ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 2 (453)

УДК 517.972.8

А.Г. ЧЕНЦОВ

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ВЕРСИЯ ОБОБЩЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ В КЛАССЕ КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫХ МЕР, II

4. Релаксации интегральных ограничений при условии ступенчатости функционалов в основной системе условий

В работе продолжаются исследования, начатые в [1]. Все обозначения и терминология сохранены.

Рассмотрим другое ТП с "единицей" $\mathbb{R}^\Gamma$; именно, ТП

$$(\mathbb{R}^\Gamma, \otimes^\Gamma(\tau_\partial)) \tag{4.1}$$

соответствует соглашениям раздела 2. С ТП (4.1) можно связать естественный базис. Если $f \in \mathbb{R}^\Gamma$ и $K \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$, то через $T_0(f,K)$ обозначаем множество всех функционалов $g \in \mathbb{R}^\Gamma$ таких, что $\forall \gamma \in K: \ f(\gamma) = g(\gamma)$. Тогда, как легко видеть, $\forall f \in \mathbb{R}^\Gamma\ \forall K \in \mathrm{Fin}(\Gamma)\ \forall g \in T_0(f,K):$ $T_0(f,K) = T_0(g,K)$. Семейство $\mathcal{T}_0$ всех множеств $T_0(f,K)$, $(f,K) \in \mathbb{R}^\Gamma \times \mathrm{Fin}(\Gamma)$, есть базис ТП (4.1). Сама топология $\otimes^\Gamma(\tau_\partial)$ есть семейство всех множеств G, $G \subset \mathbb{R}^\Gamma$, для каждого из которых

$$\forall f \in G\ \exists K \in \mathrm{Fin}(\Gamma):\ T_0(f,K) \subset G.$$

Следовательно, для $f \in \mathbb{R}^\Gamma$ имеем фундаментальную систему окрестностей f в ТП (4.1) $\{T_0(f,K) : K \in \mathrm{Fin}(\Gamma)\}$, являющуюся подсемейством $\mathcal{T}_0$. С этим обстоятельством связано естественное представление сходящихся направленностей в ТП (4.1). В самом деле, если $(\mathbb{H}, \preceq, h)$ есть направленность в $\mathbb{R}^\Gamma$ и $v \in \mathbb{R}^\Gamma$, то имеет место эквивалентность

$$((\mathbb{H}, \preceq, h) \xrightarrow{\otimes^\Gamma(\tau_\partial)} v) \iff (\forall \gamma \in \Gamma\ \exists \alpha \in \mathbb{H}\ \forall \beta \in \mathbb{H}:\ (\alpha \preceq \beta) \Longrightarrow (h(\beta)(\gamma) = v(\gamma))). \tag{4.2}$$

Поскольку $\tau_\mathbb{R} \subset \tau_\partial$, то для ТП (3.4) и (4.1) имеет место свойство

$$\otimes^\Gamma(\tau_\mathbb{R}) \subset \otimes^\Gamma(\tau_\partial), \tag{4.3}$$

используемое в дальнейшем. Отметим, что семейство $\mathcal{Y}_\partial$ всех окрестностей ([2], с. 19) множества Y в ТП (4.1) обладает согласно (4.3) естественным свойством оценки $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}_\partial$ по отношению к семейству $\mathcal{Y}$ раздела 3. По аналогии с (3.15) мы вводим специальный класс окрестностей Y

$$\mathbb{N}_\partial(P) \triangleq \cup_{y \in Y} T_0(y,P) \in \mathcal{Y}_\partial, \tag{4.4}$$

если $P \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$. Легко проверить, что

$$\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \triangleq \{(\mathrm{Adm})[H;Q] : (H,Q) \in \mathcal{Y}_\partial \times \mathrm{Fin}(\Omega)\} \in \mathcal{B}(B_0(E,\mathcal{L})), \tag{4.5}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00458) и Государственного комитета Российской Федерации по высшему образованию (97-0-1.9-19).

используя, в частности, в качестве H множества вида (4.4). Для этого применим (3.10) и то обстоятельство, что семейство $\mathcal{Y}_\partial$ замкнуто относительно конечных пересечений, а семейство $\mathrm{Fin}(\Omega)$ — относительно конечных объединений. Кроме того, $\forall P \in \mathrm{Fin}(\Gamma)\ \forall Q \in \mathrm{Fin}(\Omega)$ имеем

$$(\mathrm{Adm})^0[P;Q] \triangleq \Big\{f \in B_0(E,\mathcal{L}) \,\Big|\, \Big(\exists y \in Y\ \forall \gamma \in P:\ \int_E S_\gamma f d\eta = y(\gamma)\Big) \& \\ \Big(\forall \omega \in Q:\ \int_{L_\omega} |f| d\eta \le c_\omega\Big)\Big\} = (\mathrm{Adm})[\mathbb{N}_\partial(P);Q] \in \widehat{\mathfrak{A}}_\partial. \quad (4.6)$$

Из (4.5) вытекает, что семейство

$$\mathfrak{A}^0 \triangleq \{(\mathrm{Adm})^0[P;Q]:\ (P,Q) \in \mathrm{Fin}(\Gamma) \times \mathrm{Fin}(\Omega)\} \in \mathcal{B}(B_0(E,\mathcal{L})) \quad (4.7)$$

является подсемейством $\widehat{\mathfrak{A}}_\partial$, т. е.

$$\mathfrak{A}^0 \subset \widehat{\mathfrak{A}}_\partial. \quad (4.8)$$

Вновь получаем (см. (4.5), (4.7)) “вилку” ограничений асимптотического характера. Из (4.8) с учетом определений раздела 3 следует, что $\forall \tau \in \mathfrak{M}(\mathcal{L})$

$$(\tau - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)] \subset (\tau - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)]. \quad (4.9)$$

С другой стороны, из (3.11) и (4.5) вытекает вложение $\widehat{\mathfrak{A}} \subset \widehat{\mathfrak{A}}_\partial$, так что $\forall \tau \in \mathfrak{M}(\mathcal{L})$

$$(\tau - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)] \subset (\tau - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)]. \quad (4.10)$$

Здесь же отметим, что (см. (3.12), (4.6)) $\forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})\ \forall P \in \mathrm{Fin}(\Gamma)\ \forall Q \in \mathrm{Fin}(\Omega)\ \forall \varepsilon \in]0,\infty[$

$$\{\eta\} \times (\mathrm{Adm})^0[P;Q] \subset (\mathrm{Adm})[\mathcal{K};P;Q;\varepsilon]. \quad (4.11)$$

Из (3.13), (4.7) и (4.11) следует, в частности, что $\forall H \in \mathfrak{A}\ \exists H_0 \in \mathfrak{A}^0:\ \{\eta\} \times H_0 \subset H$. Как следствие получаем $\forall \tau \in \mathfrak{M}(\mathcal{L})$

$$(\tau - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)] \subset (\tau - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A} \mid \mathcal{I}]. \quad (4.12)$$

Разумеется, (4.9), (4.10) и (4.12) можно дополнить утверждением теоремы 3.1. Из (4.10) и теоремы 3.1 вытекает

$$(\tau - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)] \subset \widetilde{\mathbb{A}}_0 \quad \forall \tau \in \mathfrak{M}_*(\mathcal{L}). \quad (4.13)$$

В свою очередь из теоремы 3.1 и (4.12) следует $(\tau - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)] \subset \widetilde{\mathbb{A}}_0\ \forall \tau \in \mathfrak{M}_*(\mathcal{L})$. Для ступенчатозначного оператора (3.1) это утверждение удается усилить. Подобное замечание можно сделать и в отношении (4.9). Сейчас, оставаясь пока в рамках общего случая, отметим одно простое следствие (3.27), используя соотношения для топологий $\tau_0(\mathcal{L})$ и $\tau_\otimes(\mathcal{L})$ ([3], с. 80). В самом деле, поскольку $\tau_\otimes(\mathcal{L}) \subset \tau_0(\mathcal{L})$, получим $\forall \mathcal{H} \in \mathcal{B}(B(E,\mathcal{L}))$

$$(\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathcal{H} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)] \subset (\tau_\otimes(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathcal{H} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)]. \quad (4.14)$$

Как следствие из (3.27) и (4.14) имеем

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 \subset (\tau_\otimes(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)]. \quad (4.15)$$

Снова используя свойства ([3], с. 80), получим $\forall \mathcal{H} \in \mathcal{B}(B(E,\mathcal{L}))$

$$(\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathcal{H} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)] \subset (\tau_\otimes(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathcal{H} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)]. \quad (4.16)$$

В связи с (4.14) отметим вложение

$$(\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A} \mid \mathcal{I}] \subset (\tau_\otimes(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A} \mid \mathcal{I}]. \quad (4.17)$$

Кроме того, из соотношений ([3], с. 80) имеем

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 = (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A} \mid \mathcal{I}] \subset (\tau_\otimes(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A} \mid \mathcal{I}]. \tag{4.18}$$

Поскольку $\mathcal{B}(B_0(E,\mathcal{L})) \subset \mathcal{B}(B(E,\mathcal{L}))$, получаем из (4.14), (4.16) естественные частные случаи, касающиеся $\widehat{\mathfrak{A}}$, $\widehat{\mathfrak{A}}_\partial$, $\mathfrak{A}^0$. Из очевидных соотношений, связывающих $\tau_*(\mathcal{L})$ и $\tau_{\mathbb{B}}^*(\mathcal{L})$, вытекает

$$(\tau_{\mathbb{B}}^*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathcal{H} \mid \mathcal{I}] \subset (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathcal{H} \mid \mathcal{I}] \ \ \forall \mathcal{H} \in \mathcal{B}(\mathbb{M}(\mathcal{L})).$$

По аналогичной причине имеет место

$$(\tau_{\mathbb{B}}^*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathcal{H} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)] \subset (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathcal{H} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)] \ \ \forall \mathcal{H} \in \mathcal{B}(B(E,\mathcal{L})). \tag{4.19}$$

Всюду в дальнейшем полагаем выполненным

Условие 4.1. $\forall \gamma \in \Gamma: \ S_\gamma \in B_0(E,\mathcal{L})$.

Таким образом, исследуем далее случай ступенчатозначного оператора (3.1).

Замечание. К ограничению (3.5), удовлетворяющему условию 4.1, сводится, в частности, требование на выбор $f \in B(E,\mathcal{L})$

$$\Big(\Big(\int_{\Lambda_\gamma} f d\eta\Big)_{\gamma\in\Gamma} \in Y\Big) \& \Big(\forall \omega \in \Omega : \int_{L_\omega} |f| d\eta \le c_\omega\Big), \tag{4.20}$$

где $\gamma \longmapsto \Lambda_\gamma : \ \Gamma \longrightarrow \mathcal{L}$ есть произвольный оператор из Γ в $\mathcal{L}$. Упомянутое ограничение (4.20), сводящееся к (3.5), может возникать в задачах управления и представляет собой конъюнкцию двух характерных условий, первое из которых имеет смысл геометрического, а второе — "частичного" ресурсного ограничений.

Возвращаясь к условию 4.1, отметим, что $\mathbb{S}^*$ (3.7) является теперь непрерывным оператором из ТП

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_\otimes(\mathcal{L})) \tag{4.21}$$

в ТП (3.4). С другой стороны, из (4.2) и представления ([3], с. 81) для топологии $\tau_0(\mathcal{L})$ имеем важное свойство: $\mathbb{S}^*$ (3.7) есть непрерывное отображение из ТП

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_0(\mathcal{L})) \tag{4.22}$$

в ТП (4.1). Здесь использовано представление элементарного интеграла ([3], гл. III) в виде конечной суммы и свойство непрерывности $\mathbb{S}^*$ как отображения из ТП (2.1) в ТП (3.4) (см. раздел 3). Условие 4.1 позволяет охарактеризовать множества притяжения, отвечающие "асимптотике" $\mathfrak{A}^0$ в терминах утверждений, подобных [4]. Именно, справедлива следующая (проверяемая по аналогии с теоремой 4.1 работы [4])

Лемма 4.1. $\forall \tau \in \mathfrak{M}_*(\mathcal{L}) : \widetilde{\mathbb{A}}_0 = (\tau - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)]$, *т. е. "пределы" $\mathfrak{A}^0$ в смысле топологий из $\mathfrak{M}_*(\mathcal{L})$ совпадают с $\widetilde{\mathbb{A}}_0$.*

Лемма 4.2. *Справедливо вложение*

$$(\tau_\otimes(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A} \mid \mathcal{I}] \subset \widetilde{\mathbb{A}}_0. \tag{4.23}$$

Доказательство. Пусть μ_0 — произвольный элемент множества в левой части (4.23). Используя представление ([3], (2.5.1)), подберем направленность $(T, \preceq, \varphi)$ в $\mathbb{M}(\mathcal{L})$, для которой

$$(\mathfrak{A} \subset (\mathbb{M}(\mathcal{L}) - \mathrm{ass})[T; \preceq; \varphi]) \& ((T, \preceq, \mathcal{I} \circ \varphi) \xrightarrow{\tau_\otimes(\mathcal{L})} \mu_0). \tag{4.24}$$

Покажем, что $\mu_0 \in \widetilde{\mathbb{A}}_0$. Для этого установим сначала, что $\mu_0 \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$. Пусть φ_1 и φ_2 суть компоненты оператора φ, так что отображения φ_1, φ_2 переводят T в $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ и в $B(E,\mathcal{L})$

соответственно, причем $\forall t \in T: \ \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$. Из (3.12), (4.24) имеем в силу непустоты каждого из множеств $\mathrm{Fin}(\Gamma)$, $\mathrm{Fin}(\Omega)$ и $]0, \infty[$, что $\forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})\ \exists t_1 \in T\ \forall t_2 \in T$:

$$(t_1 \preceq t_2) \Longrightarrow ((\varphi_1(t_2) \mid \mathcal{K}) = (\eta \mid \mathcal{K})).$$

Это означает ([3], с. 81) сходимость

$$(T, \preceq, \varphi_1) \xrightarrow{\tau_0(\mathcal{L})} \eta. \tag{4.25}$$

Отметим, что $\forall t \in T: \ (\mathcal{I} \circ \varphi)(t) = \mathcal{I}(\varphi(t)) = \mathcal{I}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \varphi_2(t) * \varphi_1(t)$. Следовательно, при $t \in T$ к.-а. мера $(\mathcal{I} \circ \varphi)(t)$ обладает свойством слабой абсолютной непрерывности относительно к.-а. меры $\varphi_1(t)$. В этом случае из (4.24) и (4.25) непосредственно следует, что к.-а. мера μ_0 слабо абсолютно непрерывна относительно η. Покажем, что $\psi \triangleq \mathbb{S}(\mu_0) \in Y$. В самом деле, допустим противное: $\psi \in \mathbb{R}^\Gamma \setminus Y$. В силу замкнутости Y в ТП (3.4) можно указать $P_0 \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon_0 \in]0, \infty[$ такие, что

$$\mathbb{N} \triangleq \{h \in \mathbb{R}^\Gamma \mid \forall \gamma \in P_0: \ |\psi(\gamma) - h(\gamma)| < \varepsilon_0\} \subset \mathbb{R}^\Gamma \setminus Y.$$

Выберем произвольно $\mathcal{K}_0 \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})$ и $Q_0 \in \mathrm{Fin}(\Omega)$ так, что

$$\mathbb{N}_1 \triangleq (\mathrm{Adm})[\mathcal{K}_0; P_0; Q_0; \varepsilon_0/2] \in \mathfrak{A}.$$

В силу (4.24) имеем, следовательно, с некоторого момента свойство $\varphi(t) \in \mathbb{N}_1$. Используя свойство непрерывности $\mathbb{S}^*$ как оператора из ТП (4.21) в ТП (3.4), получили сходимость

$$(T, \preceq, \mathbb{S}^* \circ \mathcal{I} \circ \varphi) \xrightarrow{\otimes^\Gamma(\tau_\mathbb{R})} \psi.$$

Поэтому для множества $\mathbb{N}_2 \triangleq \{h \in \mathbb{R}^\Gamma \mid \forall \gamma \in P_0: \ |\psi(\gamma) - h(\gamma)| < \varepsilon_0/2\}$ с некоторого момента имеем

$$(\mathbb{S}^* \circ \mathcal{I} \circ \varphi)(t) \in \mathbb{N}_2.$$

Так как $\mathbb{N}_2$ — открытая окрестность ψ в ТП (3.4), то последнее условие с некоторого момента принимает вид (см. раздел 3)

$$\Big| \int_E S_\gamma \varphi_2(t) d\varphi_1(t) - \psi(\gamma) \Big| < \varepsilon_0/2 \ \ \forall \gamma \in P_0.$$

Учитывая теперь аналогичного рода суждение в отношении $\mathbb{N}_1$, подберем такое $t_* \in T$, что, с одной стороны, $\varphi(t_*) \in \mathbb{N}_1$, а с другой,

$$\Big| \int_E S_\gamma \varphi_2(t_*) d\varphi_1(t_*) - \psi(\gamma) \Big| < \varepsilon_0/2 \ \ \forall \gamma \in P_0.$$

По определению $\mathbb{N}_1$ получим при некотором $y^* \in Y$ свойство

$$\forall \gamma \in P_0: \ \Big| \int_E S_\gamma \varphi_2(t_*) d\varphi_1(t_*) - y^*(\gamma) \Big| \le \varepsilon_0/2.$$

Из двух последних свойств получаем $\forall \gamma \in P_0: |\psi(\gamma) - y^*(\gamma)| < \varepsilon_0$. Это означает по определению $\mathbb{N}$, что $y^* \in \mathbb{N}$ и, как следствие, $y^* \notin Y$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что

$$\Big(\int_E S_\gamma d\mu_0 \Big)_{\gamma \in \Gamma} = \psi \in Y. \tag{4.26}$$

Вернемся к (4.24) с учетом представления $(\mathcal{I} \circ \varphi)(t) = \varphi_2(t) * \varphi_1(t)$ при $t \in T$. Рассмотрим значения $v_{\mu_0}(L_\omega)$ при $\omega \in \Omega$. Для их оценки учтем равенство

$$v_\mu(L) \mid_{\mu = (\mathcal{I} \circ \varphi)(t)} = \int_L \mid \varphi_2(t) \mid d\varphi_1(t), \tag{4.27}$$

если $t \in T$ и $L \in \mathcal{L}$. Наряду с (4.27) используем легко проверяемое свойство полунепрерывности снизу функционала вариации на каждом множестве из $\mathcal{L}$. В данном случае последнее свойство для нас важно в отношении топологии $\tau_\otimes(\mathcal{L})$; это связано с (4.24). Итак, покажем, что $v_{\mu_0}(L_\omega) \leq c_\omega$ при $\omega \in \Omega$. В самом деле, фиксируем $\omega \in \Omega$. Тогда функционал $\mathbb{V}$, определяемый как

$$\mu \longmapsto v_\mu(L_\omega) : \ \mathbb{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow [0, \infty[,$$

полунепрерывен снизу в смысле $\tau_\otimes(\mathcal{L})$. Покажем, что $\mathbb{V}(\mu_0) \leq c_\omega$. Допустим противное

$$\varepsilon_* \triangleq \mathbb{V}(\mu_0) - c_\omega \in]0, \infty[.$$

Отметим, что $\{\omega\} \in \mathrm{Fin}(Q)$. Используя свойство непустоты множеств $\mathrm{Fin}(\mathcal{L})$ и $\mathrm{Fin}(\Gamma)$, выберем произвольно и зафиксируем $\mathcal{K}_* \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})$ и $P_* \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$, после чего рассмотрим множество $(\mathrm{Adm})[\mathcal{K}_*; P_*; \{\omega\}; \varepsilon_*/2] \in \mathfrak{A}$. С учетом (4.24) подберем $t_* \in T$ так, что для $t \in T$, $t_* \preceq t$, имеет место $\varphi(t) \in (\mathrm{Adm})[\mathcal{K}_*; P_*; \{\omega\}; \varepsilon_*/2]$. В силу (3.12) это означает, в частности, что для таких t

$$\int_{L_\omega} |\varphi_2(t)| d\varphi_1(t) \leq c_\omega + \varepsilon_*/2. \tag{4.28}$$

С учетом (4.27) и (4.28) имеем $(\mathbb{V} \circ \mathcal{I} \circ \varphi)(t) \leq c_\omega + \varepsilon_*/2$ при $t \in T$, $t_* \preceq t$. Множество

$$\Omega \triangleq \{\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid v_\mu(L_\omega) \leq c_\omega + \varepsilon_*/2\} = \{\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid \mathbb{V}(\mu) \leq c_\omega + \varepsilon_*/2\}$$

замкнуто в смысле $\tau_\otimes(\mathcal{L})$ в силу полунепрерывности снизу $\mathbb{V}$. Имеем (см. (4.28)) для $t \in T, t_* \preceq t$, свойство $(\mathcal{I} \circ \varphi)(t) \in \Omega$. В силу (4.24) каждая окрестность μ_0 в топологии $\tau_\otimes(\mathcal{L})$ пересекается с Ω так, что $\mu_0 \in \Omega$, $\mathbb{V}(\mu_0) \leq c_\omega + \varepsilon_*/2$. В результате $\varepsilon_* = \mathbb{V}(\mu_0) - c_\omega \leq \varepsilon_*/2$, что невозможно. Противоречие доказывает требуемое неравенство, так что на самом деле $v_{\mu_0}(L_\omega) \leq c_\omega$ при $\omega \in \Omega$. Из (3.6), (4.26) и только что установленного свойства имеем $\mu_0 \in \widetilde{\mathbb{A}}_0$. Вложение (4.23) установлено. □

Как следствие леммы 4.2 получаем вложение

$$(\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A} \mid \mathcal{I}] \subset \widetilde{\mathbb{A}}_0. \tag{4.29}$$

Рассмотрим некоторые очевидные следствия. Из (3.18) и леммы 4.2 следует

$$(\tau_\otimes(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}} \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] \subset \widetilde{\mathbb{A}}_0. \tag{4.30}$$

Тогда (см. (4.10), (4.30)) справедливо вложение

$$(\tau_\otimes(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] \subset \widetilde{\mathbb{A}}_0. \tag{4.31}$$

Вместе с тем из (4.12) и леммы 4.2 вытекает вложение

$$(\tau_\otimes(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] \subset \widetilde{\mathbb{A}}_0. \tag{4.32}$$

Таким образом, в лемме 4.2, (4.30)–(4.32) имеем в качестве

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 = \left\{\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}] \,\middle|\, \left(\left(\int_E S_\gamma d\mu\right)_{\gamma \in \Gamma} \in Y\right) \& (\forall \omega \in \Omega : \ v_\mu(L_\omega) \leq c_\omega)\right\}, \tag{4.33}$$

систему верхних оценок для множеств притяжения в ТП (4.21). Из (4.15), (4.30) имеем

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 = (\tau_\otimes(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}} \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)]. \tag{4.34}$$

С другой стороны, из теоремы 3.1, леммы 4.2 и соотношения ([3], с. 80) для ТП (2.1) и (4.21) получим

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 = (\tau_\otimes(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A} \mid \mathcal{I}]. \tag{4.35}$$

Кроме того, из (3.27), (4.17) и (4.30) вытекает равенство

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 = (\tau_0(\mathcal{L}) - LIM)[\widehat{\mathfrak{A}} \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)], \tag{4.36}$$

дополняющее (4.34). В терминах (4.33) устанавливается

Лемма 4.3. *Имеет место вложение*

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 \subset (\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] \cap (\tau^*_{\mathbb{B}}(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)]. \tag{4.37}$$

Доказательство. Пусть $\mu_0 \in \widetilde{\mathbb{A}}_0$. Рассмотрим направленность $(\mathbb{D}, \prec, \Theta_\eta[\mu_0; \cdot])$ в $B_0(E, \mathcal{L})$. Тогда (см. раздел 2) направленность $(\mathbb{D}, \prec, \mathcal{I}(\eta, \cdot) \circ \Theta_\eta[\mu_0; \cdot])$, являющаяся экземпляром (2.4), сходится к μ_0 в смысле каждой топологии из $\mathfrak{M}(\mathcal{L})$. В силу ранее упоминавшихся свойств непрерывности $\mathbb{S}^*$ на ТП (4.21), (4.22) получим, что направленность

$$(\mathbb{D}, \prec, \mathbb{S} \circ \mathcal{I}(\eta, \cdot) \circ \Theta_\eta[\mu_0; \cdot]) = (\mathbb{D}, \prec, \mathbb{S}_* \circ \mathcal{I}(\eta, \cdot) \circ \Theta_\eta[\mu_0; \cdot]) \tag{4.38}$$

сходится к $u_0 \triangleq \mathbb{S}(\mu_0) \in Y$ как в ТП (3.4), так и в ТП (4.1). Используем включения $\tau_\otimes(\mathcal{L}) \in \mathfrak{M}(\mathcal{L})$ и $\tau_0(\mathcal{L}) \in \mathfrak{M}(\mathcal{L})$. В силу сходимости направленности (4.38) получаем, в частности, при всяком выборе окрестности H_0 функционала u_0 в ТП (4.1) с некоторого момента

$$\mathbb{S}(\mathcal{I}(\eta, \Theta_\eta[\mu_0; \mathcal{K}])) = (\mathbb{S} \circ \mathcal{I}(\eta, \cdot) \circ \Theta_\eta[\mu_0; \cdot])(\mathcal{K}) \in H_0.$$

В качестве H_0 можно, в частности, выбрать произвольный элемент $\mathcal{Y}_\partial$. Следовательно, $\forall H_0 \in \mathcal{Y}_\partial$ $\exists \mathcal{K}_0 \in \mathbb{D}$ $\forall \mathcal{K} \in \mathbb{D}$:

$$(\mathcal{K}_0 \prec \mathcal{K}) \Longrightarrow \left(\left(\int_E S_\gamma \Theta_\eta[\mu_0; \mathcal{K}] d\eta \right)_{\gamma \in \Gamma} \in H_0 \right). \tag{4.39}$$

Здесь учтены определение (2.3) и свойства ([3], с. 70). Поскольку $\mu_0 \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$, то для компонент разложения Жордана μ_0 имеем ([3], с. 79)

$$(\mu_0^+ \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta]) \& (\mu_0^- \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta]).$$

При этом $\mu_0 = \mu_0^+ - \mu_0^-$, $v_{\mu_0} = \mu_0^+ + \mu_0^-$. Напомним, что в итоге (см. раздел 2) $\theta_\eta[\mu_0] = \theta_\eta[\mu_0^+] - \theta_\eta[\mu_0^-]$. В результате

$$\Theta_\eta[\mu_0; \mathcal{K}] = \Theta_\eta[\mu_0^+; \mathcal{K}] - \Theta_\eta[\mu_0^-; \mathcal{K}]$$

при $\mathcal{K} \in \mathbb{D}$. Имеет место ([3], с. 84) сходимость в $\tau_0(\mathcal{L})$ направленностей, получаемых присоединением к $(\mathbb{D}, \prec)$ операторов

$$\mathcal{I}(\eta, \cdot) \circ \Theta_\eta[\mu_0^+; \cdot], \quad \mathcal{I}(\eta, \cdot) \circ \Theta_\eta[\mu_0^-; \cdot];$$

обобщенные пределы упомянутых направленностей суть μ_0^+, μ_0^- соответственно. Это означает, что $\forall Q \in \mathrm{Fin}(\Omega)$ $\exists \widetilde{\mathcal{K}} \in \mathbb{D}$ $\forall \mathcal{K} \in \mathbb{D}$:

$$(\widetilde{\mathcal{K}} \prec \mathcal{K}) \Longrightarrow \left(\forall \omega \in Q : \ \left(\mu_0^+(L_\omega) = \int_{L_\omega} \Theta_\eta[\mu_0^+; \mathcal{K}] d\eta \right) \& \left(\mu_0^-(L_\omega) = \int_{L_\omega} \Theta_\eta[\mu_0^-; \mathcal{K}] d\eta \right) \right).$$

Иными словами, $\forall Q \in \mathrm{Fin}(\Omega)$ $\exists \widetilde{\mathcal{K}} \in \mathbb{D}$ $\forall \mathcal{K} \in \mathbb{D}$:

$$(\widetilde{\mathcal{K}} \prec \mathcal{K}) \Longrightarrow \left(\forall \omega \in Q : \ v_{\mu_0}(L_\omega) = \int_{L_\omega} \Theta_\eta[\mu_0^+; \mathcal{K}] d\eta + \int_{L_\omega} \Theta_\eta[\mu_0^-; \mathcal{K}] d\eta \right).$$

Вместе с тем $\forall \mathcal{K} \in \mathbb{D}$ $\forall \omega \in Q$:

$$\int_{L_\omega} |\Theta_\eta[\mu_0; \mathcal{K}]| d\eta \leq \int_{L_\omega} \Theta_\eta[\mu_0^+; \mathcal{K}] d\eta + \int_{L_\omega} \Theta_\eta[\mu_0^-; \mathcal{K}] d\eta.$$

Последнее неравенство — следствие неотрицательности η. Вместе с тем в силу выбора μ_0 имеем $v_{\mu_0}(L_\omega) \leq c_\omega$ $\forall \omega \in Q$. Комбинируя три последние положения, получим $\forall Q \in \mathrm{Fin}(\Omega)$ $\exists \widetilde{\mathcal{K}} \in \mathbb{D}$ $\forall \mathcal{K} \in \mathbb{D}$:

$$(\widetilde{\mathcal{K}} \prec \mathcal{K}) \Longrightarrow \left(\forall \omega \in Q : \int_{L_\omega} |\Theta_\eta[\mu_0; \mathcal{K}]| d\eta \leq c_\omega \right). \tag{4.40}$$

Теперь рассмотрим комбинацию утверждений (4.39), (4.40). В итоге (см. (3.10), (4.39), (4.40)) $\forall H \in \mathcal{Y}_\partial\ \forall Q \in \mathrm{Fin}(\Omega)\ \exists \widetilde{\mathcal{K}} \in \mathbb{D}\ \forall \mathcal{K} \in \mathbb{D}$:

$$(\widetilde{\mathcal{K}} \prec \mathcal{K}) \Longrightarrow (\Theta_\eta[\mu_0; \mathcal{K}] \in (\mathrm{Adm})[H; Q]). \tag{4.41}$$

Из (4.5) и (4.41) вытекает

$$\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \subset (B_0(E, \mathcal{L}) - \mathrm{ass})[\mathbb{D}; \prec; \Theta_\eta[\mu_0; \cdot]]. \tag{4.42}$$

Учтем сходимость направленности, получаемой "интегрированием" $\Theta_\eta[\mu_0; \cdot]$, в смысле $\langle \mathbb{A}(\mathcal{L}), \mathfrak{M}(\mathcal{L})\rangle$. Из (4.42) ([3], (2.5.1)) следует, что μ_0 есть элемент множества в правой части (4.37), чем и завершается доказательство леммы. □

Из (4.10), леммы 4.3 вытекает цепочка вложений

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 \subset (\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] \subset (\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}} \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] \tag{4.43}$$

и, кроме того, имеет место (см. (3.18))

$$(\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}} \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] \subset (\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A} \mid \mathcal{I}]. \tag{4.44}$$

Из (4.29), (4.43), (4.44) вытекает система равенств

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 = (\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] = (\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}} \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] = (\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A} \mid \mathcal{I}]. \tag{4.45}$$

Из (4.9), (4.45) имеем вложение $\widetilde{\mathbb{A}}_0 \subset (\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)]$. Вместе с тем, из (4.12) и (4.45) следует вложение $(\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] \subset \widetilde{\mathbb{A}}_0$. Из двух последних свойств получаем равенство

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 = (\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)]. \tag{4.46}$$

Отметим, что (см. (4.9)) в силу (4.12) и теоремы 3.1 имеет место цепочка вложений

$$(\tau_{\mathbb{B}}^*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] \subset (\tau_{\mathbb{B}}^*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] \subset \widetilde{\mathbb{A}}_0,$$

откуда в силу леммы 4.3 вытекает совпадение

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 = (\tau_{\mathbb{B}}^*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] = (\tau_{\mathbb{B}}^*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)].$$

С учетом теоремы 3.1 получаем цепочку равенств

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 = (\tau_{\mathbb{B}}^*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A} \mid \mathcal{I}] = (\tau_{\mathbb{B}}^*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}} \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] =$$
$$= (\tau_{\mathbb{B}}^*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] = (\tau_{\mathbb{B}}^*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)]. \tag{4.47}$$

Из (4.9) имеем вложение $(\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] \subset (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)]$. С учетом (4.19) и (4.47) имеем теперь цепочку вложений

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 = (\tau_{\mathbb{B}}^*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] \subset (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] \subset (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)],$$

которая согласно лемме 4.1 превращается в систему равенств

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 = (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] = (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)].$$

Вновь используя теорему 3.1, получаем систему равенств

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 = (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A} \mid \mathcal{I}] = (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}} \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] =$$
$$= (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)] = (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)]. \tag{4.48}$$

Из (4.17), (4.43) вытекает, что справедливо $\widetilde{\mathbb{A}}_0 \subset (\tau_\otimes(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)]$. Поэтому согласно (4.31) имеем $\widetilde{\mathbb{A}}_0 = (\tau_\otimes(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_\partial \mid \mathcal{I}(\eta, \cdot)]$. Из (4.17), (4.46) следует вложение $\widetilde{\mathbb{A}}_0 \subset (\tau_\otimes(\mathcal{L}) -$

LIM)$[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)]$, что в сочетании с (4.32) доставляет равенство $\widetilde{\mathbb{A}}_0 = (\tau_{\otimes}(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)]$. Получим с использованием (4.34), (4.35) и только что установленных равенств общее положение

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 = (\tau_{\otimes}(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A} \mid \mathcal{I}] = (\tau_{\otimes}(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)] = \\ = (\tau_{\otimes}(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_{\partial} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)] = (\tau_{\otimes}(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)]. \quad (4.49)$$

Из (4.45), (4.46) следует, что справедливо

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 = (\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A} \mid \mathcal{I}] = (\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)] = \\ = (\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_{\partial} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)] = (\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)]. \quad (4.50)$$

Из (4.47)–(4.50) вытекает следующая основная

Теорема 4.1. $\forall \tau \in \mathfrak{M}(\mathcal{L})$:

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 = (\tau - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A} \mid \mathcal{I}] = (\tau - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)] = (\tau - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}_{\partial} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)] = (\tau - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A}^0 \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)].$$

Заключение. В теореме 4.1 установлено совпадение семнадцати множеств, так или иначе связанных с проблемой соблюдения ограничений (3.5). Первое из них определяется посредством (3.6) в терминах множества допустимых элементов обобщенной задачи, которая ответственна, таким образом, за асимптотику допустимых управлений при весьма различных вариантах введения возмущений в основную систему условий (3.5). Существенную роль играет в этой связи условие 4.1, хотя и при отказе от этого условия имеет место известная универсальность представления на основе допустимого множества (3.6), как показывает теорема 3.1. Непосредственные приложения теорем 3.1, 4.1 связаны, в частности, с проблемой исследования асимптотического поведения областей достижимости и пучков решений управляемых систем в условиях интегральных ограничений различных типов. Если анализируется линейная управляемая система, то представления, подобные (3.5), возникают, в частности, при использовании формулы Коши и при фазовых ограничениях, заданных априори. Последние могут быть преобразованы к виду (3.5), что позволяет использовать конструкции настоящей работы для исследования асимптотического поведения пучков решений (или областей достижимости) при ”размывании” упомянутых фазовых ограничений с целью определения тенденций результата по отношению к разным вариантам ослабления условий задачи.

Литература

1. Ченцов А.Г. *Универсальная версия обобщенных интегральных ограничений в классе конечно-аддитивных мер*, I // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 7. – С. 67–74.
2. Бурбаки Н. *Общая топология. Основные структуры.* – М.: Наука, 1968. – 272 с.
3. Ченцов А.Г. *Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач.* – Екатеринбург: Наука, 1993. – 232 с.
4. Ченцов А.Г. *Задача о построении множеств асимптотической достижимости и ее регуляризация* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 10. – С. 61–75.

Институт математики и механики
Уральского отделения
Российской Академии наук

Поступила
17.05.1996