Известия вузов. Математика
2014, № 8, с. 30–41

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

М.С. БЛИЗОРУКОВА, В.И. МАКСИМОВ

О РЕКОНСТРУКЦИИ ВХОДНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

Аннотация. Рассматривается задача динамического восстановления входных воздействий параболического уравнения по измерению фазовых координат на бесконечном промежутке времени. Указывается устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм решения задачи, основанный на конструкциях теории динамического обращения.

Ключевые слова: динамические обратные задачи, восстановление возмущений.

УДК: 519.633

1. Введение

Пусть V и H — действительные гильбертовы пространства. Пространство V вложено в H плотно и непрерывно: $V \subset H = H^* \subset V^*$. Символы $|\cdot|_V$ и $|\cdot|_H$ означают нормы в V и H соответственно , а символы $(\cdot,\cdot)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в H и двойственность между V и V^*.

Задано параболическое уравнение

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = Bv(t) + f(t), \quad t \in T = [0, +\infty), \quad x(0) = x_0 \in V. \tag{1}$$

Здесь $A : V \to V^*$ — линейный, непрерывный и симметричный оператор, удовлетворяющий (для некоторого $c > 0$) условию коэрцитивности

$$\langle Ay, y\rangle \geq c|y|_V^2 \quad \forall y \in V, \tag{2}$$

$f(\cdot) \in L_2(T; H)$ — заданная функция, $v(\cdot)$ — возмущение, производная $\dot{x}(\cdot)$ понимается в смысле пространства распределений ([1], с. 41), B — линейный непрерывный оператор, действующий из гильбертова пространства U с нормой $|\cdot|_U$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_U$ (пространство возмущений) в пространство H ($B \in L(U; H)$) или V ($B \in L(U; V)$).

Обсуждается следующая задача. Значения $v(t)$ возмущения неизвестны и удовлетворяют включению $v(t) \in P \subset U$ ($t \geq 0$), где P — выпуклое, ограниченное и замкнутое множество. В моменты времени $\tau_i \in T$ ($i = 1, 2, \dots$) измеряется с ошибкой решение $x(\tau_i)$ уравнения (1). Результаты измерения — элементы $\xi_i^h \in H$ таковы, что

$$|\xi_i^h - x(\tau_i)|_Y \leq h, \tag{3}$$

Поступила 30.01.2013

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (12-01-00175-а, 13-01-00110-а), Программы поддержки фундаментальных исследований Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” (проект 12-П-1-1019), Программы поддержки ведущих научных школ России (НШ-6512.2012.1) и Урало-Сибирского интеграционного проекта (12-С-1-1017).

где $Y = H$, если $B \in L(U;H)$; $Y = V^*$, если $B \in L(U;V)$; $h \in (0,1)$ — величина ошибки измерения. Таким образом, полагаем, что на помехи накладываются ограничения "малости" их значений в каждый момент времени. Будем предполагать, что начальное состояние известно не точно: известен элемент $\xi_0^h \in V$, удовлетворяющий неравенству

$$|\xi_0^h - x_0|_V \le h. \tag{4}$$

Необходимо указать алгоритм приближенного восстановления неизвестного возмущения $v(\cdot)$ по результатам неточных измерений состояний $x(\cdot)$. Будем полагать, что качество восстановления оценивается двумя критериями: во-первых, величиной равномерного отклонения решения уравнения (1), отвечающего истинному возмущению $v(\cdot)$ и построенному приближению $v^h(\cdot)$ этого возмущения, во-вторых, разностью среднеквадратичных норм функций $v^h(\cdot)$ и $v(\cdot)$ (на $[0,\vartheta]$). Выбор этих двух критериев обусловлен тем, что малость их значений при соответствующих условиях влечет за собой близость приближения $v^h(\cdot)$ к возмущению $v(\cdot)$ в среднеквадратичной норме на отрезке $[0,\vartheta]$.

Обсуждаемая задача относится к классу обратных задач динамики систем. Подобные задачи исследовались ранее (например, [2]–[4]). Один из подходов к решению задач динамической реконструкции входа $u(\cdot)$ для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, был предложен в [5] и развит в дальнейшем в [6]–[8]. (Здесь указываем только монографии, в которых можно найти соответствующие ссылки.) Подход основан на сочетании методов теории гарантированного управления [9] и известного в теории некорректных задач метода сглаживающего функционала [2]. В работах [8], [10]–[12] указанный подход был развит для систем с распределенными параметрами. В цитированных выше работах были предложены алгоритмы, которые ориентированы на восстановление возмущения на фиксированном конечном промежутке времени. С ростом величины этого отрезка вычислительные и измерительные ошибки накапливаются. Алгоритм, свободный от этого недостатка, сконструирован в [13]. При этом рассмотрена система, описываемая векторным обыкновенным дифференциальным уравнением. В данной работе предложим модификацию алгоритма из [13] для параболического уравнения.

2. Постановка задачи

Прежде чем перейти к постановке задачи, дадим определение решения уравнения (1). Следуя ([14], с. 115), всякую функцию $x(\cdot) \in W(T_\vartheta;V) = \{x(\cdot) \in L_2(T_\vartheta;V) : \dot{x}(\cdot) \in L_2(T_\vartheta;V^*)\}$, удовлетворяющую соотношению

$$(\dot{x}(t), z) + \langle Ax(t), z\rangle = (Bv(t) + f(t), z) \quad \forall z \in V \quad \text{при почти всех} \quad t \in T_\vartheta$$

будем называть решением уравнения (1) на промежутке $T_\vartheta = [0,\vartheta]$, $\vartheta > 0$, и обозначать символом $x(\cdot) = x(\cdot; x_0, v(\cdot))$. Как известно ([15], теорема 3.3), при любых $\vartheta \in (0,+\infty)$ и $v(\cdot) \in L_2(T_\vartheta;U)$ уравнение (1) имеет единственное решение со свойством

$$x(\cdot) \in W^{1,2}(T_\vartheta;H) \cap C(T_\vartheta;V),$$

где $W^{1,2}(T_\vartheta;H) = \{w(\cdot) \in L_2(T_\vartheta;H) : \dot{w}(\cdot) \in L_2(T_\vartheta;H)\}$. В дальнейшем функцию $x(t)$, $t \in T$, будем называть решением уравнения (1) на промежутке T, если $x(\cdot)$ есть решение (1) на всяком промежутке T_ϑ, $\vartheta > 0$.

Пусть при каждом $h \in (0,1)$ фиксировано семейство $(\Delta_h)_{h>0}$ разбиений полуоси $[0,+\infty)$ моментами времени $\tau_{h,i}$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{\infty}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta_i(h), \quad \delta_i(h) \in (0,1], \tag{5}$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \delta_i(h) = +\infty \quad \forall h \in (0,1].$$

Наряду с (1) понадобится еще одно уравнение

$$\dot{y}^h(t) + Ay^h(t) = Bv^h(t) + f(t), \quad t \in T, \tag{6}$$

с начальным состоянием $y^h(0) = \xi_0^h$ и управлением $v^h(\cdot) \in P(\cdot)$, где $P(\cdot)$ — множество измеримых (по Лебегу) функций $v(\cdot) : [0, +\infty) \to P$, называемое множеством допустимых возмущений. Назовем уравнение (6) моделью. Уравнение (6) — "копия" уравнения (1). Отличие состоит лишь в том, что в (6) в правой части стоит управление $v^h(\cdot)$, которое будем формировать.

Заметим, что в силу непрерывности вложения пространства V в H справедливо неравенство

$$|x|_H \le c_0 |x|_V \quad \forall x \in V. \tag{7}$$

Линейность и непрерывность оператора A влекут справедливость неравенства

$$|Ax|_{V^*} \le c_* |x|_V \quad \forall x \in V. \tag{8}$$

Здесь c_0 и c_* — некоторые положительные константы.

Для любых $v(\cdot)$ и $v^h(\cdot)$ из $P(\cdot)$ введем два критерия отклонения $v^h(\cdot)$ от $v(\cdot)$ на каком-либо ограниченном отрезке времени $[0, \vartheta]$:

$$\omega_1(v^h(\cdot), v(\cdot)|\vartheta) = \max_{t \in [0,\vartheta]} \left| y^h(t; \xi_0^h, v^h(\cdot)) - x(t; x_0, v(\cdot)) \right|_H, \tag{9}$$

$$\omega_2(v^h(\cdot), v(\cdot), h|\vartheta) = \int_0^\vartheta |v^h(t)|_U^2 \, dt - \varrho_0(h) \int_0^\vartheta |v(t)|_U^2 \, dt. \tag{10}$$

Здесь $\varrho_0(\cdot) : (0,1) \to R^+ = \{r \in R : r > 0\}$ — некоторая функция со свойством $\varrho_0(h) \to +1$ при $h \to +0$, $x(\cdot; x_0, v(\cdot))$ и $y^h(\cdot; \xi_0^h, v^h(\cdot))$ — решения уравнений (1) и (6), порождаемые входами $v(\cdot)$ и $v^h(\cdot)$ соответственно.

Всякую кусочно-постоянную функцию $\xi^h(\cdot) : [0, +\infty) \mapsto H$, $\xi_0^h \in V$, $\xi^h(t) = \xi_i^h$ при $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, удовлетворяющую ограничениям (3), (4), будем называть *допустимым измерением точности* h, а всякую измеримую по Лебегу функцию $v(\cdot) : [0, +\infty) \mapsto P$ — *допустимым возмущением*.

Предположим, что решение $y^h(t)$, $t \ge 0$, уравнения (6) (как и решение уравнения (1)) наблюдается в моменты $\tau_{h,i}$ с ошибкой и изменяется под воздействием некоторого закона обратной связи $\mathcal{V}(t, y^h(\cdot), \xi^h(\cdot)) \in P$. Решение уравнения (6), таким образом, удовлетворяет следующим дифференциальному уравнению и начальному условию:

$$\dot{y}^h(t) + Ay^h(t) = f(t) + B\mathcal{V}(\tau_i, \xi_i^h, \psi_i^h), \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \tag{11}$$

$$y^h(0) = \xi_0^h,$$

где $\psi_i^h \in Y$ — результаты неточных измерений состояний $y^h(\tau_i)$: $|\psi_i^h - y^h(\tau_i)|_Y \le h$, $\tau_i = \tau_{h,i}$. *Допустимой обратной связью* (для модели (6)) назовем всякую функцию $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot) : T \times Y \times Y \mapsto P$. Для любой допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$ и любого допустимого измерения $\xi^h(\cdot)$ точности h назовем определенное на $[0, +\infty)$ решение $y^h(\cdot)$ задачи Коши (11) *траекторией модели*, соответствующей допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$ и допустимому измерению $\xi^h(\cdot)$.

Управляемым процессом, соответствующим допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$, допустимому возмущению $v(\cdot)$ и измерительной точности $h > 0$ будем называть всякую четверку $(x(\cdot), \xi^h(\cdot), y^h(\cdot), v^h(\cdot))$, где $x(\cdot) = x(\cdot; x_0, v(\cdot))$ — решение уравнения (1), $\xi^h(\cdot)$ — допустимое измерение точности h, отвечающее $x(\cdot)$, $y^h(\cdot)$ — траектория модели (11), соответствующая $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$, и $\xi^h(\cdot)$, а функция $v^h(\cdot):[0,+\infty)\mapsto P$, причем

$$v^h(t)=\mathcal{V}(\tau_i,\xi_i^h,\psi_i^h),\quad |\psi_i^h-y^h(\tau_i)|_Y\le h,\quad \xi_i^h=\xi^h(\tau_i),$$
$$t\in\delta_i=[\tau_i,\tau_{i+1}),\quad \tau_i=\tau_{h,i},\quad \delta_i=\delta_{h,i}=[\tau_{h,i},\tau_{h,i+1}).$$

Функцию $v^h(\cdot)$ будем называть *реализацией* допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot)$, соответствующей допустимому возмущению $v(\cdot)$ и допустимому измерению точности h.

Следуя [12], семейство допустимых обратных связей $(\mathcal{V}_h(\cdot,\cdot,\cdot))_{h>0}$ будем называть *устойчивым относительно момента* ϑ, если найдутся функции $\gamma_1(\cdot),\gamma_2(\cdot):(0,+\infty)\mapsto[0,+\infty)$ такие, что $\gamma_1(h)\to 0$, $\gamma_2(h)\to 0$ при $h\to 0$ и $\forall$ допустимого возмущения $v(\cdot)$, $\forall h\in(0,1)$, $\forall$ реализации $v^h(\cdot)$ допустимой обратной связи $\mathcal{V}_h(\cdot,\cdot,\cdot)$,

$$v^h(t)=\mathcal{V}_h(\tau_{h,i},\xi_i^h,\psi_i^h),\quad t\in\delta_{h,i},\tag{12}$$

$\forall$ траектории модели (11) $y^h(t)=y^h(t;\xi_0^h,v^h(\cdot))$, соответствующей функции $v^h(\cdot)$ вида (12), и $\forall$ допустимого измерения $\xi^h(\cdot)$ точности $h\in(0,1)$ выполняются неравенства

$$\sup_{\vartheta\ge 0}\omega_1(v^h(\cdot),v(\cdot)|\vartheta)\le\gamma_1(h),\tag{13}$$

$$\sup_{\vartheta\ge 0}\omega_2(v^h(\cdot),v(\cdot),h|\vartheta)\le\gamma_2(h).\tag{14}$$

Другими словами, (13), (14) выполняются для управляемого процесса $(x(\cdot),\xi^h(\cdot),y^h(\cdot),v^h(\cdot))$. Пару $(\gamma_1(\cdot),\gamma_2(\cdot))$ естественно назвать *оценкой точности* семейства $(\mathcal{V}_h(\cdot,\cdot,\cdot))_{h>0}$.

Обсуждаемая задача состоит в построении семейства допустимых обратных связей $\mathcal{V}_h$, устойчивого относительно момента ϑ.

3. Алгоритм решения задачи

Перед описанием алгоритма решения задачи приведем три условия, которые понадобятся в дальнейшем.

Условие 1. $\delta_i(h)=\delta(h)$ при всех $i=0,1,\ldots$.

Условие 2. $B\in L(U;V)$, $\inf\{|u|_U:u\in P\}\ge 1$.

Условие 3. $B\in L(U;H)$. Семейство Δ_h таково, что выполнено неравенство

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left\{\delta_i^{3/2}(h)\left(1+\sum_{j=0}^{i}\delta_j(h)\right)\right\}\le\varphi_1(h),\quad \varphi_1(h)\to 0\ \text{ при }\ h\to 0.$$

До начала работы алгоритма фиксируем величину $h\in(0,1)$, семейство $\{\nu_i^h\}_{i=0}^{\infty}$, а также функцию $\alpha=\alpha(h)\in(0,1)$ ($\alpha(h)\to 0$ при $h\to 0$) и разбиение $\Delta_h=\{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{\infty}$. Работу алгоритма разобьем на однотипные шаги. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i=[\tau_i,\tau_{i+1})$, $\tau_i=\tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. В момент τ_i вычисляется элемент

$$\mathcal{V}_h(\tau_i,\xi_i^h,\psi_i^h)=\arg\min\{2(B^*(\psi_i^h-\xi_i^h),v)_U+\alpha(h)|v|_U^2:v\in P\}.\tag{15}$$

После этого на вход модели (6) при всех $t\in\delta_i$ подается управление вида (12). Под действием этого управления модель переходит из состояния $y^h(\tau_i)$ в состояние $y^h(\tau_{i+1})=y^h(\tau_{i+1};\tau_i,y^h(\tau_i),v^h(\cdot))$. При этом в результате воздействия на уравнение (1) некоторого неизвестного возмущения $v(t)$, $t\in\delta_i$, система, описываемая этим уравнением, переходит из состояния $x(\tau_i)$ в состояние $x(\tau_{i+1})$. На следующем $(i+1)$-м шаге аналогичные действия повторяются.

Имеет место

Теорема 1. *Пусть выполнено одно из двух предположений:*

a) *условия* 1, 2, *причем* $(h+\delta(h))\alpha^{-1}(h) \to 0$ *при* $h \to 0$;

b) *условие* 3, *причем* $(h+\delta^{1/2}(h))\alpha^{-1}(h) \to 0$ *при* $h \to 0$, *где* $\delta(h) = \sup\limits_i \delta_i(h)$.

Пусть $(x(\cdot), \xi^h(\cdot), y^h(\cdot), v^h(\cdot))$, $h \in (0,1)$ *— управляемый процесс, соответствующий допустимым обратной связи* $\mathcal{V}_h(\cdot,\cdot,\cdot)$ *вида* (15), *возмущению* $v(\cdot)$ *и измерению точности* h *—* $\xi^h(\cdot)$. *Тогда при всех* $t \geq 0$

$$\int_0^t |v^h(\tau)|_U^2\, d\tau \leq \varrho_0(h) \int_0^t |v(\tau)|_U^2\, d\tau + \varrho_1(h), \tag{16}$$

где

$$\varrho_0(h) = \frac{\alpha(h) + b_1(h+\delta(h))}{\alpha(h) - b_1(h+\delta(h))}, \quad \varrho_1(h) = \frac{c_0 h^2}{\alpha(h) - b_1(h+\delta(h))},$$

если выполнено предположение a) *и* $h \in (0, h_a)$;

$$\varrho_0(h) = \frac{\alpha(h) + b_3(h+\delta^{1/2}(h))}{\alpha(h) - b_3(h+\delta^{1/2}(h))}, \quad \varrho_1(h) = \frac{c_0^2 h^2 + b_3\varphi_1(h)}{\alpha(h) - b_3(h+\delta^{1/2}(h))},$$

если выполнено предположение b) *и* $h \in (0, h_\delta)$. *Кроме того, справедливо неравенство*

$$|y^h(t) - x(t)|_H \leq \nu(t,h,\alpha), \quad t \in T, \tag{17}$$

где

$$\nu(t,h,\alpha) = \left[c_0^2 h^2 e^{2\omega t} - 0,5\omega^{-1}\{2d^2(P)\alpha(h) + b_2(h+\delta(h))\}\right]^{1/2},$$

если выполнено предположение a) *и* $h \in (0, h_a)$;

$$\nu(t,h,\alpha) = \left[c_0^2 h^2 e^{2\omega t} - 0,5\omega^{-1}\{2d^2(P)\alpha(h) + b_4(h+\delta^{1/2}(h))\} + 2b_4\varphi_1(h)\right]^{1/2},$$

если выполнено предположение b) *и* $h \in (0, h_\delta)$. *Здесь* $\omega = -0.5cc_0^{-2}$, $d(P) = \sup\{|v|_U : v \in P\}$, $b_1, \ldots, b_4$ *— постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде, число* $h_a \in (0,1)$ *таково, что при всех* $h \in (0, h_a)$ *верно неравенство* $\alpha(h) - b_1(h+\delta(h)) > 0$, *а число* $h_\delta \in (0,1)$ *таково, что* $\alpha(h) - b_3(h+\delta^{1/2}(h)) > 0$ *при всех* $h \in (0, h_\delta)$.

Доказательство. Сначала обратимся к случаю, когда выполнено предположение a) и $B \in L(U;V)$. В силу (1) и (6) заключаем, что для разности $z(\cdot) = y^h(\cdot) - x(\cdot)$ справедливо соотношение

$$\dot z(t) + Az(t) = B(v^h(t) - v(t)) \ \text{ при почти всех (п. в.) } \ t \geq 0, \quad z(0) = \xi_0^h - x_0.$$

Покажем, что функция $z(\cdot)$ ограничена на T. Умножив на $z(t)$ правую и левую части последнего равенства, в силу условия коэрцитивности (2) при п. в. $t \in T$ будем иметь

$$0.5\dot\mu(t) + c|z(t)|_V^2 \leq (B(v^h(t) - v(t)), z(t)). \tag{18}$$

Здесь $\mu(t) = |z(t)|_H^2$. Учитывая (7), из (18) получаем

$$0.5\dot\mu(t) + 0.5c|z(t)|_V^2 \leq (B(v^h(t) - v(t)), z(t)) + \omega|z(t)|_H^2. \tag{19}$$

Из (19) выводим

$$\dot\mu(t) \leq 2|B(v(t) - v^h(t))|_H \mu^{1/2}(t) + 2\omega\mu(t) \leq \omega\mu(t) + \varrho^h(t), \tag{20}$$

где

$$\varrho^h(t) = -\omega^{-1}|B(v(t) - v^h(t))|_H^2 \le c_1 = \mathrm{const} \in (0, +\infty). \tag{21}$$

Следовательно, $\dot\mu(t) = \varrho^h(t) + \omega\mu(t) + \psi(t)$, где $\psi(t) \le 0$ при $t \in T$. В силу (4), (7) имеем $\mu(0) = |z(0)|_H^2 \le c_0^2 h^2$, $h \in (0,1)$. В таком случае получаем

$$\mu(t) = e^{\omega t}\mu(0) + \int_0^t e^{\omega(t-\tau)}\{\psi(\tau) + \varrho^h(\tau)\}\,d\tau \le \\ \le \mu(0) + \int_0^t e^{\omega(t-\tau)}\varrho^h(\tau)\,d\tau \le \mu(0) - \omega^{-1}c_1 \le c_0^2 - \omega^{-1}c_1. \tag{22}$$

Таким образом, ограниченность функции $z(\cdot)$ установлена.

Для доказательства теоремы рассмотрим изменение величины

$$\varepsilon_h(t) = \mu(t) + c\int_0^t |z(\tau)|_V^2\,d\tau + \alpha\int_0^t \{|v^h(\tau)|_U^2 - |v(\tau)|_U^2\}\,d\tau, \quad \alpha = \alpha(h), \tag{23}$$

на промежутке T. После дифференцирования при п. в. $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, будем иметь (см. (18), (23))

$$\dot\varepsilon_h(t) \le 2\langle z(\tau_i), B(v^h(t) - v(t))\rangle + 2\omega\mu(t) + \alpha\{|v^h(t)|_U^2 - |v(t)|_U^2\} + \\ + 2\langle z(t) - z(\tau_i), B(v^h(t) - v(t))\rangle. \tag{24}$$

В дальнейшем понадобится оценка разности $|z(t) - z(\tau_i)|_{V^*}$ при $t \in \delta_i$, $i = 0, 1, \dots$. Из (2), (18) получаем

$$\mu(t + \Delta t) + 2c\int_t^{t+\Delta t} |z(\tau)|_V^2\,d\tau \le \mu(t) + 2\int_t^{t+\Delta t} |B(v(\tau) - v^h(\tau))|_H |z(\tau)|_H\,d\tau. \tag{25}$$

Здесь воспользовались неравенством $\omega < 0$. Из (25), учитывая (7), а также неравенство $|B(v(\tau) - v^h(\tau))|_H \le c_2$, выводим

$$2\int_t^{t+\Delta t} |B(v(\tau) - v^h(\tau))|_H |z(t)|_H\,d\tau \le 2\int_t^{t+\Delta t} c_2 c_0 |z(\tau)|_V\,d\tau \le c_3\Delta t + c\int_t^{t+\Delta t} |z(\tau)|_V^2\,d\tau,$$

где $c_3 = c_2^2 c_0^2 c^{-1}$. Далее, воспользовавшись последним неравенством, а также (25), получаем

$$\mu(t + \Delta t) + c\int_t^{t+\Delta t} \mu(\tau)\,d\tau \le |z(t)|_H^2 + c_3\Delta t. \tag{26}$$

При всех $t \ge 0$, $\Delta t \ge 0$ и всех $v \in V$ справедливо равенство

$$\langle z(t + \Delta t) - z(t), v\rangle + \int_t^{t+\Delta t} \langle Az(\tau), v\rangle\,d\tau = \int_t^{t+\Delta t} (B(v^h(\tau) - v(\tau)), v)\,d\tau.$$

Отсюда, учитывая неравенства (7), (8), выводим

$$|z(t + \Delta t) - z(t)|_{V^*} \le c_*\int_t^{t+\Delta t} |z(\tau)|_V\,d\tau + c_0\int_t^{t+\Delta t} |B(v^h(\tau) - v(\tau))|_H\,d\tau \le \\ \le c_4\Delta t + c_*\int_t^{t+\Delta t} |z(\tau)|_V^2\,d\tau, \tag{27}$$

где $c_4 = c_* + c_0 c_2$. Из (26), (27) следует

$$|z(t + \Delta t) - z(t)|_{V^*} \le c_* c^{-1}(|z(t)|_H^2 - |z(t + \Delta t)|_H^2) + (c_* c^{-1} c_3 + c_4)\Delta t. \tag{28}$$

Заметим, что (20), (21) дают

$$|\mu(t+\Delta t)-\mu(t)| = \left|\int_t^{t+\Delta t}\dot\mu(\tau)\,d\tau\right|_H \le c_1\Delta t.$$

Из (28), воспользовавшись последним неравенством, получаем

$$|z(t+\Delta t)-z(t)|_{V^*} \le c_5\Delta t. \tag{29}$$

Далее, в силу (24) имеем

$$\begin{aligned}\dot\varepsilon_h(t) &\le 2\omega\mu(t) + 2\langle z(t)-z(\tau_i), B(v^h(t)-v(t))\rangle + \chi_i^t(v^h,v) + \\ &+ 2\langle \xi_i^h - x(\tau_i), B(v^h(t)-v(t))\rangle + 2\langle y^h(\tau_i)-\psi_i^h, B(v^h(t)-v(t))\rangle \quad \text{при п. в. } t\in\delta_i,\end{aligned} \tag{30}$$

где

$$\chi_i^t(v^h,v) = -2(v^h(t), B^*(\xi_i^h-\psi_i^h))_U + \alpha|v^h(t)|_U^2 + 2(v(t),B^*(\xi_i^h-\psi_i^h))_U - \alpha|v(t)|_U^2.$$

Из (12), (15) вытекает неравенство $\chi_i^t(v^h,v)\le 0$. В таком случае при п. в. $t\in\delta_i$

$$\begin{aligned}\dot\varepsilon_h(t) &\le 2\omega\mu(t) + 2\langle z(t)-z(\tau_i), B(v^h(t)-v(t))\rangle + \\ &+ 2\langle \xi_i^h - x(\tau_i), B(v^h(t)-v(t))\rangle + 2\langle y^h(\tau_i)-\psi_i^h, B(v^h(t)-v(t))\rangle.\end{aligned} \tag{31}$$

Учитывая (3), (29), имеем

$$2\langle z(t)-z(\tau_i), B(v^h(t)-v(t))\rangle \le c_6\delta(h)\{|v^h(t)|_U + |v(t)|_U\}, \tag{32}$$

$$2\langle \xi_i^h - x(\tau_i), B(v^h(t)-v(t))\rangle \le c_7 h\{|v^h(t)|_U + |v(t)|_U\}, \tag{33}$$

$$2\langle y^h(\tau_i)-\psi_i^h, B(v^h(t)-v(t))\rangle \le c_7 h\{|v^h(t)|_U + |v(t)|_U\},$$

где $c_6 = c_5c_7$, $c_7 = 2|B|_{L(U;V)}$, $|B|_{L(U;V)}$ — норма линейного непрерывного оператора $B: U\to V$. Воспользовавшись (31)–(33), при п. в. $t\in\delta_i$ получаем

$$\dot\varepsilon_h(t) \le b_1(h+\delta(h))\{|v^h(t)|_U + |v(t)|_U\} + 2\omega\mu(t). \tag{34}$$

Значит, при $t\in[\tau_i,\tau_{i+1})$ верно неравенство

$$\varepsilon_h(t) \le \varepsilon_h(\tau_i) + b_1(h+\delta(h))\int_{\tau_i}^t \{|v^h(\tau)|_U + |v(\tau)|_U\}\,d\tau,$$

так как $\omega<0$. Отсюда (в силу условия 2) следует

$$\varepsilon_h(t) \le \varepsilon_h(0) + b_1(h+\delta(h))\int_0^t \{|v^h(\tau)|_U^2 + |v(\tau)|_U^2\}\,d\tau, \quad t\in T. \tag{35}$$

Из (35) при $t\in T$ получаем

$$\alpha(h)\int_0^t\{|v^h(\tau)|_U^2 - |v(\tau)|_U^2\}\,d\tau \le \varepsilon_h(0) + b_1(h+\delta(h))\int_0^t\{|v^h(\tau)|_U^2 + |v(\tau)|_U^2\}\,d\tau.$$

Таким образом, при всех $t\in T$ верна оценка

$$\{\alpha(h) - b_1(h+\delta(h))\}\int_0^t |v^h(\tau)|_U^2\,d\tau \le \varepsilon_h(0) + \{\alpha(h)+b_1(h+\delta(h))\}\int_0^t |v(\tau)|_U^2\,d\tau. \tag{36}$$

Из (36), учитывая (4), (7), при $h\in(0,h_a)$ выводим

$$\int_0^t |v^h(\tau)|_U^2\,d\tau \le \frac{\alpha(h)+b_1(h+\delta(h))}{\alpha(h)-b_1(h+\delta(h))}\int_0^t |v(\tau)|_U^2\,d\tau + \frac{c_0h^2}{\alpha(h)-b_1(h+\delta(h))}, \quad t\in T.$$

(В силу предположения a) число $h_a > 0$ со свойством, указанным в формулировке теоремы, существует.) Отсюда следует неравенство (16) в случае, когда выполнено предположение a).

Покажем теперь, что верно (17). Из (15) при п. в. $t \in \delta_i$ вытекает

$$(B^*(\psi_i^h - \xi_i^h), v^h(t))_U \le \inf\{(B^*(\psi_i^h - \xi_i^h), v)_U : v \in P\} + d^2(P)\alpha(h).$$

Учитывая это неравенство, аналогично (34) получаем

$$\dot\mu(t) \le 2\omega\mu(t) + b_2(h + \delta(h))\{|v^h(t)|_U + |v(t)|_U\} + 2d^2(P)\alpha(h), \tag{37}$$

т. е.

$$\dot\mu(t) = 2\omega\mu(t) + b_2(h + \delta(h)) + 2d^2(P)\alpha(h) + \psi_0(t),$$

где $\psi_0(t) \le 0$, $t \in T$. В таком случае

$$\mu(t) \le \mu(0)e^{2\omega t} + 2d^2(P)\alpha(h)\int_0^t e^{2\omega(t-\tau)}\,d\tau + b_2\int_0^t e^{2\omega(t-\tau)}(h + \delta(h))\,d\tau. \tag{38}$$

Из (38) следует (17) в случае, когда выполнено предположение a).

Обратимся к случаю, когда выполнено предположение b) и $B \in L(U; H)$. Заметим, что справедливо равенство

$$\int_0^t |\dot z(\tau)|_H^2\,d\tau + \int_0^t \langle Az(\tau), \dot z(\tau)\rangle\,d\tau = \int_0^t (B(v^h(\tau) - v(\tau)), \dot z(\tau))\,d\tau, \quad t \in T.$$

Отсюда выводим

$$\int_0^t |\dot z(\tau)|_H^2\,d\tau + 0.5\langle Az(t), z(t)\rangle \le 0.5\langle Az(0), z(0)\rangle + \\ + 0.5\int_0^t |\dot z(\tau)|_H^2\,d\tau + 2\int_0^t |B|^2_{L(U;H)}d^2(P)\,d\tau. \tag{39}$$

Из (39), учитывая (4), получаем

$$\int_0^t |\dot z(\tau)|_H^2\,d\tau \le |A|_{L(V;V^*)}h^2 + 4|B|^2_{L(U;H)}d^2(P)t. \tag{40}$$

Аналогично (24) (см. также (31)) при п.в. $t \in \delta_i$ устанавливаем

$$\dot\varepsilon_h(t) \le \chi_i^t(v^h, v) + 2\omega\mu(t) + 2(z(t) - z(\tau_i), B(v^h(t) - v(t))) + \\ + 2(\xi_i^h - x(\tau_i), B(v^h(t) - v(t))) + 2(y^h(\tau_i) - \psi_i^h, B(v^h(t) - v(t))). \tag{41}$$

Далее ввиду (3) при п. в. $t \in \delta_i$ имеем

$$2(\xi_i^h - x(\tau_i), B(v^h(t) - v(t))) \le 2|B|_{L(U;H)}h\{|v^h(t)|_U + |v(t)|_U\}, \tag{42}$$

$$2(y^h(\tau_i) - \psi_i^h, B(v^h(t) - v(t))) \le 2|B|_{L(U;H)}h\{|v^h(t)|_U + |v(t)|_U\}. \tag{43}$$

Кроме того, верно неравенство

$$2(z(t) - z(\tau_i), B(v^h(t) - v(t))) \le 2|B|_{L(U;H)}\{|v^h(t)|_U + |v(t)|_U\}\int_{\tau_i}^t |\dot z(\tau)|_H\,d\tau \le \\ \le 4|B|_{L(U;H)}\delta_i^{1/2}(h)\{|v^h(t)|_U^2 + |v(t)|_U^2 + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot z(\tau)|_H^2\,d\tau\}, \quad t \in \delta_i. \tag{44}$$

Из (40), (44) получаем

$$2(z(t)-z(\tau_i),B(v^h(t)-v(t)))\le b_3\delta_i^{1/2}(h)\left\{1+|v^h(t)|_U^2+|v(t)|_U^2+\sum_{j=0}^{i}\delta_j(h)\right\},\quad t\in\delta_i,\quad (45)$$

где $b_3=4|B|_{L(U;H)}\max\{4|B|^2_{L(U;H)}d^2(P),|A|_{L(V;V^*)},1\}$. В таком случае, учитывая (12), (15), из (41)–(43), (45) при п.в. $t\in\delta_i$ выводим

$$\dot\varepsilon_h(t)\le\gamma_{h,i}(t)+2\omega\mu(t),\qquad (46)$$

где

$$\gamma_{h,i}(t)=4h|B|_{L(U;H)}\{|v^h(t)|_U^2+|v(t)|_U^2\}+b_3\delta_i^{1/2}(h)\Bigg\{1+|v^h(t)|_U^2+|v(t)|_U^2+$$

$$+\sum_{j=0}^{i}\delta_j(h)\Bigg\}\le b_3(h+\delta_i^{1/2}(h))\{|v^h(t)|_U^2+|v(t)|_U^2\}+b_3\delta_i^{1/2}(h)\left(1+\sum_{j=0}^{i}\delta_j(h)\right)\ \text{при п. в. }\ t\in\delta_i.$$

Следовательно, при п. в. $t\in\delta_i$

$$\dot\mu(t)+\{\alpha(h)-b_3(h+\delta^{1/2}(h))\}|v^h(t)|_U^2\le\{\alpha(h)+b_3(h+\delta^{1/2}(h))\}|v(t)|_U^2+$$
$$+b_3\delta_i^{1/2}(h)\left(1+\sum_{j=0}^{i}\delta_j(h)\right),$$

так как $\omega<0$. Воспользовавшись условием 3, отсюда при $h\in(0,h_b)$ получаем

$$\mu(t)+\{\alpha(h)-b_3(h+\delta^{1/2}(h))\}\int_0^t|v^h(\tau)|_U^2\,d\tau\le$$
$$\le\mu(0)+b_3\varphi_1(h)+\{\alpha(h)+b_3(h+\delta^{1/2}(h))\}\int_0^t|v(\tau)|_U^2\,d\tau.\qquad (47)$$

(В силу предположения a) число $h_b>0$ со свойством, указанным в формулировке теоремы, существует.) Из (47) вытекает оценка (16) в случае, когда выполнено предположение b).

Проверим (17). Аналогично (37), учитывая (46), выводим

$$\dot\mu(t)\le\omega\mu(t)+2\gamma_h(t)+2d^2(P)\alpha(h)+b_4(h+\delta^{1/2}(h)),$$
$$\gamma_h(t)=b_4\delta_i^{1/2}(h)\left(1+\sum_{j=0}^{i}\delta_j(h)\right)\ \text{при п. в. }\ t\in\delta_i,$$

т. е.

$$\dot\mu(t)=2\omega\mu(t)+\gamma_h(t)+2d^2(P)\alpha(h)+b_4(h+\delta^{1/2}(h))+\psi_1(t),$$

где $\psi_1(t)\le 0$, $t\in T$. В таком случае

$$\mu(t)\le\mu(0)e^{2\omega t}+\{2d^2(P)\alpha(h)+b_4(h+\delta^{1/2}(h))\}\int_0^t e^{2\omega(t-\tau)}\,d\tau+\int_0^t e^{2\omega(t-\tau)}\gamma_h(\tau)\,d\tau.\qquad (48)$$

После интегрирования по частям будем иметь

$$\int_0^t e^{2\omega(t-\tau)}\gamma_h(\tau)\,d\tau\le\beta(t)-2\omega\int_0^t e^{2\omega(t-\tau)}\beta(\tau)\,d\tau,\qquad (49)$$

где $\beta(\tau) = \int\limits_0^\tau \gamma_h(s)\,ds$. В силу условия 3 $\beta(\tau) \le \int\limits_0^{+\infty} \gamma_h(s)\,ds \le b_4\varphi_1(h)$ $(\tau \ge 0)$. Поэтому правая часть неравенства (49) не превосходит значения $2b_4\varphi_1(h)$. Из (48), (49) выводим

$$\mu(t) \le \mu(0)e^{2\omega t} - 0.5\omega^{-1}\{2d^2(P)\alpha(h) + b_4(h + \delta^{1/2}(h))\} + 2b_4\varphi_1(h).$$

Неравенство (17) в случае, когда выполнено предположение b), установлено. □

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть выполнено одно из двух предположений теоремы* 1. *Пусть также при выполнении предположения* b) *имеет место сходимость*

$$\varphi_1(h)\alpha^{-1}(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Тогда семейство $(\mathcal{V}_h(\cdot,\cdot,\cdot))_{h>0}$ *допустимых обратных связей вида* (15) *устойчиво относительно момента* ϑ, *а пара* $(\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot))$, *где*

$$\gamma_1(h) = \nu(0, h, \alpha(h)), \quad \gamma_2(h) = \varrho_1(h),$$

есть оценка точности этого семейства.

Доказательство. Заметим, что $\gamma_1(h)$, $\gamma_2(h) \to 0$ при $h \to 0$ и $(x(\cdot), \xi^h(\cdot), y^h(\cdot), v^h(\cdot))$, $h \in (0,1)$, — управляемый процесс, соответствующий допустимой обратной связи $\mathcal{V}_h(\cdot,\cdot,\cdot)$, допустимому возмущению $v(\cdot)$ и измерительной точности h. Тогда по теореме 1 при всех $t \ge 0$ выполняются неравенства (16) и (17), из которых и вытекает утверждение данной теоремы. □

При некоторых дополнительных условиях на каждом ограниченном промежутке времени $T_\vartheta = [0, \vartheta]$ может быть выписана оценка скорости сходимости.

Теорема 3. *Пусть выполнено предположение* a) *теоремы* 1, *пусть также* $U = V$, B — *оператор канонического вложения* V *в* V^* *и* $v_*(\cdot) \in W(T; V)$. *Тогда справедлива оценка*

$$|v_*(\cdot) - v^h(\cdot)|^2_{L_2(T_\vartheta; H)} \le K_1 K^{1/2}(\vartheta, \alpha, h)\{d(P) + \mathrm{var}(T_\vartheta; v(\cdot))\} + \varrho_1(h) + \vartheta d^2(P)|1 - \varrho_0(h)|,$$

где

$$K(t, \alpha, h) = c_0^2 h^2 + d^2(P)\{2b_1(h + \delta(h)) + \alpha(h)\}, \quad K_1 = 4\max\{c^{(1)}, (0.5c^{-1}\vartheta)^{1/2}|A|_{L(V;V^*)}\}.$$

Здесь $c^{(1)} > 0$ такое, что $|x|_{V^*} \le c^{(1)}|x|_H \quad \forall x \in H$, символ $\mathrm{var}(T_*; v(\cdot))$ означает вариацию функции $v(\cdot)$ на отрезке T_*, а символ $W(T_*; V)$ — множество функций $y(\cdot) : T_* \to V$ с ограниченной вариацией.

Для доказательства теоремы 3 понадобится

Лемма ([8], с. 54). *Пусть* $u(\cdot) \in L_\infty(T_*; V^*)$, $v(\cdot) \in W(T_*; V)$, $T_* = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$,

$$\left|\int_a^t u(\tau)\,d\tau\right|_{V^*} \le \varepsilon, \quad |v(t)|_V \le K \quad \forall\ t \in T_*.$$

Тогда при всех $t \in T_*$ *верно неравенство*

$$\left|\int_a^t \langle u(\tau), v(\tau)\rangle\,d\tau\right| \le \varepsilon(K + \mathrm{var}(T_*; v(\cdot))).$$

Доказательство теоремы 3. Заметим, что для любых $t_1, t_2 \in T_*$, $t_1 < t_2$, имеем

$$\Big| \int_{t_1}^{t_2} B(v_*(t) - v^h(t))\,dt \Big|_{V^*} = \sup_{|v|\le 1} \Big| \Big\langle \int_{t_1}^{t_2} \{\dot{x}(\tau) - \dot{y}^h(\tau) - Ax(\tau) + Ay^h(\tau)\}\,d\tau, v \Big\rangle \Big| \le$$
$$\le |z(t_2) - z(t_1)|_{V^*} + |A|_{L(V;V^*)} \int_{t_1}^{t_2} |z(\tau)|_V\,d\tau, \quad (50)$$

где, как и выше, $z(t) = y^h(t) - x(t)$. Кроме того, в силу (35)

$$|z(t)|_H^2 + 2c\int_0^t |z(\tau)|_V^2\,d\tau \le \varepsilon_h(t) + \alpha(h)\int_0^t |v(\tau)|_H^2\,d\tau \le K(t,\alpha,h). \quad (51)$$

Из (50), (51) выводим

$$\Big| \int_{t_1}^{t_2} B(v_*(t) - v^h(t))\,dt \Big|_{V^*} \le K_1 K^{1/2}(\vartheta,\alpha,h).$$

Воспользовавшись леммой, а также неравенством (16), получаем

$$|v_*(\cdot) - v^h(\cdot)|^2_{L_2(T_\vartheta;H)} = |v_*(\cdot)|^2_{L_2(T_\vartheta;H)} - 2\int_0^\vartheta (v_*(\tau), v^h(\tau))\,d\tau + |v^h(\cdot)|^2_{L_2(T_\vartheta;H)} \le$$
$$\le 2|v_*(\cdot)|^2_{L_2(T_\vartheta;H)} - 2\int_0^\vartheta (v_*(\tau), v^h(\tau))\,d\tau + \varrho_1(h) + (\varrho_0(h) - 1)\int_0^\vartheta |v_*(\tau)|_H^2\,d\tau =$$
$$= 2\int_0^\vartheta \langle B(v_*(\tau) - v^h(\tau)), v_*(\tau)\rangle\,d\tau + \varrho_1(h) + \vartheta d^2(P)|1 - \varrho_1(h)| \le$$
$$\le K_1 K^{1/2}(\vartheta,\alpha,h)\{d(P) + \mathrm{var}(T_\vartheta; v(\cdot))\} + \varrho_1(h) + \vartheta d^2(P)|1 - \varrho_1(h)|. \quad \square$$

Литература

[1] Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения* (Мир, М., 1978).

[2] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач* (М., 1979).

[3] Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения* (Наука, М., 1978).

[4] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. *Некорректные задачи математической физики и анализа* (Наука, Новосибирск, 1980).

[5] Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. *О моделировании управления в динамической системе*, Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, № 2, 51–60 (1983).

[6] Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations*: *dynamical solutions* (Gordon and Breach, Basel, 1995).

[7] Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И. *Методы динамического восстановления входов управляемых систем* (УрО РАН, Екатеринбург, 2011).

[8] Максимов В.И. *Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем* (Екатеринбург, 2000).

[9] Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры* (М., 1974).

[10] Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И. *Метод экстремального сдвига Н.Н. Красовского и задачи граничного управления*, Автоматика и телемеханика, № 4, 18–30 (2009).

[11] Максимов В.И.*Об одном алгоритме восстановления интенсивности функции источника*, Тр. МИРАН им. В.А. Стеклова **277**, 178–191 (2012).

[12] Maksimov V.I. *On reconstruction of boundary controls in a parabolic equation*, Advances in Diff. Equat. **14**, (11–12) 1193–1211 (2009).

[13] Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. *On rough inversion of a dynamical system with a disturbance*, J. Inv. Ill-Posed Problems **16**, 1–14 (2008).

[14] Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач* (Мир, М., 1972).
[15] Barbu V. *Optimal control of variational inequalities* (Pitman Advanced Publishing Program, London, 1984).

М.С. Близорукова

доцент, кафедра моделирования управляемых систем,
Уральский федеральный университет,
старший научный сотрудник, отдел дифференциальных уравнений,
Институт математики и механики Уральского отделения РАН,
ул. С. Ковалевской, д. 16, г. Екатеринбург, 620990, Россия,

e-mail: msb@imm.uran.ru

В.И. Максимов

профессор, кафедра моделирования управляемых систем,
Уральский федеральный университет,
заведующий отделом дифференциальных уравнений,
Институт математики и механики Уральского отделения РАН,
ул. С. Ковалевской, д. 16, г. Екатеринбург, 620990, Россия,

e-mail: maksimov@imm.uran.ru

M.S. Blizorukova and V.I. Maksimov

On reconstruction of an input for parabolic equation on infinite time interval

Abstract. For a parabolic equation we consider a problem of dynamic reconstruction of inputs from measurements of phase coordinates on an infinite time interval. The paper presents an algorithm based on constructions of the theory of dynamic inversion. The algorithm is stable with respect to informational noises and computational errors.

Keywords: dynamic inverse problems, reconstruction of disturbances.

M.S. Blizorukova

Associate Professor, Chair of Modeling of Controlled Syetems,
Ural Federal University,
Senior Researcher, Department of Differential Equations,
Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
16 S. Kovalevskaya str., Ekaterinburg, 620990 Russia,

e-mail: msb@imm.uran.ru

V.I. Maksimov

Professor, Chair of Modeling of Controlled Syetems,
Head of Department of Differential Equations,
Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
16 S. Kovalevskaya str., Ekaterinburg, 620990 Russia,

e-mail: maksimov@imm.uran.ru