $n > 1$, элементарно эквивалентны между собой, до сих пор остается ни доказанной, ни опровергнутой. Естественным образом встает вопрос о возможности перенесения отрицательного ответа на гипотезу из степеней по перечислимости в степени тьюринговые. Для этого достаточно было бы найти хотя бы две полурешетки $\mathcal{D}_e^n$ и $\mathcal{D}_e^m$ такие, что $2 < m < 2p \leq n$, $\mathrm{Th}(\mathcal{D}_e^n) = \mathrm{Th}(\mathcal{D}_T^{n_1})$ и $\mathrm{Th}(\mathcal{D}_T^m) = \mathrm{Th}(\mathcal{D}_e^{m_1})$ для некоторых n_1, m_1 и p. Тогда необходимо $m_1, n_1 > 1$ и $\mathrm{Th}(\mathcal{D}_T^{m_1}) \neq \mathrm{Th}(\mathcal{D}_T^{n_1})$.

Докажем, что такой путь решения проблемы Доунея невозможен, а именно, что элементарная эквивалентность полурешеток $\mathcal{D}_e^n$ и $\mathcal{D}_T^m$ может иметь место только в случае, когда $n = 2$ и

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 99-01-00174.

$m = 1$. Для этого будет установлено, что во всех $\mathcal{D}_e^n$, $n > 2$, каждый ненулевой элемент ограничивает некоторую пару степеней $\mathbf{a}_e, \mathbf{b}_e \in \mathcal{D}_e^n$ таких, что $\mathbf{a}_e > \mathbf{0}_e$, $\mathbf{b}_e > \mathbf{0}_e$ и $\mathbf{a}_e \cap \mathbf{b}_e = \mathbf{0}_e$, в отличие от полурешеток $\mathcal{D}_T^m$, $m \geq 1$, где указанное свойство не выполняется.

Обозначения в данной работе согласованы с обозначениями монографии Соара [3]. В частности, множество всех натуральных чисел обозначается через ω; $\langle x, y\rangle = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$ — стандартная функция пары, $X^{[k]} = \{\langle y, k\rangle \in X : y \in \omega\}$ — k-й столбец множества X, $X^{[<k]} = \bigcup_{k'<k} X^{[k']}$, $X^{[\geq k]} = X - X^{[<k]}$; $X\lceil s = \{x \in X : x < s\}$; $\{W_{e,s}\}_{e,s\in\omega}$ — эффективный набор конечных множеств такой, что $W_{e,s} \subseteq W_{e,s+1}$, $e, s \in \omega$, причем каждое р. п. множество представляется в виде $\bigcup\limits_s W_{e,s} = W_e$. Переменная F (с индексами или без них) зарезервирована для обозначения конечных подмножеств ω. Часто будем отождествлять характеристическую функцию множества с самим множеством и обозначать ее той же буквой, что и множество.

Степень по перечислимости множества A будем обозначать через $\deg_e(A)$.

2. Основной результат

Теорема. *Для каждого неперечислимого n-р. п. множества A существуют неперечислимые 3-р. п. множества $B_0, B_1 \leq_e A$ такие, что*

$$\deg_e(B_0) \cap \deg_e(B_1) = \mathbf{0}_e.$$

Для доказательства теоремы понадобится

Предложение. *Пусть B_0, B_1 — некоторые Σ_2^0 множества с соответствующими Σ_2^0 аппроксимациями $\{B_{0,s}\}_{s\in\omega}$ и $\{B_{1,s}\}_{s\in\omega}$ (т. е. для каждого $i = 0, 1$ набор конечных множеств $\{B_{i,s}\}_{s\in\omega}$ эффективен, причем $B_i = \liminf\limits_s B_{i,s}$) такими, что*

$$x \in (B_{i,s} - B_{i,s+1}) \cap \omega^{[e]} \Longrightarrow \omega^{[\geq e]}\lceil s \subseteq B_{1-i}$$

для всех $s, x, e \in \omega$ и $i = 0, 1$. Тогда $\deg_e(B_0) \cap \deg_e(B_1) = \mathbf{0}_e$.

Доказательство предложения. Предположим, что $C = \Psi_0(B_0) = \Psi_1(B_1)$ для некоторых e-операторов Ψ_0 и Ψ_1, и покажем, что C р. п.

Для этого достаточно убедиться в том, что для каждого $y \in \omega$

$$y \in C \Longleftrightarrow (\exists s)(\exists F_0 \subseteq B_{0,s})(\exists F_1 \subseteq B_{1,s})[\max(F_0) < \\ < s \,\&\, \max(F_1) < s \,\&\, \langle y, F_0\rangle \in \Psi_{0,s} \,\&\, \langle y, F_1\rangle \in \Psi_{1,s}],$$

где кванторы при F_0, F_1 действуют на множестве всех конечных множеств натуральных чисел.

Импликация слева направо очевидна. Обратно, пусть $y \notin C$, но для некоторого s существуют подходящие конечные множества $F_i \subseteq B_{i,s}$, $i = 0, 1$, удовлетворяющие правой части утверждения. Тогда $F_i \not\subseteq B_i$ для $i = 0, 1$. Найдем наименьшее число e такое, что $(B_{i,t} - B_{i,t+1}) \cap F_i^{[e]} \neq \emptyset$ на шаге $t \geq s$ при некотором $i = 0, 1$. Тогда $F_j^{[<e]} \subseteq B_j$ для любого $j = 0, 1$. С другой стороны, $F_{1-i}^{[\geq e]} \subseteq B_{1-i}$, т. к. $\max(F_{1-i}) < s \leq t$. Таким образом, $F_{1-i} \subseteq B_{1-i}$, что невозможно. $\square$

Доказательство теоремы. Известно [4], что для каждого неперечислимого n-р. п. множества A (где $n \geq 3$) можно найти неперечислимое 3-р. п. множество $A_0 \leq_e A$. Поэтому можем считать, что A — 3-р. п. множество.

Пусть $\{A_s\}_{s\in\omega}$ — эффективная аппроксимация множества A (т. е. $\{A_s\}_{s\in\omega}$ — эффективный набор конечных множеств и $A = \lim\limits_s A_s$) такая, что $A_s(x) = 0$ и $|\{s : A_s(x) \neq A_{s+1}(x)\}| \leq 3$ для всех $x \in \omega$. Будем строить по шагам e-операторы Γ_0 и Γ_1 такие, что $\Gamma_0(A)$ и $\Gamma_1(A)$ будут искомыми 3-р. п. множествами. Для этого должны быть выполнены требования

$$N :(\forall i = 0,1)(\forall e)(\forall k)[(\Gamma_{i,s}(A_s) - \Gamma_{i,s+1}(A_{s+1})) \cap \omega^{[k]} \neq \emptyset \Longrightarrow \omega^{[\geq k]}\lceil s \subseteq \Gamma_{1-i}(A), \text{ где } \Gamma_{i,s} \text{ — определенная на шаге } s \text{ конечная часть } e\text{-оператора } \Gamma_i$$

и

$$P_{2e+i} : \Gamma_i(A) \neq W_e \text{ для каждой пары } (e,i),\ e \in \omega, i = 0,1.$$

По предложению требование N достаточно для $\deg_e(\Gamma_0(A)) \cap \deg_e(\Gamma_1(A)) = \mathbf{0}_e$, т. к. $\Gamma_i(A) = \liminf_s \Gamma_{i,s}(A_s)$. Требования P_j обеспечивают неперечислимость множеств $\Gamma_0(A)$ и $\Gamma_1(A)$.

Опишем конструкцию.

Шаг $s = 0$. Определяем $\Gamma_i = \emptyset$, $i = 0,1$.

Шаг $s+1$. Этап 1 (удовлетворение требования N). Проверяем, существует ли такое $k_0 = 2e_0 + i_0$, что $(\Gamma_{i_0,s}(A_s) - \Gamma_{i_0,s}(A_{s+1})) \cap \omega^{[k_0]} \neq \emptyset$. Если нет, то полагаем $\widetilde{\Gamma}_{i,s+1} = \Gamma_{i,s}$ для каждого $i < 2$. Если да, то фиксируем наименьшее такое $k_0 = 2e_0 + i_0$ и полагаем $\widetilde{\Gamma}_{i_0,s+1} = \Gamma_{i_0,s}$ и $\widetilde{\Gamma}_{1-i_0,s+1} = \Gamma_{1-i_0,s} \cup \{\langle x, \emptyset\rangle : x \in \omega^{[\geq k_0]}\lceil s\}$.

Этап 2 (удовлетворение требований P_k). Для каждого $k \leq s$ определяем значение “функции длины”

$$l(k,s) = \max\{x \leq s : (\forall y < x)[\Gamma_{i,s}(A_s; y) = W_{e,s}(y)]\},$$

где $k = 2e+i$, $i < 2$. Находим наименьшее $k_0 = 2e_0+i_0 \leq s$ такое, что $l(k_0,s) > \max\{l(k_0,t) : t < s\}$, и полагаем $\Gamma_{i_0,s+1} = \widetilde{\Gamma}_{i_0,s+1} \cup \{\langle\langle y,k_0\rangle, \{y\}\rangle : \langle y,k_0\rangle \leq s\}$ и $\Gamma_{1-i_0,s+1} = \widetilde{\Gamma}_{1-i_0,s+1}$ (если такого k_0 нет, то определяем $\Gamma_{i,s+1} = \widetilde{\Gamma}_{i,s}$, $i < 2$).

Описание конструкции завершено. Полагаем $\Gamma_i = \bigcup_s \Gamma_{i,s}$ для каждого $i < 2$.

Установим теперь, что $\Gamma_0(A)$ и $\Gamma_1(A)$ — искомые множества.

Лемма A. *$\Gamma_0(A)$ и $\Gamma_1(A)$ являются 3-р. п. множествами, причем*

$$\deg_e(\Gamma_0(A)) \cap \deg_e(\Gamma_1(A)) = \mathbf{0}_e.$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что для всех y, k, F и $i < 2$

$$\langle\langle y,k\rangle, F\rangle \in \Gamma_i \Longrightarrow F = \emptyset \vee F = \{y\}.$$

Следовательно, для каждого $i < 2$ имеем $\Gamma_i(A) = \lim_s \Gamma_{i,s}(A_s)$ и

$$|\{s : \Gamma_{i,s}(A_s; x) \neq \Gamma_{i,s+1}(A_{s+1}; x)\}| \leq 3$$

для любого $x \in \omega$. Значит, $\Gamma_0(A)$ и $\Gamma_1(A)$ — 3-р. п. множества.

Покажем, что требование N выполнено. Заметим, что по определению Γ_i для любых x, s, $F \neq \emptyset$ и $i < 2$, удовлетворяющих условию $\langle x, F\rangle \in \Gamma_{i,s}$, справедливо $x \in \bigcup_{e\in\omega} \omega^{[2e+i]}\lceil s$.

Пусть $G = (\Gamma_{i,s}(A_s) - \Gamma_{i,s+1}(A_{s+1})) \cap \omega^{[k]} \neq \emptyset$ при некоторых значениях $x, s, k \in \omega$ и $i < 2$. Тогда $G \subseteq \bigcup_{e\in\omega} \omega^{[2e+i]}\lceil s$ и, следовательно, $k = 2e + i$ для некоторого e. Фиксируем наименьшее $k_0 = 2e_0 + i_0 \leq k$ такое, что $(\Gamma_{i_0,s}(A_s) - \Gamma_{i_0,s}(A_{s+1})) \cap \omega^{[k_0]} \neq \emptyset$. По построению имеем $\omega^{[\geq k_0]}\lceil s \subseteq \Gamma_{1-i_0,s+1}(\emptyset) \subseteq \Gamma_{1-i_0,s+1}(X)$ для любого множества X. Поэтому $i = i_0$ (иначе было бы $G \subseteq \Gamma_{i,s+1}(A_{s+1})$), откуда $\omega^{[\geq k]}\lceil s \subseteq \Gamma_{1-i,s+1}(\emptyset) \subseteq \Gamma_{1-i}(A)$. $\square$

Лемма B. *Множества $\Gamma_0(A)$ и $\Gamma_1(A)$ неперечислимы.*

Доказательство. Предположим противное. Выберем наименьшее $k = 2e + i$, при котором $\limsup_s l(k,s) = \infty$. Найдем наименьший шаг s_0 такой, что

$$l(k',s) \leq \max\{l(k',t) : t \leq s_0\}$$

для всех $k' < k$ и $s \geq s_0$. Фиксируем наименьший шаг $s_1 > s_0$ такой, что $A_s(y) = A(y)$ для произвольных $s \geq s_1$ и $y \leq s_0$. Тогда

$$y \in A \Longleftrightarrow \langle y, k \rangle \in W_e$$

для каждого $y > s_1$, что противоречит неперечислимости множества A. $\square$

Доказательство теоремы завершено. $\square$

Следствие 1. Если $n \geq 1$ и $m \geq 2$, то совпадение элементарных теорий полурешеток $\mathcal{D}_e^m$ и $\mathcal{D}_T^n$ возможно только при $n = 1$ и $m = 2$.

Доказательство. Если $m > 2$, то следствие 1 непосредственно вытекает из теоремы и из следующих двух фактов, принадлежащих Лахлану (доказательство первого факта можно найти в книге Соара ([3], теорема XIV.4.1, с. 315–337), второй факт доказывается, напр., в статье [5]).

1) Существует р. п. T-степень $\mathbf{a}$ такая, что для каждой пары ненулевых р. п. T-степеней $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1 \leq \mathbf{a}$ степень $\mathbf{0}$ не является наибольшей нижней гранью для $\mathbf{b}_0$ и $\mathbf{b}_1$.
2) Для каждой ненулевой n-р. п. T-степени $\mathbf{b}$ существует ненулевая р. п. T-степень $\mathbf{c} \leq \mathbf{b}$.

Если же $m = 2$ и $n > 1$, то элементарные теории полурешеток $\mathcal{D}_e^m$ и $\mathcal{D}_T^n$ различны, т. к. $\mathcal{D}_e^2 \cong \mathcal{D}_T^1$ и известно [6], что $\mathrm{Th}(\mathcal{D}_T^1) \neq \mathrm{Th}(\mathcal{D}_T^n)$ при $n > 1$. $\square$

В доказательстве теоремы утверждение $\Gamma_i(A) = \lim_s \Gamma_{i,s}(A)$ вытекает из $A = \lim_s A_s$, причем здесь не используется тот факт, что A — 3-р. п. Поэтому справедливо

Следствие 2. Для каждого неперечислимого Δ_2^0-множества A существуют неперечислимые Δ_2^0-множества $B_0, B_1 \leq_e A$ такие, что $\deg_e(B_0) \cap \deg_e(B_1) = \mathbf{0}_e$.

Литература

1. Роджерс Х. *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость.* – М.: Мир, 1972. – 624 с.
2. Cooper S.B. *Enumeration reducibility, nondeterministic computations and relative computability of partial functions* // Lect. Notes Math. – 1990. – V. 1432. – P. 57–110.
3. Soare R.I. *Recursively enumerable sets and degrees: a study of computable functions and computably generated sets.* – Berlin: Springer-Verlag, 1987 – 437 p.
4. Arslanov M.M., Kalimullin I.Sh., Sorbi A. *Density results in the Δ_2^0 e-degrees* // Preprint № 364, Universita di Siena, Dipartamento di Matematica, Siena, 1999. – 20 p.
5. Arslanov M.M. *Degree structures in local degree theory* // Lect. Notes Pure and Appl. Math. – 1997. – V. 187. – P. 49–74.
6. Арсланов М.М. *О структуре степеней ниже* $\mathbf{0}'$ // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 7. – С. 27–33.

Казанский государственный университет

Поступила
14.10.1999