Известия вузов. Математика
2013, №8, с. 14–23

http://old.kpfu.ru/journals/izv_ vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Л.Д. ГОГОЛАДЗЕ, В.Ш. ЦАГАРЕЙШВИЛИ

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ С КОНЕЧНОЙ ВАРИАЦИЕЙ

Аннотация. В работе отмечено, что относительно общих ортонормированных систем (ОНС) коэффициенты Фурье функций с конечной вариацией $V(0,1)$ не имеют определенного порядка стремления к нулю. В связи с этим изучается задача: при каких условиях на ОНС коэффициенты Фурье функции из $V(0,1)$ удовлетворяют неравенству, которое имеет место для классических систем (тригонометрической, Уолша, Хаара).

Ключевые слова: ряды Фурье, коэффициенты Фурье, тригонометрическая система, система Уолша, система Хаара.

УДК: 517.521

1. Вспомогательные обозначения и теоремы

Через $V(0,1)$ обозначается класс всех функций с конечным изменением, $\overset{1}{\underset{0}{\vee}}(f)$ — полная вариация функции $f(x)$ на $[0,1]$. Через A обозначается полное линейное нормированное пространство абсолютно непрерывных функций с нормой

$$\|f\|_A = \int_0^1 |f'(x)|dx + \|f\|_C.$$

Как обычно, через $L_2(0,1)$ обозначается класс всех функций, интегрируемых в квадрате на $[0,1]$, ℓ_2 — класс всех числовых последовательностей (a_n), для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty.$$

Пусть (φ_n) — ОНС на $[0,1]$ и

$$\widehat{\varphi}_n(f) = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x) \in L_2(0,1)$.

Для последовательности чисел (a_k) положим

$$\mathcal{R}_{np}(x) = \sum_{k=n}^{n+p} a_k\varphi_k(x), \tag{1}$$

$$e_{np} = \left(\sum_{k=n}^{n+p} a_k^2\right)^{1/2} \tag{2}$$

Поступила 06.04.2012

и
$$e_n = \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^2\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Обозначим
$$\mathcal{R}_{np}(f,x) = \sum_{k=n}^{n+p} \widehat{\varphi}_k(f)\varphi_k(x), \tag{1$'$}$$
$$e_{np}(f) = \left(\sum_{k=n}^{n+p} \widehat{\varphi}_k^2(f)\right)^{1/2} \tag{4}$$
и
$$e_n(f) = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \widehat{\varphi}_k^2(f)\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Лемма 1. *Пусть $(a_n) \in \ell_2$ и $f(x) \in L_2(0,1)$, тогда найдется полная ОНС $(\varphi_n(x))$ и константа $c_{f,(a_k)}$, зависящая лишь от f и последовательности (a_k), такая, что*
$$a_n = c_{f,(a_k)} \cdot \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Лемма 1 вытекает из теоремы $5'$ работы [1].

2. Постановка основной задачи

Пусть $(\sqrt{2}\sin 2\pi nx)$ — тригонометрическая система на $[0,1]$ и $f(x) \in V(0,1)$ — любая функция. Тогда, как известно ([7], с. 81),
$$c_n(f) = \int_0^1 f(x)\sin 2\pi nx\, dx = O_f\left(\frac{1}{n}\right).$$
Таким образом,
$$e_n(f) = \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right)^{1/2} \le M_f\left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} < \frac{M_f}{\sqrt{n}}.$$

Если $(w_n(x))$ — система Уолша ([6], с. 66) на $[0,1]$, то аналогично получим
$$e_n(f) = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \widehat{w}_k^2(f)\right)^{1/2} \le \frac{M_f}{\sqrt{n}},$$
где $\widehat{w}_n(f) = \int\limits_0^1 f(x)w_n(x)dx$ и $M_f > 0$ не зависит от n.

Теперь рассмотрим систему Хаара (например, [2]). Как известно [2], если
$$\widehat{\chi}_n(f) = \int_0^1 f(x)\chi_n(x)dx$$
— коэффициенты Фурье–Хаара, то
$$\widehat{\chi}_{2^n+k}(f) = 2^{n/2} \int_{\frac{2k-2}{2^{n+1}}}^{\frac{2k-1}{2^{n+1}}} \left(f(x) - f\left(x + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)dx$$
и
$$|\widehat{\chi}_n(f)| = O_f\big(1/\sqrt{n}\big),$$
когда $f(x) \in V(0,1)$.

Таким образом, если $f(x) \in V(0,1)$, используя неравенство П.Л. Ульянова [2]:

$$\sum_{k=1}^{2^n} |\widehat{\chi}_{2^n+k}(f)| = \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} |\widehat{\chi}_k(f)| \le \frac{3 \cdot 2^{-n/2}}{2} \overset{1}{\underset{0}{\vee}}(f), \quad n = 0, 1, \dots ,$$

получим

$$\sum_{k=1}^{2^n} \widehat{\chi}^2_{2^n+k}(f) \le \sum_{k=1}^{2^n} |\widehat{\chi}_{2^n+k}(f)| 2^{n/2} \int_{\frac{2k-2}{2^{n+1}}}^{\frac{2k-1}{2^{n+1}}} \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right| dx \le$$

$$\le O_f(1) 2^{-n} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{2^n} |\widehat{\chi}_{2^n+k}(f)| = O_f(1) \cdot 2^{-n}.$$

Отсюда для любого n

$$\left(\sum_{m=2^n}^{\infty} \widehat{\chi}^2_m(f) \right)^{1/2} = O_f\big(1/2^{n/2}\big).$$

Наконец,

$$e_n(f) = \left(\sum_{m=n}^{\infty} \widehat{\chi}^2_m(f) \right)^{1/2} = O_f\big(1/\sqrt{n}\big).$$

Как видно, для тригонометрической системы, для систем Хаара и Уолша

$$e_n(f) = \left(\sum_{m=n}^{\infty} \widehat{\varphi}^2_m(f) \right)^{1/2} = O_f\big(1/\sqrt{n}\big).$$

Для общих ортонормированных систем, как вытекает из леммы 1, ситуация другая. Действительно, пусть $f(x) \in V(0,1)$ — некоторая функция и $a_n = n^{-2/3}$ $(n = 1, 2, \dots)$ — последовательность чисел. Тогда в силу леммы 1 существует ОНС (φ_n) такая, что

$$\widehat{\varphi}_n(f) = c_f \cdot n^{-2/3}.$$

Таким образом,

$$e_n(f) = \left(\sum_{m=n}^{\infty} \widehat{\varphi}^2_m(f) \right)^{1/2} = c_f \left(\sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^{4/3}} \right)^{1/2} = \frac{c_f}{n^{1/6}},$$

где $c_f > 0$ не зависит от n.

Теперь уже ясно видно, что оценка $e_n(f) = O_f\big(1/\sqrt{n}\big)$ в общем случае не имеет места. Ниже будут найдены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять ОНС, чтобы для любой $f \in V(0,1)$ имело место равенство $e_n(f) = O_f\big(1/\sqrt{n}\big)$.

3. Основные результаты

Лемма 2 ([3]). *Пусть $f(x)$ и $\phi(x)$ принадлежат классу $L_2(0,1)$ и $f(x)$ принимает конечные значения в каждой точке интервала $[0,1]$. Тогда имеет место равенство*

$$\int_0^1 f(x)\phi(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} \left(f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i+1}{n}\right)\right) \int_0^{i/n} \phi(x)dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{i/n} \left(f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right) \phi(x)dx + f(1) \int_0^1 \phi(x)dx. \quad (6)$$

Доказательство. Используя преобразование Абеля, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\int_{\frac{i-1}{n}}^{i/n}\phi(x)dx=\sum_{i=1}^{n-1}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)\int_0^{i/n}\phi(x)dx+f(1)\int_0^1\phi(x)dx. \tag{7}$$

С другой стороны,

$$\int_0^1 f(x)\phi(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{i/n} f(x)\phi(x)dx. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует (6). □

Положим

$$B_{np}=\max_{1\le i\le n}\left|\int_0^{i/n}\mathcal{R}_{np}(x)dx\right|.$$

Теорема 1. *Пусть* $(\varphi_n(x))$ — *ОНС на* $[0,1]$ *и* $\int\limits_0^1\varphi_n(x)dx=0$, $n=1,2,\dots$. *Чтобы для любой функции* $f(x)$ *из* $V(0,1)$ *соблюдалось условие*

$$e_n(f)=O_f\big(1/\sqrt{n}\big), \tag{9}$$

необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $(a_k)\in\ell_2$ *и равномерно относительно натурального* p *выполнялось условие*

$$B_{np}=O_{(a_k)}\big(e_n/\sqrt{n}\big). \tag{10}$$

Доказательство. Достаточность. В равенстве (6), полагая $\phi(x)=\mathcal{R}_{np}(f,x)$ с учетом (см. $(1')$) $\int\limits_0^1 R_{np}(f,x)dx=0$, получим

$$\int_0^1 f(x)\mathcal{R}_{np}(f,x)dx=\sum_{i=1}^{n-1}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)\int_0^{i/n}\mathcal{R}_{np}(f,x)dx+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{i/n}\left(f(x)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right)\mathcal{R}_{np}(f,x)dx. \tag{11}$$

С другой стороны (см. (4)),

$$e_{np}^2(f)=\sum_{k=n}^{n+p}\widehat{\varphi}_k^2(f)=\int_0^1 f(x)\sum_{k=n}^{n+p}\widehat{\varphi}_k(f)\varphi_k(x)dx\equiv\int_0^1 f(x)\mathcal{R}_{np}(f,x)dx. \tag{12}$$

Поскольку выполняется условие (10) для любой последовательности $(a_k)\in\ell_2$, то оно будет выполняться и для $(\widehat{\varphi}_k)\in\ell_2$, т. е.

$$B_{np}(f)=O_{(f)}\big(e_n(f)/\sqrt{n}\big).$$

Отсюда для $f(x)\in V(0,1)$ будем иметь

$$\left|\sum_{i=1}^{n-1}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)\int_0^{i/n}\mathcal{R}_{np}(f,x)dx\right|\le$$
$$\le\max_{1\le i\le n}\left|\int_0^{i/n}\mathcal{R}_{np}(f,x)dx\right|\sum_{i=1}^{n-1}\left|f\left(\frac{i-1}{n}\right)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right|\le\bigvee_0^1(f)B_{np}(f)\le\frac{c_f}{\sqrt{n}}e_n(f). \tag{13}$$

Далее, применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\Big|\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{i/n}\left(f(x)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right)\mathcal{R}_{np}(f,x)dx\Big| \le$$

$$\le \max_{1\le i\le n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{i/n}|\mathcal{R}_{np}(f,x)|dx\cdot\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]}\left|f(x)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\int_0^1\mathcal{R}_{np}^2(f,x)dx\right)^{1/2}\overset{1}{\underset{0}{\vee}}(f) \le \frac{\overset{1}{\underset{0}{\vee}}(f)}{\sqrt{n}}e_n(f). \quad (14)$$

Учитывая в равенстве (11) оценки (12)–(14), получим

$$e_{np}^2(f) \le \frac{c}{\sqrt{n}}e_n(f) + \frac{\overset{1}{\underset{0}{\vee}}(f)}{\sqrt{n}}e_n(f) = \frac{e_n(f)}{\sqrt{n}}\Big(c_f + \overset{1}{\underset{0}{\vee}}(f)\Big)$$

для любого натурального p. Отсюда

$$e_n^2(f) \le D_f e_n(f)/\sqrt{n},$$

где $D_f > 0$ не зависит от n. Наконец,

$$e_n(f) \le D_f/\sqrt{n}.$$

Достаточность теоремы 1 доказана.

Необходимость. Допустим противное, т. е. для некоторой последовательности $(a_k) \in \ell_2$ существует последовательность натуральных чисел (p_n) такая, что имеет место равенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{n}e_n^{-1}B_{np_n} = +\infty. \quad (15)$$

Положим

$$B_{np_n} = \max_{1\le i\le n}\Big|\int_0^{i/n}\mathcal{R}_{np_n}(x)dx\Big| = \Big|\int_0^{i_n/n}\mathcal{R}_{np_n}(x)dx\Big|. \quad (16)$$

Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ при } \ x\in\left[0,\frac{i_n}{n}\right]; \\ 1 \ \text{ при } \ x\in\left[\frac{i_n+1}{n},1\right]; \\ \quad \text{линейна на } \ \left[\frac{i_n}{n},\frac{i_n+1}{n}\right] \ \text{ и непрерывна на } \ [0,1]. \end{cases} \quad (17)$$

Легко получается

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_n\left(\frac{i}{n}\right)-f_n\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)\int_0^{i/n}\mathcal{R}_{np_n}(x)dx = -\int_0^{i_n/n}\mathcal{R}_{np_n}(x)dx = -B_{np_n}. \quad (18)$$

С другой стороны,

$$\Big|\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{i/n}\left(f_n(x)-f_n\left(\frac{i}{n}\right)\right)\mathcal{R}_{np_n}(x)dx\Big| \le$$

$$\le \int_{\frac{i-1}{n}}^{i/n}|\mathcal{R}_{np_n}(x)|dx \le \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\int_0^1\mathcal{R}_{np_n}^2(x)dx\right)^{1/2} \le e_n/\sqrt{n}. \quad (19)$$

В равенстве (11) при $f(x) = f_n(x)$, учтя оценки (18) и (19), получим

$$\Big|\int_0^1 f_n(x)\mathcal{R}_{np_n}(x)dx\Big| > \Big|\int_0^{i_n/n}\mathcal{R}_{np_n}(x)dx\Big| - e_n/\sqrt{n}.$$

Отсюда
$$\sqrt{n}e_n^{-1}\left|\int_0^1 f_n(x)\mathcal{R}_{np_n}(x)dx\right| > \sqrt{n}e_n^{-1}B_{np_n} - 1.$$
В силу (15) имеем
$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt{n}e_n^{-1}\left|\int_0^1 f_n(x)\mathcal{R}_{np_n}(x)dx\right| = +\infty.$$
Теперь рассмотрим последовательность линейных функционалов
$$u_n(f) = \sqrt{n}e_n^{-1}\int_0^1 f_n(x)\mathcal{R}_{np_n}(x)dx.$$
Поскольку
$$|u_n(f)| \le \sqrt{n}e_n^{-1}\|f\|_{L_2}\|R_{np_n}\|_{L_2} \le \sqrt{n}e_n^{-1}\|f\|_A\biggl(\sum_{k=n}^{n+p_n} a_k^2\biggr)^{1/2},$$
то линейные функционалы $u_n(f)$ ограничены на пространстве A. Так как
$$\|f_n\|_A = \int_0^1 |f_n'(x)|dx + \|f_n\|_C \le 2,$$
то в силу теоремы Банаха–Штейнгауза ([5], с. 247) существует функция $f_0(x) \in A$ такая, что
$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt{n}e_n^{-1}\left|\int_0^1 f_0(x)\mathcal{R}_{np_n}(x)dx\right| = +\infty. \tag{20}$$
Далее,
$$\int_0^1 f_0(x)\mathcal{R}_{np_n}(x)dx = \int_0^1 f_0(x)\sum_{k=n}^{n+p_n} a_k\varphi_k(x)dx = \sum_{k=n}^{n+p_n} a_k\int_0^1 f_0(x)\varphi_k(x)dx = \sum_{k=n}^{n+p_n} a_k\widehat{\varphi}_k(f_0).$$
Поэтому, применяя неравенство Гёльдера, получим
$$\left|\int_0^1 f_0(x)\mathcal{R}_{np_n}(x)dx\right| \le \biggl(\sum_{k=n}^{n+p_n} a_k^2\biggr)^{1/2}\biggl(\sum_{k=n}^{n+p_n} \widehat{\varphi}_k^2(f_0)\biggr)^{1/2} = e_{np_n}\cdot e_{np_n}(f_0) \le e_n\cdot e_n(f_0).$$
Отсюда
$$\sqrt{n}e_n(f_0) \ge \sqrt{n}e_n^{-1}\left|\int_0^1 f_0(x)\mathcal{R}_{np_n}(x)dx\right|.$$
Следовательно, из (20) получаем
$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt{n}e_n(f_0) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}e_n^{-1}\left|\int_0^1 f_0(x)\mathcal{R}_{np_n}(x)dx\right| = +\infty.$$
Это противоречит условию теоремы 1. □

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1 *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} < +\infty$, *где* $b_n > 0$, $b_n \downarrow 0$, *то для любой* $f(x) \in V(0,1)$ *будем иметь* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\widehat{\varphi}_n(f)|b_n < +\infty$.

Доказательство. Справедливо равенство
$$\sum_{n=1}^{\infty}|\widehat{\varphi}_n(f)|b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{|\widehat{\varphi}_m(f)|b_m}{m}. \tag{21}$$

Используем неравенство Гёльдера

$$\sum_{m=n}^{\infty} \frac{|\widehat{\varphi}_m(f)|b_m}{m} \leq \bigg(\sum_{m=n}^{\infty} \widehat{\varphi}_m^2(f)\bigg)^{1/2} \bigg(\sum_{m=n}^{\infty} \frac{b_m^2}{m^2}\bigg)^{1/2}. \tag{22}$$

Из условия теоремы 2 следует

$$\bigg(\sum_{m=n}^{\infty} \widehat{\varphi}_m^2(f)\bigg)^{1/2} = O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big). \tag{23}$$

Далее

$$\bigg(\sum_{m=n}^{\infty} \frac{b_m^2}{m^2}\bigg)^{1/2} \leq b_n \bigg(\sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2}\bigg)^{1/2} = O_f\Big(\frac{b_n}{\sqrt{n}}\Big). \tag{24}$$

Наконец, учитывая (22)–(24) в (21), заключаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{\varphi}_n(f)|b_n = O_f(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} < +\infty. \qquad \square$$

Замечание. Теорема 2 тривиальна для тригонометрической системы, однако для общих ОНС, как показывает лемма 1, она неверна без дополнительных условий.

Теорема 3. *Из любой ОНС* (φ_n), *где* $|\varphi_n(x)| < M$ *и* $\int\limits_0^1 \varphi_n(x)dx = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *можно выделить подсистему* $\varphi_{n_k}(x) = \psi_k(x)$ *такую, что для любой функции* $f(x) \in V(0,1)$ *будем иметь*

$$e_n(f) = O_f\big(1/\sqrt{n}\big), \quad \textit{где} \ \ e_n(f) = \bigg(\sum_{k=n}^{\infty} \widehat{\psi}_k^2(f)\bigg)^{1/2}.$$

Доказательство. В силу неравенства Бесселя

$$\sum_{m=1}^{\infty} \bigg(\int_0^{i/k} \varphi_m(x)dx\bigg)^2 \leq 1 \ \ \text{при} \ \ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Следовательно, можно выбрать число $m_i(k)$ (для любых фиксированных i и k) такое, что

$$\sum_{m=m_i(k)}^{\infty} \bigg(\int_0^{i/k} \varphi_m(x)dx\bigg)^2 < \frac{1}{k^2}.$$

Теперь положим $m(k) = \max\limits_{1\leq i\leq k} m_i(k)$, тогда

$$\sum_{m=m(k)}^{\infty} \bigg(\int_0^{i/k} \varphi_m(x)dx\bigg)^2 < \frac{1}{k^2} \ \ \text{при} \ \ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Отсюда

$$\bigg|\int_0^{i/k} \varphi_m(x)dx\bigg| < \frac{1}{k},$$

когда $m \geq m(k)$ для любого $i = 1, 2, \ldots, k$.

Допустим, что $\varphi_{m(k)}(x) = \psi_k(x)$, тогда

$$\bigg|\int_0^{i/k} \psi_k(x)dx\bigg| < \frac{1}{k}.$$

Теперь повторим вышеописанный процесс для $k+1$ и допустим, что $\varphi_{m(k+1)}(x) = \psi_{k+1}(x)$ при $m(k+1) > m(k)$. Следовательно,

$$\left| \int_0^{\frac{i}{k+1}} \psi_{k+1}(x)dx \right| < \frac{1}{k+1}, \quad i = 1, 2, \dots, k+1.$$

Таким образом, получили функции $\psi_k(x) = \varphi_{m(k)}(x)$.

Пусть теперь $n > k$, тогда найдется натуральное число $j(i,k) \leq n$ такое, что $|j(i)/n - i/k| < 1/n$. Следовательно, поскольку $|\varphi_n(x)| < M$, то при $n \geq k$

$$\left| \int_0^{i/k} \psi_n(x)dx \right| < \left| \int_0^{j(i)/n} \psi_n(x)dx \right| + \left| \int_{j(i)/n}^{i/k} |\psi_n(x)|dx \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{M}{n} = \frac{M+1}{n}.$$

Отсюда, если $(a_k) \in \ell_2$ — любая последовательность чисел, то

$$\max_{1\leq i\leq n} \left| \int_0^{i/n} \mathcal{R}_{np}(x)dx \right| = \max_{1\leq i\leq n} \left| \int_0^{i/n} \sum_{k=n}^{n+p} a_k \psi_k(x)dx \right| =$$

$$= \max_{1\leq i\leq n} \left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \int_0^{i/n} \psi_k(x)dx \right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |a_k| \cdot \frac{M+1}{k} \leq$$

$$\leq (M+1) \biggl(\sum_{k=n}^{n+p} a_k^2 \biggr)^{1/2} \biggl(\sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k^2} \biggr)^{1/2} \leq \frac{M+1}{\sqrt{n}} e_n.$$

Наконец, справедливость теоремы 3 следует из теоремы 1. □

Теорема 4. *Пусть* $(\varphi_m(x))$ *— ОНС на* $[0,1]$ *и* $\int\limits_0^1 \varphi_n(x)dx = 0$, $n = 1, 2, \dots$. *Чтобы для любой функции* $f(x) \in V(0,1)$ *выполнялось условие*

$$e_n(f) = O_f\bigl(1/\sqrt{n}\bigr),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\max_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x \mathcal{R}_{np}(t)dt \right| = O_{(a_k)}\bigl(e_n/\sqrt{n}\bigr) \tag{25}$$

для любой последовательности $(a_k) \in \ell_2$ *и любого натурального* p.

Доказательство. Действительно, если выполнено (25), то, очевидно, имеет место (10). Таким образом, справедливость достаточности условия теоремы 4 следует из теоремы 1. *Необходимость.* Пусть $x_{np} \in [0,1]$ такая, что

$$\max_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x \mathcal{R}_{np}(t)dt \right| = \left| \int_0^{x_{np}} \mathcal{R}_{np}(t)dt \right|.$$

Теперь допустим, что $i_{np} \leq n$ и $|i_{np}/n - x_{np}| \leq 1/n$. Тогда

$$\left| \int_0^{x_{np}} \mathcal{R}_{np}(t)dt \right| \leq \left| \int_0^{i_{np}/n} \mathcal{R}_{np}(t)dt \right| + \left| \int_{i_{np}/n}^{x_{np}} \mathcal{R}_{np}(t)dt \right| \leq$$

$$\leq \max_{1\leq i\leq n} \left| \int_0^{i/n} \mathcal{R}_{np}(t)dt \right| + \int_{i_{np}/n}^{x_{np}} |\mathcal{R}_{np}(t)|dt \leq B_{np} + \frac{1}{\sqrt{n}} \biggl(\int_0^1 \mathcal{R}_{np}^2(x)dx \biggr)^{1/2} \leq B_{np} + e_n/\sqrt{n}. \tag{26}$$

В силу теоремы 1 из (9) следует (10), а из (10) и (26) вытекает справедливость равенства (25). □

Эффективность условия теоремы 1

a) Если $(\sin 2\pi nx)$ — тригонометрическая система на $[0,1]$, то

$$\max_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x \sum_{k=n}^{n+p} a_k \sin 2\pi kt dt\right| = \max_{x\in[0,1]}\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k \int_0^x \sin 2\pi kt dt\right| \le$$

$$\le \sum_{k=n}^{n+p} |a_k|\cdot\frac{1}{k} \le \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \le e_n/\sqrt{n}.$$

b) Если $(\chi_n(x))$ — система Хаара на $[0,1]$, то

$$\max_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x \sum_{n=m}^{m+p}\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k\chi_k(t)dt\right| \le \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-\frac{n}{2}}|a_{k_n}| \le 2^{-\frac{m}{2}}\left(\sum_{n=2^m}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2} = 2^{-\frac{m}{2}} e_{2^m},$$

так как

$$\left|\int_0^x \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k\chi_k(t)dt\right| \le 2^{-n/2} a_{k_n},$$

где $2^n \le k_n < 2^{n+1}$.

Отсюда следует

$$\max_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x \sum_{k=n}^{n+p} a_k\chi_k(t)dt\right| = O\big(e_n/\sqrt{n}\big).$$

c) Если $(w_n(x))$ — система Уолша, то

$$\max_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x \sum_{k=n}^{n+p} a_k w_k(t)dt\right| = O\big(e_n/\sqrt{n}\big),$$

так как [4]

$$\left|\int_0^x w_n(t)dt\right| \le \frac{1}{n}.$$

Таким образом, условия теоремы 1 эффективны для систем $(\sqrt{2}\sin 2\pi kx)$, $(\chi_n(x))$ и $(w_n(x))$, так как для этих систем условие (10) легко проверяется.

Покажем, что для ОНС $(\varphi_n(x))$ условие $\int\limits_0^1 \varphi_n(x)dx = 0$, $n = 1,2,\dots$, не способствует выполнению условия (10) теоремы 1.

Теорема 5. *Существует ОНС $(\varphi_n(x))$ такая, что выполняется условие*

$$\int_0^1 \varphi_n(x)dx = 0, \quad n = 1,2,\dots,$$

однако не выполняется условие $e_n(f) = O\big(1/\sqrt{n}\big)$ для некоторой функции $f(x) \in V(0,1)$.

Доказательство. Положим $f_0(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{n^3}$. Ясно, что $f_0(x)$ — абсолютно непрерывная функция. Систему $(\phi_n(x))$ определим следующим образом:

$$\phi_{2^k}(x) = \cos 2\pi(2k+1)x, \quad k = 1,2,\dots,$$
$$\phi_{2k+1}(x) = \cos 2\pi 2^k x, \qquad k = 1,2,\dots\ .$$

Если $n \neq 2^k$ и $n \neq 2k+1$, то $\phi_n(x) = \cos 2\pi nx$. Следовательно, относительно системы $(\phi_n(x))$ имеем

$$\widehat{\phi}_{2^k}(f_0) = \int_0^1 f_0(x)\phi_{2^k}(x)dx = \int_0^1 f_0(x)\cos 2\pi(2k+1)xdx = \frac{1}{(2k+1)^3}.$$

Таким образом, не соблюдается условие (9), так как

$$e_{2^k}(f_0) = \left(\sum_{n=2^k}^{\infty} \widehat{\phi}_n^2(f_0)\right)^{1/2} > \frac{c}{k^{5/2}}. \qquad \square$$

Литература

[1] Олевский А.М. *Об ортогональных рядах по полным системам*, Матем. сб. **58** (2), 707–748 (1962).
[2] Ульянов П.Л. *О рядах по системе Хаара*, Матем. сб. **63** (3), 356–391 (1964).
[3] Tsagareishvili V. *On the Fourier coefficients for general orthonormal systems*, Proc. A. Razmadze Math. Inst. **124**, 131–150 (2000).
[4] Fine N.J. *On the Walsh functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **65**, 372–414 (1949).
[5] Алексич Г. *Проблемы сходимости ортогональных рядов* (Ин. лит., М., 1963).
[6] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша* (Наука, М., 1987).
[7] Бари Н.К. *Тригонометрические ряды* (Физматгиз, М., 1961).

Л.Д. Гоголадзе

профессор, департамент математики, факультет точных и естественных наук,
Тбилисский государственный университет,
просп. И. Чавчавадзе, д. 1, г. Тбилиси, 0128, Грузия,

e-mail: lgogoladze1@hotmail.com

В.Ш. Цагарейшвили

профессор, департамент математики, факультет точных и естественных наук,
Тбилисский государственный университет,
просп. И. Чавчавадзе, д. 1, г. Тбилиси, 0128, Грузия,

e-mail: cagare@ymail.com

L.D. Gogoladze and V.Sh. Tsagareishvili

On the Fourier coefficients of functions of bounded variation

Abstract. We notice that the Fourier coefficients of functions with bounded variation $V(0,1)$ with respect to general orthonormal systems (GONS) have no definite order of vanishing. In this connection we study the problem: which requirements to the GONS ensure that the Fourier coefficients of a function from $V(0,1)$ satisfy the inequality which holds for classical systems (trigonometric, Walsh, or Haar ones). In the present paper we study this problem and related issues.

Keywords: Fourier series, Fourier coefficients, trigonometric system, Walsh system, Haar system.

L.D. Gogoladze

Professor, Department of Mathematics, Faculty of Exact and Natural Sciences,
Tbilisi State University,
1 I. Chavchavadze Ave., Tbilisi, 0128 Georgia,

e-mail: lgogoladze1@hotmail.com

V.Sh. Tsagareishvili

Professor, Tbilisi State University,
1 I. Chavchavadze Ave., Tbilisi, 0128 Georgia,

e-mail: cagare@ymail.com