ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 6 (445)

УДК 517.988

Ю.В. НЕПОМНЯЩИХ, А.В. ПОНОСОВ

ЛОКАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В НЕКОТОРЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВА L_0

1. Введение

Теория локальных операторов (ЛО) — одно из перспективных направлений современного нелинейного анализа, которое бурно развивается на протяжении второй половины двадцатого века и находит многочисленные приложения в механике, физике, теории управления, других науках. Понятие ЛО возникло путем абстрагирования от известного свойства оператора Немыцкого (суперпозиции) и заключается в том, что значение функции–образа на некотором множестве зависит только от значений функции–прообраза на том же множестве (точное определение см. ниже). Впервые определение ЛО в его современном понимании дано в [1] (там они названы "локально определенными операторами"), хотя близкие к этому понятия встречались и ранее ([2], [3]).

Фундаментальным является то обстоятельство, что непрерывный по мере ЛО в "классических" пространствах измеримых функций представим в виде оператора Немыцкого с порождающей функцией, удовлетворяющей условиям Каратеодори. Этот факт в некоторых частных случаях доказан в [3], а в общем случае — в [4]–[6]. Более конструктивное доказательство теоремы о представлении (в менее общей по сравнению с [4]–[6] ситуации) было предложено в [7],[8]. Таким образом, непрерывный ЛО есть оператор Немыцкого с порождающей функцией, удовлетворяющей условиям Каратеодори — объект, к настоящему времени изученный достаточно хорошо с разных сторон (напр., [1]–[21], в обзорной монографии [8] имеется обширная библиография).

В работах [22], [23] было замечено, что свойство локальности присуще типичным операторам, возникающим в теории стохастических дифференциальных и интегральных уравнений. В стохастике характерна ситуация, когда ЛО исследуется в пространствах функций, измеримых по отношению к различным σ-алгебрам на области определения этих функций. Разумеется, здесь речь идет о ситуации, когда функции из области задания ЛО измеримы относительно более узкой σ-алгебры, чем функции из множества значений оператора. Оказывается, что в такой "неклассической" постановке непрерывные по мере ЛО не сводятся к операторам Немыцкого. Характерный пример — стохастические интегральные операторы (в том числе и нелинейные).

Другой мотивацией для изучения ЛО являются совсем недавние исследования М.Е. Драхлина, Е. Степанова и второго соавтора (статья "Memory properties of operators" представлена к рассмотрению для публикации в зарубежном издании), показывающие, что задача классификации так называемых "атомических" операторов сводится по сути к изучению ЛО, которые заданы на подпространствах пространства L_0, состоящих из функций, измеримых по отношению

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта для молодых ученых (Госкомвуз РФ, 1997) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-01613, 96-15-96195.

к σ-подалгебре заданной σ-алгебры. Классу атомических операторов принадлежат, кроме ЛО, многие операторы с "памятью", в частности, различные композиции подстановки (оператора внутренней суперпозиции [25], [26]) и ЛО h. Изучение таких операторов в свою очередь находит непосредственное применение для исследования функционально-дифференциальных уравнений (см., напр., [26], [27]).

В данной работе, как нам представляется, впервые изучаются ЛО в описанной выше "неклассической" постановке. Более конкретно, выявлено условие на σ-подалгебру, необходимое и достаточное для представления непрерывного по мере ЛО в виде оператора Немыцкого с порождающей функцией, удовлетворяющей условиям Каратеодори. Подчеркнем, что в работе мы изучаем только непрерывные ЛО. Без условия непрерывности фактически любой ЛО есть оператор Немыцкого ([17], [7], [8], [20]), однако порождающая функция может обладать весьма патологическими свойствами (так называемые "уродцы"). Заметим лишь, что в указанных работах факт существования "уродцев" доказан в предположении континуум-гипотезы (CH), хотя на самом деле ([28], с. 145) достаточно аксиомы Мартина (MA) (напомним, что (CH)$\Rightarrow$(MA) и (MA)&$\neg$(CH) не противоречит аксиомам формальной теории множеств). В предположении MA существует такая неизмеримая (по Лебегу) функция $f : [0,1]^2 \to \mathbf{R}$, что для любой измеримой функции $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ при почти всех $t \in [0,1]$ имеет место равенство $f(\varphi(t), t) = f(t, \varphi(t)) = 0$.

2. Локальные операторы на склейках функций

Пусть (T, Σ) — измеримое пространство, Σ_0 — σ-полный идеал алгебры Σ [29]; X, Y — произвольные непустые множества. $\mathcal{F}(E, X) := X^E$ $(E \subset T)$ — множество всех отображений из E в X. На $\mathcal{F}(E, X)$ рассмотрим естественное отношение эквивалентности $\mathcal{R}$: $[\varphi \sim \psi] \;\Leftrightarrow\; [\{t \mid \varphi(t) = \psi(t)\} \in \Sigma_0]$. $F(E, X) := \mathcal{F}(E, X)/\mathcal{R}$ — соответствующее фактор-пространство классов эквивалентных функций из E в X. Для краткости положим $\mathcal{F}(X) := \mathcal{F}(T, X)$, $F(X) := F(T, X)$.

Определим оператор проектирования $\mathcal{P}_{E,X} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(E, X)$ равенством $\mathcal{P}_{E,X}\varphi := \varphi|_E$ (сужение функции φ на множество E). Очевидно, корректно определен соответствующий оператор проектирования на фактор-пространствах $P_{E,X} : F(X) \to F(E, X)$. Далее часто для краткости вместо $\mathcal{P}_{E,X}$, $P_{E,X}$ будем писать $\mathcal{P}_E$, P_E. Из контекста всегда ясно, о функциях с какой областью значений идет речь.

Пусть $R = \{T_n\}_{n \in I}$ — счетное разбиение пространства T. Здесь и далее разбиение называем счетным, если множество индексов I непусто и либо конечно, либо счетно.

Определение 1. *Склейкой* множества $M \subset F(X)$, соответствующей разбиению R (обозначение $S_R(M)$), назовем множество

$$S_R(M) := \{\varphi \in F(X) \mid (\exists \varphi_n \in M)\ P_{T_n}\varphi_n = P_{T_n}\varphi,\ n \in I\}.$$

Лемма 1. *Если $\varphi, \psi \in F(X)$ и $P_{T_n}\varphi = P_{T_n}\psi$, $n \in I$, то $\varphi = \psi$.*

Доказательство вытекает непосредственно из σ-полноты идеала Σ_0.

Лемма 2. *Пусть M, M_1, $M_2 \in F(X)$. Имеют место свойства*

$$[M_1 \subset M_2] \Rightarrow [S_R(M_1) \subset S_R(M_2)], \quad M \subset S_R(M), \quad S_R(S_R(M)) = S_R(M).$$

Доказательство. Первые два свойства очевидны. Для доказательства последнего равенства зафиксируем произвольное $\varphi \in S_R(S_R(M))$ и найдем согласно определению $S_R(S_R(M))$ такие $\varphi_n \in S_R(M)$, что $P_{T_n}\varphi_n = P_{T_n}\varphi$, $n \in I$. Далее, найдем согласно определению $S_R(M)$ такие $\psi_n \in M$, что $P_{T_n}\psi_n = P_{T_n}\varphi_n$, $n \in I$. Тогда $P_{T_n}\psi_n = P_{T_n}\varphi$, $n \in I$, и, таким образом, $\varphi \in S_R(M)$. Итак, доказано $S_R(S_R(M)) \subset S_R(M)$. Обратное включение вытекает из первых двух свойств этой леммы. $\square$

Определение 2. Оператор $h : M \to F(Y)$ $(M \subset F(X))$ называется *локальным оператором* [1] (сокращенно — ЛО), если

$$[\varphi, \psi \in M,\ E \in \Sigma,\ P_E\varphi = P_E\psi] \Longrightarrow [P_E h\varphi = P_E h\psi].$$

Теорема 1. *Пусть $M \subset F(X)$, и $h : M \to F(Y)$ — ЛО. Тогда существует единственный ЛО $\widetilde{h} : S_R(M) \to F(Y)$, для которого $\widetilde{h}|_M = h$. При этом $\widetilde{h}(S_R(M)) = S_R(h(M))$.*

Доказательство. 1) Сначала докажем единственность ЛО $\widetilde{h} : S_R(M) \to F(Y)$, совпадающего с h на M. Пусть h_k, $k = 1, 2,$ — два таких продолжения. Для любого $\varphi \in S_R(M)$ и для любого $n \in I$ найдем такое $\varphi_n \in M$, что $P_{T_n}\varphi = P_{T_n}\varphi_n$. Из равенства $h_k|_M = h$ и локальности операторов h_k следует

$$P_{T_n}h_1\varphi = P_{T_n}h_1\varphi_n = P_{T_n}h\varphi_n = P_{T_n}h_2\varphi_n = P_{T_n}h_2\varphi, \quad n \in I.$$

В силу леммы 1 $h_1\varphi = h_2\varphi$, и ввиду произвольности $\varphi \in S_R(M)$ имеем $h_1 = h_2$.

2) Для произвольного $\varphi \in S_R(M)$ найдем такое множество $\{\varphi_n\}_{n \in I} \subset M$, что $P_{T_n}\varphi = P_{T_n}\varphi_n$, $n \in I$, причем если $\varphi \in M$, то считаем $\varphi_n = \varphi$. Определим оператор $\widetilde{h}$ равенством

$$(\widetilde{h}\varphi)(t) = (h\varphi_n)(t) \ \ text\text{почтивсюду(п. в.)на} \ \ T_n, \quad n \in I. \tag{1}$$

Очевидно, $\widetilde{h}|_M = h$, $\widetilde{h}(S_R(M)) \subset S_R(h(M))$. Итак, построено продолжение $\widetilde{h}$ оператора h на $S_R(M)$.

3) Покажем, что $\widetilde{h}$ — ЛО. Пусть $\varphi, \psi \in S_R(M)$, $E \subset T$, $P_E\varphi = P_E\psi$. Определим $\varphi_n, \psi_n \in M$, $n \in I$, так, что $P_{T_n}\varphi = P_{T_n}\varphi_n$, $P_{T_n}\psi = P_{T_n}\psi_n$, $n \in I$, выполнено равенство (1) и равенство

$$(\widetilde{h}\psi)(t) = (h\psi_n)(t) \ \ \text{п. в. на} \ \ T_n, \quad n \in I. \tag{2}$$

Очевидно, $P_{E\cap T_n}\varphi_n = P_{E\cap T_n}\varphi = P_{E\cap T_n}\psi = P_{E\cap T_n}\psi_n$, и согласно (1), (2) и локальности h

$$P_{E\cap T_n}\widetilde{h}\varphi = P_{E\cap T_n}h\varphi_n = P_{E\cap T_n}h\psi_n = P_{E\cap T_n}\widetilde{h}\psi, \quad n \in I.$$

В силу леммы 1 $P_E\widetilde{h}\varphi = P_E\widetilde{h}\psi$.

Осталось показать $S_R(h(M)) \subset \widetilde{h}(S_R(M))$. Фиксируем произвольное $\psi \in S_R(h(M))$ и выбираем $\psi_n \in h(M)$ такие, что $P_{T_n}\psi_n = P_{T_n}\psi$, $n \in I$. Найдем $\varphi_n \in M$, для которых $\psi_n = h\varphi_n$, $n \in I$. Определим $\varphi \in S_R(M)$, положив $\varphi(t) = \varphi_n(t)$, $t \in T_n$ $(n \in I)$. В силу локальности $\widetilde{h}$ имеем

$$P_{T_n}\widetilde{h}\varphi = P_{T_n}\widetilde{h}\varphi_n = P_{T_n}h\varphi_n = P_{T_n}\psi_n = P_{T_n}\psi, \quad n \in I.$$

Согласно лемме 1 $\psi = \widetilde{h}\varphi \in \widetilde{h}(S_R(M))$. $\square$

Замечание 1. Роль инвариантных относительно склейки множеств для понимания природы ЛО впервые замечена, по-видимому, в работах [1], [14] (см. также [17], [20]). Эти понятия тесно связаны с определенным и изученным в [8] понятием “thick set”.

Замечание 2. Обобщая результаты этого параграфа, можно дать определение склейки $S_{\mathcal{A}}(M)$, соответствующей некоторому семейству разбиений $\mathcal{A}$ (например, множеству всех счетных измеримых разбиений). При естественных ограничениях на (S, Σ) и $\mathcal{A}$ в этом случае справедлив аналог теоремы 1. Это свойство ЛО (в менее абстрактной постановке и несколько в других терминах) указывалось и использовалось в работах [14], [8]. Мы не приводим соответствующего обобщения, поскольку степень общности в теореме 1 достаточна для доказательства основных результатов статьи.

3. Некоторые свойства σ-алгебр и пространства $L_0(\Sigma, X)$

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с полной конечной мерой, (X, d) — сепарабельное метрическое пространство, $\mathcal{B}(X)$ — σ-алгебра борелевских подмножеств X. Функцию $\varphi : T \to X$ назовем Σ-измеримой, если $(\forall U \in \mathcal{B}(X))\ \ \varphi^{-1}(U) \in \Sigma$. Всюду $L_0(\Sigma, X)$ — множество классов эквивалентных измеримых функций из T в X, наделенное топологией сходимости по мере.

Пусть $E \subset T$ — фиксированное (вообще говоря, неизмеримое) множество. Тогда $(E, \Sigma \cap E, \mu_E)$ — пространство с полной конечной мерой. Здесь и далее $\Sigma \cap E := \{A \cap E \mid A \in \Sigma\}$ [30], μ_E — сужение внешней меры μ^* на $\Sigma \cap E$. $L_0(\Sigma \cap E, X)$ — пространство $\Sigma \cap E$-измеримых функций из E в X.

Для произвольного $A \in \Sigma \cap E$ положим $\mathcal{E}(A) := \{B \in \Sigma \mid B \cap E = A\}$, $\overline{\mathcal{E}}(A) := \{B \in \Sigma \mid B \supset A\}$. $\mathcal{E}(A)$, $\overline{\mathcal{E}}(A)$ состоят из элементов булевой фактор-алгебры Σ/Σ_0 ($B_1 = B_2 \pmod{\mu}$, если $\mu(B_1 \triangle B_2) = 0$). На Σ/Σ_0 рассматриваем естественное отношение частичного порядка (т. е. по включению $\pmod{\mu}$). Часто в дальнейшем, допуская некоторую вольность, будем с элементами Σ/Σ_0 обращаться как с множествами, считая, что равенства и включения выполняются $\pmod{\mu}$. Это не приведет к недоразумениям.

Лемма 3. *$\mathcal{E}(A)$, $\overline{\mathcal{E}}(A)$ имеют наименьшие элементы, равные между собой.*

Доказательство. Пусть $a = \inf\{\mu B \mid B \in \mathcal{E}(A)\}$, и $B_n \in \mathcal{E}(A)$ таковы, что $\mu B_n - a < 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда $A^* := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{E}(A)$ и $\mu A^* = a$.

Предположим, что A^* не является наименьшим элементом $\mathcal{E}(A)$. Тогда существует $A_1 \in \mathcal{E}(A)$ такое, что $\mu(A^* \setminus A_1) > 0$. В этом случае $A_2 := A^* \cap A_1 \in \mathcal{E}(A)$, $\mu A_2 < a$, что противоречит определению числа a.

Аналогично доказывается, что существует наименьший элемент $\overline{\mathcal{E}}(A)$. Обозначим его символом $\overline{A}$. Из очевидного включения $\mathcal{E}(A) \subset \overline{\mathcal{E}}(A)$ следует $\overline{A} \subset A^*$, поэтому $A \subset \overline{A} \cap E \subset A^* \cap E = A$. Таким образом, $\overline{A} \cap E = A$, откуда следует $\overline{A} \in \mathcal{E}(A)$. Согласно определению A^* имеет место $A^* \subset \overline{A}$. Равенство $A^* = \overline{A} \pmod{\mu}$ доказано. $\square$

Положим $A^* := \inf \mathcal{E}(A) = \inf \overline{\mathcal{E}}(A)$.

Лемма 4. *Отображение γ, определяемое соотношением $A \mapsto A^*$, есть изоморфизм булевой алгебры $(\Sigma \cap E)/\Sigma_0$ на алгебру $(\Sigma \cap E^*)/\Sigma_0$.*

Доказательство. Последовательно докажем ряд свойств.

1) $[A, B \in \Sigma \cap E,\ A \subset B] \Rightarrow [\gamma(A) \subset \gamma(B)]$ (в частности, $\gamma(A) \in (\Sigma \cap E^*)/\Sigma_0$).

Очевидно, $\gamma(B) \in \overline{\mathcal{E}}(A)$, и поскольку (согласно лемме 3) $\gamma(A)$ — наименьший элемент $\overline{\mathcal{E}}(A)$, то $\gamma(A) \subset \gamma(B)$.

2) $[A_n \in \Sigma \cap E,\ n = 1, 2, \ldots] \Rightarrow [\gamma(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n)]$.

Из свойства 1) следует $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n) \subset \gamma(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$. Далее, очевидно, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n) \in \overline{\mathcal{E}}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$, и поскольку $\gamma\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ есть наименьший элемент $\overline{\mathcal{E}}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n)\right)$, то $\gamma\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n)$.

3) $\forall B \in \Sigma \cap \gamma(E)\ \gamma(B \cap E) = B$ (в частности, γ сюръективно).

Пусть $B \in \Sigma \cap \gamma(E)$. Тогда $A := B \cap E \in \Sigma \cap E$. Согласно лемме 3 и определению семейств $\mathcal{E}(A)$, $\overline{\mathcal{E}}(A)$ имеем $\gamma(A) \subset B$, $A = \gamma(A) \cap E = B \cap E$. Из последнего равенства и свойства 1) следует $D := B \setminus \gamma(A) \subset \gamma(E) \setminus E$. Отсюда, из определения $\gamma(E)$ как наибольшего элемента $\overline{\mathcal{E}}(E)$ и включения $D \in \Sigma$ вытекает $D \in \Sigma_0$. Таким образом, $\gamma(A) = B \pmod{\mu}$.

4) $[A, B \in \Sigma \cap E,\ A \cap B \in \Sigma_0] \Rightarrow [\gamma(A) \cap \gamma(B) \in \Sigma_0]$.

Для любого $D \in \Sigma \cap E$ имеет место $\gamma(D) \cap E = D$ (это следует из включения $\gamma(D) \in \mathcal{E}(D)$). Из свойства 3) и этого равенства вытекает

$$\gamma(A) \cap \gamma(B) = \gamma(\gamma(A) \cap \gamma(B) \cap E) = \gamma(A \cap B) = \gamma(\emptyset) = \emptyset \pmod{\mu} .$$

5) $[A, B \in \Sigma \cap E] \Rightarrow [\gamma(E \setminus B) = \gamma(E) \setminus \gamma(B)]$.

Из 2), 4) следует $\gamma(B) \cup \gamma(E \setminus B) = \gamma(E)$, $\gamma(B) \cap \gamma(E \setminus B) = \emptyset$. Отсюда, очевидно, вытекает требуемое равенство.

6) γ взаимно однозначно отображает $(\Sigma \cap E)/\Sigma_0$ на $(\Sigma \cap \gamma(E))/\Sigma_0$. При этом γ^{-1} определяется равенством $\gamma^{-1}(B) = B \cap E$.

Если $A \neq B$, то согласно 3), 5) $\gamma(A) \triangle \gamma(B) = \gamma(A \triangle B) \notin \Sigma_0$, т. е. $\gamma(A) \neq \gamma(B)$. Таким образом, отображение γ инъективно. Сюръективность γ и равенство $\gamma^{-1}(B) = B \cap E$ вытекают из утверждения п. 3). $\square$

Теорема 2. *Для любого фиксированного* $\widetilde{x} \in X$ *существует единственный оператор* $r_E : L_0(\Sigma \cap E, X) \to L_0(\Sigma, X)$, *для которого*

$$P_E r_E \varphi = \varphi, \quad P_{T \setminus \gamma(E)} r_E \varphi \equiv \widetilde{x}. \tag{3}$$

Доказательство. 1) Пусть $\mathcal{P}_0(\Sigma \cap E, X)$, $\mathcal{P}_0(\Sigma, X)$ — пространства счетнозначных $\Sigma \cap E$-измеримых функций из E в X и соответственно Σ-измеримых функций из T в X.

Зафиксируем произвольное $\varphi \in \mathcal{P}_0(\Sigma \cap E, X)$ вида $\varphi(t) = x_k$, $t \in E_k$, где $R := \{E_k\}_{k \in I} \subset \Sigma$ — счетное разбиение E. Определим функцию $r_E \varphi$ равенством

$$(r_E \varphi)(t) = x_k, \ \ t \in \gamma(E_k), \quad (r_E \varphi)(t) = \widetilde{x}, \ \ t \in T \setminus \gamma(E) \tag{4}$$

($\widetilde{x} \in X$ произвольно и фиксировано). Определение корректно, т. к. согласно лемме 4 $\{\gamma(E_k)\}_{k \in I}$ есть счетное измеримое разбиение $\gamma(E)$.

Тем самым мы определили оператор $r_E : \mathcal{P}_0(\Sigma \cap E, X) \to \mathcal{P}_0(\Sigma, X)$. Для $\varphi \in \mathcal{P}_0(\Sigma \cap E, X)$ равенства (3) очевидным образом вытекают из построения.

2) Зафиксируем теперь произвольное $\varphi \in L_0(\Sigma \cap E, X)$ и найдем такие $\varphi_n \in \mathcal{P}_0(\Sigma \cap E, X)$, $n = 1, 2, \ldots$, что $\varphi_n \to \varphi$ п. в. Для произвольного $\sigma > 0$ положим $G_{nm} = \gamma(A_{nm})$, где $A_{nm} = \{t \in E \mid d(\varphi_n(t), \varphi_m(t)) > \sigma\}$. Согласно (4) $G_{nm} = \{t \in T \mid d((r_E \varphi_n)(t), (r_E \varphi_m)(t)) > \sigma\}$. Поскольку $\varphi_n \xrightarrow{\mu_E} \varphi$, то в силу леммы 4 $\mu G_{nm} = \mu_E A_{nm} \to 0, n, m \to \infty$. Таким образом, последовательность $\{r_E \varphi_n\}$ фундаментальна по мере, и согласно секвенциальной полноте пространства $L_0(\Sigma, X)$ она сходится к некоторому элементу пространства $L_0(\Sigma, X)$, который обозначим через $r_E \varphi$. Извлекая из $\{r_E \varphi_n\}$ сходящуюся почти всюду подпоследовательность $\{r_E \varphi_{n_k}\}$, получаем из свойств $P_E r_E \varphi_{n_k} = \varphi_{n_k}$, $P_{T \setminus \gamma(E)} r_E \varphi_{nk} \equiv \widetilde{x}$ и сходимости $\varphi_{n_k} \xrightarrow{\text{п.в.}} \varphi$ справедливость равенств (3).

Таким образом, оператор r_E на $L_0(\Sigma \cap E, X)$, удовлетворяющий свойству (3), построен.

3) Докажем единственность оператора r_E, удовлетворяющего (3). Пусть $\varphi \in L_0(\Sigma \cap E, X)$, $\psi_i \in L_0(\Sigma, X)$, $i = 1, 2$ таковы, что

$$P_E \psi_i = \varphi, \quad P_{T \setminus \gamma(E)} \psi_i \equiv \widetilde{x}, \quad i = 1, 2.$$

Очевидно, $B := \{t \in T \mid \psi_1(t) \neq \psi_2(t)\} = B_1 \cup N$, где $\mu N = 0$, а $B_1 \subset \gamma(E) \setminus E$. По лемме 4 $\mu^*(\gamma(E) \setminus E){=}0$, поэтому $\mu^* B_1{=}0$. В силу полноты меры $\mu B_1{=}0$. Таким образом, $\psi_1{=}\psi_2$. $\square$

4. Ω-условие и его свойства

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с полной конечной мерой, (X, d), (Y, ρ) — полные сепарабельные метрические пространства, $\Sigma_1 \subset \Sigma$ — σ-подалгебра алгебры Σ, полная относительно μ. Последнее означает $\Sigma_1 \supset \Sigma_0 := \mu^{-1}(\{0\})$.

Определение 3. Будем говорить, что σ-подалгебра Σ_1 σ-алгебры Σ удовлетворяет *Ω-условию* (сокращенно $\Sigma_1 \in \Omega(\Sigma)$), если существует счетное измеримое разбиение $R = \{T_n\}_{n\in I}$ пространства T со свойством

$$\Sigma_1 \cap T_n = \Sigma \cap T_n, \quad n \in I. \tag{5}$$

Для $\Sigma_1 \in \Omega(\Sigma)$ через $\Re(\Sigma_1)$ будем обозначать семейство счетных измеримых разбиений $(\operatorname{mod}\mu)$ $R = \{T_n\}_{n\in I}$, удовлетворяющих (5).

Замечание 3. В [25] определяется условие $\omega(h_1, h_2, \dots, h_n)$ на функцию $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ (случай $n = \infty$ не исключается), при выполнении которого σ-подалгебра исходной σ-алгебры в $\mathbf{R}^n$ как раз удовлетворяет Ω-условию в смысле определения 3. В [25] условие ω играет ключевую роль для нахождения аналитического представления оператора, сопряженного к линейному оператору внутренней суперпозиции. Примечательно, что близкое Ω-условие играет не менее важную роль в вопросе о представлении нелинейного ЛО в виде оператора Немыцкого (см. § 5 ниже).

Зафиксируем произвольную σ-подалгебру Σ_1 алгебры Σ и рассмотрим ее строение. Всюду далее считаем, что элементы Σ/Σ_0 упорядочены естественным образом, т. е. по включению $(\operatorname{mod}\mu)$.

Лемма 5. *Если семейство $\mathcal{E} \subset \Sigma/\Sigma_0$ замкнуто относительно счетных объединений, то оно имеет наибольший элемент.*

Доказательство. Пусть $a = \sup\limits_{E\in\mathcal{E}} \mu E$. Найдем $E_n \in \mathcal{E}$, для которых $\mu E_n > a - 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, и положим $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. По условию $E \in \mathcal{E}$, и согласно построению $\mu E = a$. Покажем, что E — наибольший элемент $\mathcal{E}$.

Предположим противное, т. е. что $(\exists D \in \mathcal{E})$ $\mu(D \setminus E) > 0$. Тогда $D \cup E \in \Sigma$, и $\mu(D \cup E) > a$, что противоречит определению числа a. $\square$

Лемма 6. *Семейство $\Sigma_c := \{E \in \Sigma_1 \mid \Sigma_1 \cap E = \Sigma \cap E\}/\Sigma_0$ имеет наибольший элемент.*

Доказательство. В силу леммы 5 достаточно показать, что Σ_c замкнуто относительно счетных объединений. Пусть $E_n \in \Sigma_c$, $n = 1, 2, \dots$, $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, и $A \in \Sigma \cap E$ произвольно. Поскольку $E_n \in \Sigma_c$, то $A_n := A \cap E_n \in \Sigma_1 \cap E_n \subset \Sigma_1$. Тогда $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma_1$. Так как вдобавок $A \subset E$, то $A \in \Sigma_1 \cap E$. Включение $E \in \Sigma_c$ доказано.

Наибольший элемент семейства Σ_c, который существует в силу леммы 4, обозначим символом T_c.

Лемма 7. *Семейство $\Sigma_d := \{E \in \Sigma \cap (T \setminus T_c) \mid$ существует такое счетное измеримое разбиение $\{E_n\}_{n\in I}$ множества E, что $\Sigma_1 \cap E_n = \Sigma \cap E_n$, $n \in I\}/\Sigma_0$ имеет наибольший элемент.*

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 6, достаточно доказать замкнутость Σ_d относительно счетных объединений.

1) Проверим свойство

$$[E \in \Sigma_d, \ A \in \Sigma \cap E] \Rightarrow [\, A \in \Sigma_d]. \tag{6}$$

Действительно, если $E \in \Sigma_d$ и $\{E_n\}_{n\in I}$ — счетное измеримое разбиение E, для которого $\Sigma_1 \cap E_n = \Sigma \cap E_n$, $n \in I$, то для элементов $A_n := E_n \cap A$ счетного измеримого разбиения $\{A_n\}_{n\in I}$ множества A справедливо равенство $\Sigma_1 \cap A_n = \Sigma \cap A_n$. Включение $A \in \Sigma_d$ доказано.

2) Пусть теперь $E_n \in \Sigma_d$, $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, и счетные измеримые разбиения $\{T_{nk}\}_{k\in I_n}$ множеств E_n, $n = 1, 2, \dots$, выбраны так, что $\Sigma_1 \cap T_{nk} = \Sigma \cap T_{nk}$ $(\forall k, n)$.

Положим $A_1 = E_1$, $A_n = E_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k$, $k = 2, 3, \ldots$ Очевидно, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и множества A_n попарно дизъюнктны. В силу (6) $A_n \in \Sigma_d$.

Пусть измеримые разбиения $\{A_{nk}\}_{k \in I_n}$ множеств A_n, $n = 1, 2, \ldots$, выбраны так, что

$$\Sigma_1 \cap A_{nk} = \Sigma \cap A_{nk}, \quad k \in I_n, \;\; n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Очевидно, $\{A_{nk}\}_{k \in I_n,\, n \in I}$ — счетное измеримое разбиение E, и в силу (7) имеем $A \in \Sigma_d$. $\square$

Наибольший элемент семейства Σ_d обозначим символом T_d. Положим $T_s = T \setminus (T_c \cup T_d)$.

Теорема 3. *Семейство T однозначно $\pmod{\mu}$ представимо в виде дизъюнктного объединения трех множеств: T_c, T_d, $T_s \in \Sigma$, которые обладают свойствами*

1) $T_c \in \Sigma_c$; *для любого $D \in \Sigma_1$, удовлетворяющего условию $\Sigma_1 \cap D = \Sigma \cap D$, имеет место включение $D \subset T_c \pmod{\mu}$* ;
2) $T_d \in \Sigma_d$ *и* $(\forall D \in \Sigma_d)$ $D \subset T_d \pmod{\mu}$, *более того,* $(\forall D \in (\Sigma_1 \cap T_d) \setminus \Sigma_0)$ $\Sigma_1 \cap D \neq \Sigma \cap D \pmod{\mu}$, *в частности, элементы любого счетного измеримого разбиения $\{T_n\}_{n \in I}$ множества T, удовлетворяющего условию $\Sigma_1 \cap T_n = \Sigma \cap T_n$, $n \in I$, не принадлежат Σ_1*;
3) $(\forall D \in (\Sigma \cap T_s) \setminus \Sigma_0)$ $\Sigma_1 \cap D \neq \Sigma \cap D$.

Доказательство. Все утверждения теоремы очевидным образом вытекают из лемм 6, 7. Заметим лишь, что если предположить для некоторого $D \in \Sigma_1 \cap T_d$ справедливость $\Sigma_1 \cap D = \Sigma \cap D$, то получим $T_c \cup D \in \Sigma_c$ в противоречие с определением T_c, а если бы нашлось $D \in \Sigma \cap T_s$, для которого $\Sigma_1 \cap D = \Sigma \cap D$, то $D \in \Sigma_c \cup \Sigma_d$ в противоречие с определениями T_c и T_d. $\square$

Следствие 1. 1) $[T_c = T \pmod{\mu}] \Leftrightarrow [\Sigma = \Sigma_1]$;
2) $[T_s = \emptyset] \Leftrightarrow [\Sigma_1 \in \Omega(\Sigma)]$;
3) $[T_s = T \pmod{\mu}] \Leftrightarrow [(\forall E \in \Sigma)\ \Sigma_1 \cap E \notin \Omega(\Sigma \cap E)]$;
4) T_s не содержит атомов σ-алгебры Σ.

Из вторых утверждений теоремы 3 и следствия 1 получаем следующий критерий.

Следствие 2. σ-подалгебра Σ_1 удовлетворяет Ω-условию тогда и только тогда, когда

$$(\forall E \in \Sigma) \;\; (\exists D \in \Sigma \cap E): \;\; \Sigma_1 \cap D = \Sigma \cap D.$$

Замечание 4. По сути большинство результатов этого параграфа следует из более общих результатов теории меры ([29], [32], [33]) и допускает разнообразную интерпретацию. В частности, Ω-условие означает, что в T нет Σ_1-однородных ненасыщенных множеств ([33], гл. 2) — об этом говорит следствие 2. Однако мы стремились в статье избежать введения дополнительной терминологии и дать непосредственные доказательства, не ссылаясь на специальные результаты о разложении пространств с мерой и булевых алгебр.

Введенные в этом параграфе определения проиллюстрируем теперь на простых примерах. В первых трех из них $T = [0, 1]$, Σ — σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств в T, μ — мера Лебега.

Пример 1. $\Sigma_1 = \left\{ \bigcup_{n=1}^{m} \{A + \frac{n-1}{m}\} \;\middle|\; A \in \Sigma \cap [0, \frac{1}{m}] \right\}$ (натуральное $m > 1$ фиксировано). Очевидно, $\Sigma_1 \in \Omega(\Sigma)$, более того, $T_d = T$, $T_c = T_s = \emptyset$ и для $T_n = [\frac{n-1}{m}, \frac{n}{m}]$ имеет место $\{T_n\}_{n=1}^{m} \in \Re(\Sigma_1)$.

Пример 2. $\Sigma_1 = \{\{t \in T \mid \cos\frac{\pi}{t} \in V\} \mid V \in \Sigma\}$. Как и в примере 1, имеем $\Sigma_1 \in \Omega(\Sigma)$, $T_d = T$, $T_c = T_s = \emptyset$, и для $T_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ справедливо $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Re(\Sigma_1)$.

Пример 3. Σ_1 — σ-алгебра, порожденная семейством $(\Sigma \cap [0, a]) \cup \Sigma_0 \cup \{T\}$, где $a \in (0, 1)$. В этом случае $\Sigma_1 \notin \Omega(\Sigma)$, поскольку $T_c = [0, a]$, $T_s = [a, 1]$, $T_d = \emptyset$.

Пример 4. $T = [0,1]^2$, Σ, $\widetilde{\Sigma}$ — σ-алгебры измеримых по Лебегу множеств в $[0,1]^2$ и $[0,1]$ соответственно, $\Sigma_1 = \{A \times [0,1] \mid A \in \widetilde{\Sigma}\}$. Тогда $\Sigma_1 \notin \Omega(\Sigma)$, $T_s = T$, $T_c = T_d = \emptyset$.

Очевидно, в примерах 1, 2 σ-подалгебры $\Sigma_1 \in \Omega(\Sigma)$ порождаются функциями, удовлетворяющими условию $\omega(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ работы ([25], с. 97). Читатель без труда сможет найти эти функции и соответствующие им функции h_k.

Через $\widetilde{\mu}$ обозначим сужение меры μ на σ-алгебру Σ_1, а через $\widetilde{\mu}_E$ $(E \in \Sigma)$ — сужение внешней меры $\widetilde{\mu}^*$ на σ-алгебру $\Sigma \cap E$.

Лемма 8. *Если* $\Sigma_1 \in \Omega(\Sigma)$, $R = \{T_n\}_{n \in I} \in \Re(\Sigma_1)$, *то при каждом* $n \in I$ *функция множества* $\widetilde{\mu}_{T_n}$ *есть мера, абсолютно непрерывная относительно меры* $\mu_{T_n} := \mu|_{\Sigma \cap T_n}$.

Доказательство. Из равенства (5) вытекает счетная аддитивность функции $\widetilde{\mu}_{T_n}$, а из леммы 4 — свойство $[A \in \Sigma \cap T_n,\ \widetilde{\mu}_{T_n} A = 0] \Rightarrow [\mu_{T_n} A = 0]$. $\square$

Замечание 5. 1) При $\Sigma_1 \notin \Omega(\Sigma)$, $E \in \Sigma \setminus \Sigma_1$ функция множества $\widetilde{\mu}_E$ может не быть счетно аддитивной. Это справедливо, в частности, для $E = [a, 1]$ из примера 3 или для $E = \{(t,s) \in [0,1]^2 \mid t \le s\}$ из примера 4.

2) Если в условиях леммы 8 $n \in N$ таково, что $T_n \ne T_c$, то мера $\widetilde{\mu}_{T_n}$ не совпадает с μ_{T_n}. Это легко видеть на примерах 1, 2, в частности, для T_n из примера 1 имеем $\widetilde{\mu}_{T_n} A = m \cdot \mu_{T_n}$.

5. Критерий представимости локального оператора в виде оператора Немыцкого

Пусть, как и ранее, (T, Σ, μ) — пространство с полной конечной мерой, а (X, d), (Y, ρ) — полные сепарабельные метрические пространства. Вплоть до теоремы 6 будем предполагать, что $\Sigma_1 \in \Omega(\Sigma)$, $R = \{T_n\}_{n \in I} \in \Re(\Sigma_1)$. Через γ_n, r_n будем обозначать операторы, определенные как γ в лемме 4 и r_E в теореме 2, где роль E играет T_n. Для удобства положим также $P_n := P_{T_n, X}$. Через $\widetilde{\mu}$ обозначим сужение меры μ на σ-алгебру Σ_1, а через μ_n — сужение внешней меры $\widetilde{\mu}^*$ на σ-алгебру $\Sigma \cap T_n$ (т. е. $\mu_n = \widetilde{\mu}_{T_n}$).

Лемма 9. $L_0(\Sigma, X) = S_R(L_0(\Sigma_1, X))$.

Доказательство. Из включений $T_n \in \Sigma$, $L_0(\Sigma_1, X) \subset L_0(\Sigma, X)$ следует согласно лемме 2 $S_R(L_0(\Sigma_1, X)) \subset S_R(L_0(\Sigma, X)) = L_0(\Sigma, X)$.

Обратно, зафиксируем произвольное $\varphi \in L_0(\Sigma, X)$. В силу теоремы 2 (роль E здесь играют T_n, а роль Σ — сначала Σ, а затем Σ_1) и определения Ω-условия

$$P_n(L_0(\Sigma, X)) = L_0(\Sigma \cap T_n, X) = L_0(\Sigma_1 \cap T_n, X) = P_n(L_0(\Sigma_1, X)), \quad n \in I.$$

Отсюда следует $L_0(\Sigma, X) \subset S_R(L_0(\Sigma_1, X))$ согласно лемме 1. $\square$

Теорема 4. *Предположим, что* (T, Σ, μ) *— пространство с полной конечной мерой, полная* σ*-подалгебра* $\Sigma_1 \subset \Sigma$ *удовлетворяет* Ω*-условию,* (X, d), (Y, ρ) *— сепарабельные метрические пространства, и* $h : L_0(\Sigma_1, X) \to L_0(\Sigma, Y)$ *— ЛО.*

Тогда существует единственный ЛО $\widetilde{h} : L_0(\Sigma, X) \to L_0(\Sigma, Y)$, *сужение которого на* $L_0(\Sigma_1, X)$ *совпадает с* h.

Доказательство вытекает непосредственно из теоремы 1 и леммы 9.

Далее ЛО $\widetilde{h}$, для которого справедливо утверждение теоремы 4, будем называть локальным продолжением оператора h на пространство $L_0(\Sigma, X)$.

Теорема 5. *Если в условиях теоремы 4 ЛО* $h : L_0(\Sigma_1, X) \to L_0(\Sigma, Y)$ *непрерывен, то его локальное продолжение* $\widetilde{h} : L_0(\Sigma, X) \to L_0(\Sigma, Y)$ *есть также непрерывный оператор.*

Доказательство. Предположим, что утверждение не имеет места. Докажем сначала существование таких $\sigma > 0$, $m \in I$ и $\varphi_n \in L_0(\Sigma, X)$, $n = 0, 1, \ldots$, что $\varphi_n \xrightarrow{\mu} \varphi_0$, но

$$\mu E_n > \sigma, \tag{8}$$

где

$$E_n := \{t \in T_m \mid d((\widetilde{h}\varphi_n)(t), (\widetilde{h}\varphi_0)(t)) > \sigma\}.$$

Так как оператор $\widetilde{h}$ не является непрерывным в точке φ_0, то для некоторого $\delta > 0$ и некоторой последовательности $\{\psi_k\}$, сходящейся по мере к φ_0, имеем $\mu D_k > \delta$, где

$$D_k := \{t \in T \mid \rho((\widetilde{h}\psi_k)(t), (\widetilde{h}\varphi_0)(t)) > \delta\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Из сепарабельности Y вытекает $D_k \in \Sigma$ (см. лемму 2 работы [15]). Найдем такое $M \in I$, что $\mu \bigcup\limits_{k>M} T_k < \delta/2$. Тогда $\mu\left(\bigcup\limits_{j=1}^{M}(D_k \cap T_j)\right) > \delta/2$, $k \in I$. Отсюда следует существование подпоследовательности $\{k_n\}$ и индекса $m \in \{1, 2, \ldots, M\}$, для которых $\mu(D_{k_n} \cap T_m) > \frac{\delta}{2M}$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда неравенство (8) имеет место для $\varphi_n = \psi_{k_n}$, $\sigma = \frac{\delta}{2M}$, $E_n = D_{k_n} \cap T_m$.

Определим функции $\widetilde{\varphi}_n \in L_0(\Sigma_1, X)$ равенством $\widetilde{\varphi}_n = r_m P_m \varphi_n$ ($\widetilde{\varphi}_n$ действительно принадлежат $L_0(\Sigma_1, X)$, поскольку $P_m\varphi_n \in L_0(\Sigma \cap T_m, X) = L_0(\Sigma_1 \cap T_m, X)$). Для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ рассмотрим множества

$$A_n := \{t \in T_m \mid d(\widetilde{\varphi}_n(t), \widetilde{\varphi}_0(t)) > \varepsilon\}, \quad B_n := \{t \in T \mid d(\widetilde{\varphi}_n(t), \widetilde{\varphi}_0(t)) > \varepsilon\}.$$

Из сходимости $\varphi_n \xrightarrow{\mu} \varphi_0$ и равенства $P_m\widetilde{\varphi_n} = P_m\varphi_n$ следует $\mu A_n \to 0$, $n \to \infty$, а из леммы 8 вытекает $\mu_m A_n \to 0$, $n \to \infty$. Далее, согласно теореме 2 $B_n = \gamma_m(A_n)$, поэтому $\mu B_n = \mu_m A_n \to 0$, $n \to \infty$.

Итак, имеем (a) $\widetilde{\varphi}_n \in L_0(\Sigma_1, X)$, (b) $\widetilde{\varphi}_n \xrightarrow{\mu} \widetilde{\varphi}_0$, (c) $P_m\varphi_n = P_m\widetilde{\varphi}_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Из (c), локальности $\widetilde{h}$ и свойства $\widetilde{h}|_{L_0(\Sigma_1, X)} = h$ следует

$$P_m h\widetilde{\varphi}_n = P_m\widetilde{h}\varphi_n.$$

Отсюда и из неравенства (8) вытекает, что последовательность $\{h\widetilde{\varphi}_n\}$ не сходится по мере к $\{h\widetilde{\varphi}\}$. Это утверждение и свойства (a), (b) показывают, что оператор h не является непрерывным, что противоречит условию теоремы. $\square$

ЛО $\widetilde{h}$, для которого справедливо утверждение теоремы 5, будем называть локальным непрерывным продолжением оператора h на пространство $L_0(\Sigma, X)$.

Лемма 10. *Если сепарабельное метрическое пространство (X, d) содержит хотя бы одно связное множество, отличное от точки, то существуют такие $x_0 \in X$ и $\alpha > 0$, что выполнены свойства*

1) $\{d(x, x_0) \mid x \in X\} \supset [0, \alpha]$,
2) *для любого $u \in (0, \alpha)$ существует такая точка $x \in X$, что в каждой окрестности точки x найдутся по крайней мере две такие точки x_+ и x_-, что $d(x_+, x_0) > u$, $d(x_-, x_0) < u$.*

Доказательство. 1) Согласно условию существует связное множество $D \subset X$, содержащее по крайней мере две различные точки x_0, x_*. Пусть $\alpha = d(x_0, x_*)$. Как известно (напр., [31], с. 122), всякая вещественная непрерывная функция на связном пространстве вместе с двумя различными значениями принимает все промежуточные значения. Это справедливо, в частности, для функции $f(\cdot) := d(\cdot, x_0) : D \to \mathbf{R}$, для которой $f(x_0) = 0$, $f(x_*) = \alpha$. Таким образом, $f(D) \supset [0, \alpha]$.

2) Зафиксируем произвольное $u \in (0, \alpha)$ и рассмотрим множества

$$D_+ := f^{-1}((u, +\infty)), \quad D_0 := f^{-1}(\{u\}), \quad D_- := f^{-1}([0, u)).$$

В силу уже доказанного свойства 1) каждое из этих трех множеств непусто. Очевидно,

$$\overline{D}_+ \subset D_+ \cup D_0, \quad \overline{D}_- \subset D_- \cup D_0, \quad \overline{D}_+ \cup \overline{D}_- = D \tag{9}$$

(здесь и далее черта вверху означает замыкание множества в D).

Рассмотрим замкнутые множества $Z_+ := \overline{D}_+ \cap D_0$, $Z_- := \overline{D}_- \cap D_0$. Заметим, что они непусты. Действительно, если предположить, например, что $Z_+ = \emptyset$, то получим равенство $\overline{D}_+ = D_+$, означающее, что D_+ — открыто-замкнутое множество в D. Это противоречит связности D (напр., [31], с. 118).

Из связности множества D и (9) следует $Z := Z_+ \cap Z_- = \overline{D}_+ \cap \overline{D}_- \neq \emptyset$. Так как $Z \subset \overline{D}_+ \cap \overline{D}_- \cap D_0$, то множество Z состоит из точек, предельных как для множества D_+, так и для D_-. Таким образом, любая точка $x \in Z$ будет искомой. $\square$

Определение 4. Метрическое пространство называется *суслинским* (*лузинским*), если оно является непрерывным (соответственно непрерывным и биективным) образом некоторого полного сепарабельного метрического пространства.

Накладываемое ниже ограничение: X — суслинское метрическое пространство, содержащее связное множество, отличное от точки, носит весьма общий характер. Оно выполнено, в частности, для замкнутых подмножеств с непустой внутренностью сепарабельных банаховых пространств.

Далее считаем, что Σ_1 — некоторая полная σ-подалгебра алгебры Σ, не накладывая априорно ограничения $\Sigma_1 \in \Omega(\Sigma)$.

Приведем для удобства ряд известных определений (см., напр., [32]–[34]).

Определение 5. Пространство с полной конечной мерой (T, Σ, μ) называется *пространством Лебега*, если существует счетная подалгебра $\mathcal{A} \subset \Sigma$ такая, что выполнены условия

a) Σ есть пополнение по мере μ σ-алгебры, порожденной $\mathcal{A}$,

b) $\mathcal{A}$ разделяет точки T, т. е.

$$(\forall t, s \in T,\ t \neq s) \ \ (\exists A \in \mathcal{A}): \ \ (t \in A,\ s \in T \setminus A),$$

c) $\mathcal{A}$ — компактный класс множеств, т. е. каждая убывающая последовательность множеств из $\mathcal{A}$ имеет непустое пересечение.

Определение 6. Измеримые пространства $(T_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2$, называются *борелевски изоморфными*, если существует такое биективное отображение f из T_1 на T_2, что $f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}_1$ и $(f^{-1})^{-1}(\mathcal{T}_1) \subset \mathcal{T}_2$. При этом отображение f называется *борелевским изоморфизмом* T_1 на T_2.

Определение 7. Пространства с полной конечной мерой $(T_i, \mathcal{T}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, называются *изоморфными* $(\operatorname{mod} \mu)$, если существует отображение $f : T_1 \to T_2$ и множества $N_i \subset \mathcal{T}_i$ с мерой $\mu_i N_i = 0$, $i = 1, 2$, такие, что выполняются условия

a) $f|_{T_1 \setminus N_1}$ есть борелевский изоморфизм измеримого пространства $(T_1 \setminus N_1, \mathcal{T}_1 \cap (T_1 \setminus N_1))$ на $(T_2 \setminus N_2, \mathcal{T}_2 \cap (T_2 \setminus N_2))$,

b) $\mu_1 f^{-1} = \mu_2$.

При этом отображение f называется *изоморфизмом* из пространства с мерой $(T_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ на $(T_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$.

Хорошо известна

Теорема Рохлина ([32]). 1) *Пространство, изоморфное пополнению стандартного пространства* (*т. е. полного сепарабельного метрического пространства с борелевской мерой*), *есть пространство Лебега.*

2) *Пространство Лебега* (T, Σ, μ) *с неатомической мерой изоморфно* $(\operatorname{mod} \mu)$ *пространству* $([0,1], \mathcal{L}, m_T)$, *где* $\mathcal{L}$ *— лебеговская* σ*-алгебра на* $[0,1]$, *а* m_T *— мера, равная мере Лебега, умноженной на число* μT (*так что* $m_T[0,1] = \mu T$).

Определение 8. Для функции $f : T \times X \to Y$ оператор $\mathcal{N}_f : F(X) \to F(Y)$, определяемый равенством

$$(\mathcal{N}_f \varphi)(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \text{при почти всех} \quad t \in T,$$

называется *оператором Немыцкого (суперпозиции)*, порожденным функцией f.

Определение 9. Функция $f : T \times X \to Y$ называется *функцией Шрагина* ([7], [8]), если существует такое $T_0 \in \Sigma_0$, что сужение функции f на множество $(T \setminus T_0) \times X$ $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$-измеримо ($\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$ — σ-алгебра, порожденная всевозможными прямоугольниками $A \times B$, где $A \in \Sigma$, $B \in \mathcal{B}(X)$).

Отметим, что в [12] и [13] такая функция названа стандартной.

Определение 10. Говорят, что функция $f : T \times X \to Y$ удовлетворяет *условиям Каратеодори*, если для любого $x \in X$ функция $f(\cdot, x)$ Σ-измерима и при почти всех $t \in T$ функция $f(t, \cdot)$ непрерывна.

Теорема 6. *Пусть* (T, Σ, μ) *— пространство Лебега,* X *— суслинское метрическое пространство, содержащее связное множество, отличное от точки, и* Y *состоит более чем из одной точки.*

Тогда, если σ*-подалгебра* Σ_1 *не удовлетворяет* Ω*-условию, то существует непрерывный ЛО* $h : L_0(\Sigma_1, X) \to L_0(\Sigma, Y)$, *не продолжаемый локально и непрерывно на* $L_0(\Sigma, X)$ (*т. е. для любого непрерывного ЛО* $h^* : L_0(\Sigma, X) \to L_0(\Sigma, Y)$ *имеет место* $h^*|_{L_0(\Sigma_1, X)} \neq h$).

Доказательство. Согласно следствию 1 $\Sigma_s \neq \emptyset$, а согласно утверждению 3) теоремы 3 множество T_s (положительной меры) обладает свойствами

A) $[A \subset T_s,\ \mu A > 0] \Rightarrow [\Sigma \cap A \neq \Sigma_1 \cap A]$;

B) T_s не содержит атомов меры μ.

Согласно теореме Рохлина существует изоморфизм β пространства $(T, \Sigma \cap T_s, \mu|_{\Sigma \cap T_s})$ на $([0,1], \mathcal{L}, m_{T_s})$

Пусть y_1, y_2 — два различных элемента метрического пространства Y. Выберем точку $x_0 \in X$ и $\alpha \in (0,1)$ такие, что справедливо утверждение леммы 10. Определим функцию $f : T \times X \to Y$ равенством

$$f(t,x) = \begin{cases} y_1, & \text{если } t \in T \setminus T_s \quad \text{или} \quad d(x, x_0) \geq \beta(t); \\ y_2, & \text{если } t \in T_s \qquad \text{и} \qquad d(x, x_0) < \beta(t), \end{cases} \tag{10}$$

и рассмотрим оператор Немыцкого $\mathcal{N}_f$, порожденный функцией f.

Легко видеть, учитывая ([15], лемма 2), что функция f $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$-измерима, тем более является функцией Шрагина. Поэтому, как доказано в [12], [13], $\mathcal{N}_f : L_0(\Sigma, X) \to L_0(\Sigma, Y)$. Далее докажем последовательно свойства **1)**, **2)**, из которых вытекает утверждение теоремы.

1) $\mathcal{N}_f : L_0(\Sigma_1, X) \to L_0(\Sigma, Y)$ и непрерывен.

2) Не существует непрерывного ЛО $h^* : L_0(\Sigma, X) \to L_0(\Sigma, Y)$, совпадающего с $\mathcal{N}_f$ на подпространстве $L_0(\Sigma_1, X)$.

Несложное рассуждение “от противного” с использованием теоремы Егорова показывает, что для доказательства **1)** достаточно для произвольной последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_0(\Sigma_1, X)$, сходящейся п. в. к φ_0, доказать, что $\mathcal{N}_f \varphi_n \to \mathcal{N}_f \varphi_0$ п. в. на T. Зафиксируем такую последовательность и, положив

$$A := \{t \in T_s \mid d(\varphi_0(t), x_0) = \beta(t)\} \cup \{t \in T \mid \varphi_n(t) \not\to \varphi_0(t)\},$$

покажем, что

$$\mu A = 0. \tag{11}$$

Предположим противное. Из теоремы 3 следует существование множества $\widetilde{E}$ ненулевой меры, принадлежащего семейству $(\Sigma \cap A) \setminus (\Sigma_1 \cap A)$. Из определения функции β вытекает включение $\beta(\widetilde{E}) \in \mathcal{L}$. Следовательно, существует множество E, равное $\widetilde{E} \pmod{\mu}$, для которого $V := \beta(D) \in \mathcal{B}([0,1])$.

Из Σ_1-измеримости функции φ_0 следует $F := [d(\varphi_0(\cdot), x_0)]^{-1}(V) \in \Sigma_1$. Согласно определению множеств A, E, V, F

$$\Sigma_1 \cap A \ni F \cap A = \beta^{-1}(V) \cap A = E.$$

Это противоречит свойству $E \notin \Sigma_1 \cap A$. Таким образом, равенство (11) доказано.

Далее, $(\forall t \in T_s \setminus A)\ \ d(\varphi_0(t), x_0) \neq \beta(t)$, поэтому в силу сходимости $\varphi_n(t) \to \varphi_0(t)$ имеем при всех n, бо́льших некоторого $N(t)$,

$$\operatorname{sign}(d(\varphi_n(t), x_0) - \beta(t)) = \operatorname{sign}(d(\varphi_0(t), x_0) - \beta(t)).$$

Таким образом, последовательность $\{f(t, \varphi_n(t))\}_{n=N(t)}^{\infty}$ стационарна. Мы показали, что $(\mathcal{N}_f \varphi_n)(t) \to (\mathcal{N}_f \varphi_0)(t)$. Отсюда и из (11), (12) следует сходимость $\mathcal{N}_f \varphi_n \to \mathcal{N}_f \varphi_0$ п.в. на T. Свойство **1)** доказано.

Предположим, что свойство **2)** не имеет места. Согласно теореме о представлении [4]–[6] существует функция $g : T \times X \to Y_c$ ((Y_c, ρ_c) — пополнение метрического пространства (Y, ρ)), удовлетворяющая условиям Каратеодори и порождающая оператор h^* (таким образом, $h^* = \mathcal{N}_g$).

Положим

$$\widetilde{T} = \{t \in T_s \cap \beta^{-1}((0,1)) \mid f(t, \cdot) \ \text{ непрерывна на } \ X\}.$$

Очевидно, $\mu\widetilde{T} > 0$. Зафиксируем произвольное счетное всюду плотное в X множество $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и рассмотрим множества

$$E_n := \{t \in \widetilde{T} \mid f(t, x_n) \neq g(t, x_n)\} \tag{12}$$

(точки Y отождествляем с точками Y_c при естественном вложении). Очевидно, $(\forall n)\ \ f(\cdot, x_n)$, $g(\cdot, x_n) \in L_0(\Sigma, Y_c)$, поэтому $E_n \in \Sigma$. Покажем, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \widetilde{T}. \tag{13}$$

Зафиксируем произвольное $t \in \widetilde{T}$ и найдем согласно утверждению 2) леммы 10 такое $x \in X$, что

$$B_r \cap X_1 \neq \emptyset, \quad B_r \cap X_2 \neq \emptyset \quad (\forall r > 0), \tag{14}$$

где

$$B_r := \{\xi \in X \mid d(\xi, x) < r\}, \quad X_1 := \{\xi \in X \mid d(\xi, x_0) > \beta(t)\}, \quad X_2 := \{\xi \in X \mid d(\xi, x_0) < \beta(t)\}.$$

В силу непрерывности функции $g(t, \cdot)$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\sup_{\xi \in B_\delta} \rho_c(g(t, \xi), g(t, x)) < \rho(y_1, y_2)/2. \tag{15}$$

Ввиду открытости множеств $B_\delta \cap X_i$, $i = 1, 2$, и свойства (14) существуют такие натуральные числа n_i, что $x_{n_i} \in B_\delta \cap X_i$, $i = 1, 2$. Согласно (10) $f(t, x_{n_i}) = y_i$, $i = 1, 2$. Отсюда и из (15) следует, что либо для $i = 1$, либо для $i = 2$ имеет место $f(t, x_{n_i}) \neq g(t, x_{n_i})$. Таким образом, равенство (13) доказано.

Из (13) и свойства $\mu\widetilde{T} > 0$ следует, что для некоторого натурального m $\mu E_m > 0$. Тогда для функции $\varphi \in L_0(\Sigma_1, X)$ вида $\varphi(t) \equiv x_m$ получаем в силу (12) неравенство $\mathcal{N}_f\varphi \neq \mathcal{N}_g\varphi$. Таким образом, сужения операторов $\mathcal{N}_f$ и $\mathcal{N}_g$ на $L_0(\Sigma_1, X)$ не совпадают. Полученное противоречие доказывает утверждение **2)**.

Из теорем 5, 6 и теоремы о представлении [4]–[6] вытекает основной результат статьи.

Теорема (основная). *Пусть (T, Σ, μ) — пространство Лебега, Σ_1 — полная σ-подалгебра σ-алгебры Σ, X — суслинское метрическое пространство, содержащее связное множество, отличное от точки, и Y — лузинское метрическое пространство, состоящее более чем из одной точки.*

Для того чтобы любой непрерывный ЛО $h : L_0(\Sigma_1, X) \to L_0(\Sigma, Y)$ был представим в виде оператора Немыцкого с порождающей функцией, удовлетворяющей условиям Каратеодори, необходимо и достаточно, чтобы σ-подалгебра Σ_1 удовлетворяла Ω-условию (см. (5)).

Замечание 6. Утверждение теоремы 7 является, по-видимому, новым даже для простейшего случая $T = [0, 1]$ (с мерой Лебега), $X = Y = \mathbf{R}$.

Замечание 7. Вопрос о том, при каких ограничениях на полную σ-подалгебру Σ_1 любой непрерывный ЛО $h : L_0(\Sigma_1, X) \to L_0(\Sigma, Y)$ представим в виде оператора Немыцкого с порождающей функцией Шрагина, в настоящее время открыт. Здесь интерес представляет исследование "узких" σ-подалгебр, не удовлетворяющих Ω-условию (для $\Sigma_1 \in \Omega(\Sigma)$ положительный ответ очевидным образом вытекает из теоремы 7 и того факта, что любая функция Каратеодори есть функция Шрагина [12]).

Теоремы 5–7 позволяют в формулируемом ниже следствии полностью описать связь между Ω-условием на σ-подалгебру Σ_1, свойством непрерывной продолжаемости ЛО и фактом представимости оператора в виде оператора Немыцкого с порождающей функцией Каратеодори.

Через $\mathcal{N}(\Sigma)$ обозначим класс таких полных σ-подалгебр алгебры Σ, что для любого непрерывного ЛО $h : L_0(\Sigma_1, X) \to L_0(\Sigma, Y)$ существует локальное непрерывное продолжение h на $L_0(\Sigma, X)$.

Через $\mathcal{K}(\Sigma)$ обозначим класс таких полных σ-подалгебр алгебры Σ, что любой непрерывный ЛО $h : L_0(\Sigma_1, X) \to L_0(\Sigma, Y)$ есть оператор Немыцкого с порождающей функцией, удовлетворяющей условиям Каратеодори.

Следствие 3. 1. $\mathcal{K}(\Sigma) \subset \mathcal{N}(\Sigma) \subset \Omega(\Sigma)$.

2. Если (T, Σ, μ) — пространство Лебега, а метрические пространства X, Y удовлетворяют условиям теоремы 7, то $\mathcal{K}(\Sigma) = \mathcal{N}(\Sigma) = \Omega(\Sigma)$.

Литература

1. Шрагин И.В. *Абстрактные операторы Немыцкого — локально определенные операторы* // ДАН СССР. – 1976. – Т. 227. – № 1. – С. 47–49.
2. Karták K. *A generalization of the Carathéodory of differential equations* // Czechosl. Math. J. – 1967. – T. 17. – № 4. – P. 482–514.
3. Vrkoč I. *The representation of Carathéodory operators* // Czechosl. Math. J. – 1969. – T. 19. – № 1. – P. 99–109.
4. Поносов А.В. *Операторы Каратеодори и операторы Немыцкого.* – Пермск. ун-т. – Пермь, 1984. – 18 с. – Деп. в ВИНИТИ 18.07.84, № 5141–84.
5. Поносов А.В. *К теории локально определенных операторов* // Функц.-дифференц. уравнения. – Пермь, 1985. – С. 72–82.
6. Поносов А.В. *О гипотезе Немыцкого* // ДАН СССР. – 1986. – Т. 289. – № 6. – С. 1308–1311.

7. Appell J. *The superposition operator in function spaces — A survey* // Expos. Math. – 1988. – V. 6. – № 3. – P. 209–270.
8. Appell J., Zabrejko P.P. *Nonlinear superposition operators.* – Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1990. – 312 p.
9. Красносельский М.А. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.* – М.: Гостехиздат, 1956. – 392 с.
10. Вайнберг М.М. *Вариационные методы исследования нелинейных операторов.* – М.: Гостехиздат, 1956. – 344 с.
11. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.* – М.: Наука, 1966. – 499 с.
12. Шрагин И.В. *Условия измеримости суперпозиций* // ДАН СССР. – 1971. – Т. 197. – № 2. – С. 295–298.
13. Шрагин И.В. *Суперпозиционная измеримость* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 1. – С. 82–92.
14. Красносельский М.А., Покровский А.В. *О разрывном операторе суперпозиции* // УМН. – 1977. – Т. 32. – Вып. 1. – С. 169–170.
15. Шрагин И.В. *Необходимость условий Каратеодори для непрерывности оператора Немыцкого* // Функц.-дифференц. уравнения и краев. задачи матем. физики. – Пермь, 1978. – С. 128–134.
16. Шрагин И.В. *Локально определенные операторы и гипотеза Немыцкого* // Функц.-дифференц. уравнения. – Пермь, 1991. – С. 95–101.
17. Красносельский М.А., Покровский А.В. *Системы с гистерезисом.* – М.: Наука, 1993. – 272 с.
18. Шрагин И.В. *Классы измеримых вектор-функций и оператор Немыцкого.* I. // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 4. – С. 48–58.
19. Шрагин И.В. *Классы измеримых вектор-функций и оператор Немыцкого.* II. // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 5. – С. 70–79.
20. Shragin I.V. *On representation of a locally defined operator in the form of the Nemytskii operator* // Funct. Different. Equat. Israel Seminar. – 1996. – № 3–4. – P. 447–452.
21. Шрагин И.В., Непомнящих Ю.В. *D-условия Каратеодори и их связь с D-непрерывностью оператора Немыцкого* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 6. – С. 70–82.
22. Поносов А.В. *Теорема о неподвижной точке для локально определенных операторов* // Краев. задачи. – Пермь, 1985. – С. 125–128.
23. Поносов А.В. *Метод неподвижной точки в теории стохастических дифференциальных уравнений* // ДАН СССР. – 1988. – Т. 299. – № 3. – С. 562–565.
24. Поносов А.В. *К теории приводимых функционально-дифференциальных уравнений Ито* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 11. – С. 1915–1925.
25. Драхлин М.Е. *Об одном линейном функциональном уравнении* // Функц.-дифференц. уравнения. – Пермь, 1985. – С. 91–111.
26. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально–дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
27. Azbelev N.V. *The ideas and methods of the Perm Seminar on boundary value problems* // Boundary Value Problems for Functional Different. Equat. – Singapore: World Scientific Publishing, 1995. – P.13–22.
28. Харазишвили А.Б. *Приложения теории множеств.* – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1989. – 143 с.
29. Владимиров Д.А. *Булевы алгебры.* – М.: Наука, 1969. – 318 с.
30. Халмош П.Р. *Теория меры.* – М.: Ин. лит., 1953. – 292 с.
31. Александров П.С. *Введение в теорию множеств и общую топологию.* Учеб. пособие. – М.:

Наука, 1977. – 368 с.
32. Рохлин В.А. *Об основных понятиях теории меры* // Матем. сб. – 1949. – Т. 25. – № 1. – С. 107–150.
33. Самородницкий А.А. *Теория меры.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. – 267 с.
34. Партасарати К. *Введение в теорию вероятностей и теорию меры.* – М.: Мир, 1983. – 343 с.

Пермский государственный университет,
Университет NLH, Норвегия

Поступила
18.03.1998