ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 2 (489)

УДК 517.968

А.П. ГУРЕВИЧ, А.П. ХРОМОВ

СУММИРУЕМОСТЬ ПО РИССУ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В статье [1] исследован вопрос о равносходимости по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора $Af=\int\limits_0^1 A(x,t)f(t)dt$ и в обычный тригонометрический ряд Фурье. Равносходимость была установлена при следующих предположениях:

а) производные $A_{x^st^j}(x,t)=\frac{\partial^{s+j}}{\partial x^s\partial t^j}A(x,t)$, $s,j=0,\dots,n$, непрерывны при $t\le x$ и $t\ge x$;

б) $P_{sj}(t)=\Delta A_{x^st^j}(x,t)|_{x=t}=A_{x^st^j}(x,t)|_{x=t+0}-A_{x^st^j}(x,t)|_{x=t-0}\in C^{n-1-j}[0,1]$, $j=0,\dots,n-1$, $s=0,\dots,n$;

в) A^{-1} существует;

г) $\Delta A_{x^s}(x,t)|_{x=t}=\delta_{s,n-1}$, $s=0,\dots,n$ ($\delta_{s,n-1}$ — символ Кронекера).

Было показано, что условие в) необходимо для равносходимости, условия а) и б) точны, а условие г) говорит о каноническом виде интегрального оператора, для которого имеет место рассматриваемая равносходимость. При выполнении условий а)–г) A^{-1} представляет собой следующий интегро-дифференциальный оператор:

$$A^{-1}y=(E+N)(y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_ny), \tag{1}$$

$$V_j(y)=U_j(y)-(y,\varphi_j)=0,\quad j=1,\dots,n. \tag{2}$$

Здесь E — единичный оператор, $Nf=\int\limits_0^1 N(x,t)f(t)dt$, где ядро $N(x,t)$ непрерывно при $t\le x$ и $t\ge x$, $a_1,\dots,a_n$ — некоторые константы,

$U_j(y)=\sum\limits_{\mu=0}^{\sigma_j}(a_{j\mu}y^{(\mu)}(0)+b_{j\mu}y^{(\mu)}(1))$, $j=1,\dots,n$,

$|a_{j,\sigma_j}|+|b_{j,\sigma_j}|>0$, $n-1\ge\sigma_1\ge\dots\ge\sigma_n\ge0$, $\sigma_j>\sigma_{j+2}$,

$(y,\varphi_j)=\int\limits_0^1 y(x)\varphi_j(x)dx$, $\varphi_j(x)\in C[0,1]$.

Для равносходимости требуется еще условие

д) $U_j(y)$, $j=1,\dots,n$, регулярны по Биркгофу ([2], с. 66).

В данной статье исследуется сходимость средних Рисса

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f\,d\lambda.$$

Здесь $R_\lambda=(E-\lambda A)^{-1}A$ — резольвента Фредгольма, а $g(\lambda,r)$ удовлетворяет следующим условиям:

е) $g(\lambda,r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda|\le r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda|<r$ при любом $r>0$,

ж) существует такая постоянная $C>0$, что $|g(\lambda,r)|\le C$ при всех $r>0$ и $|\lambda|\le r$,

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00075), программы "Ведущие научные школы" (проект № 00-15-96123) и программы "Университеты России".

з) существуют такие положительные величины β, β_1, h, что

$$g(r\exp i\varphi, r) = \begin{cases} O(|\varphi|^\beta) & \text{при } |\varphi| \le h, \ n = 4n_0; \\ O(|\varphi - \pi|^\beta) & \text{при } |\varphi - \pi| \le h, \ n = 4n_0 + 2; \\ \left.\begin{array}{ll} O\bigl(|\varphi - \frac{\pi}{2}|^\beta\bigr) & \text{при } |\varphi - \frac{\pi}{2}| \le h; \\ O\bigl(|\varphi + \frac{\pi}{2}|^{\beta_1}\bigr) & \text{при } |\varphi + \frac{\pi}{2}| \le h, \end{array}\right\} & n \text{ нечетное,} \end{cases}$$

и) $g(\lambda, r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ.

В статье устанавливаются следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* а)–и)*. Тогда для того чтобы выполнялось соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f \, d\lambda \right\|_{C^\alpha[0,1]} = 0, \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in C^\alpha[0,1]$ и $V_j(f) = 0$ для таких j, что выполнено неравенство $\sigma_j \le \alpha$. Здесь α — одно из чисел $0, 1, \ldots, n-1$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* а)–и)*, кроме* д)*, и $A(x,t) = \overline{A(t,x)}$. Тогда для справедливости* (3) *необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in \Delta_\alpha$, где Δ_α — замыкание в пространстве $C^\alpha[0,1]$ множества $\{f(x) \mid f(x) = Ag, \ g(x) \in L[0,1]\}$.*

Отметим, что для случая, когда A^{-1} является дифференциальным оператором с регулярными краевыми условиями, а $g(\lambda, r) = \bigl(1 - \frac{\lambda^4}{r^4}\bigr)^\beta$, теорема 1 установлена в [3].

Другие результаты о средних Рисса для дифференциальных операторов содержатся в [4]–[6].

1. Оператор L_0

Рассмотрим оператор L_0,

$$L_0 y = y^{(n)}(x), \quad x \in [0,1],$$

с условиями (2). Предполагаем, что $U_j(y)$ удовлетворяют условию д). Обозначим через $R_{0,\lambda} = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ резольвенту оператора L_0. Основной целью этого параграфа является изучение асимптотики $\frac{d^s}{dx^s} R_{0,\lambda} f$ при больших $|\lambda|$, когда $f(x) \in C^\alpha[0,1]$, где α, s целые и $0 \le \alpha, s \le n-1$.

1. Положим $\lambda = -\rho^n$ и $\rho \in S = \bigl\{\rho \mid \arg\rho \in \bigl[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\bigr]\bigr\}$. Сектор S разобьем на четыре равные части $S_j = \bigl\{\rho \mid \frac{\pi}{2n}(j-3) \le \arg\rho \le \frac{\pi}{2n}(j-2)\bigr\}$, $j = \overline{1,4}$, и для определенности будем считать, что $\rho \in S_3$. Пусть $\{\omega_k\}_1^n$ — корни n-й степени из -1, занумерованные следующим образом:

$$\operatorname{Re}\rho\omega_1 \ge \operatorname{Re}\rho\omega_2 \ge \cdots \ge \operatorname{Re}\rho\omega_\nu \ge 0 \ge \operatorname{Re}\rho\omega_{\nu+1} \ge \cdots \ge \operatorname{Re}\rho\omega_n.$$

Положим $y_k(x,\rho) = \exp\rho\omega_k x$, $z_k(t,\rho) = -\frac{\omega_k}{n\rho^{n-1}} \exp(-\rho\omega_k t)$,

$$g(x,t,\rho) = -\varepsilon(t,x) \sum_{k=1}^{\nu} y_k(x,\rho) z_k(t,\rho) + \varepsilon(x,t) \sum_{k=\nu+1}^{n} y_k(x,\rho) z_k(t,\rho),$$

$\varepsilon(x,t) = 1$ при $t \le x$, $\varepsilon(x,t) = 0$ при $t > x$.

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$R_{0,\lambda} f = -Y(x,\rho) M^{-1}(\rho)(V(g), f) + \int_0^1 g(x,t,\rho) f(t) dt, \tag{4}$$

где $Y(x,\rho) = (y_1(x,\rho), \ldots, y_n(x,\rho))$, $M(\rho) = (V_{jk})_1^n$, $V_{jk} = V_j(y_k)$, $(V(g), f) = ((V_1(g), f), \ldots, (V_n(g), f))^T$; $V_j(g)$ означает результат применения V_j к функции $g(x,t,\rho)$ по переменной x, T — знак транспонирования.

Доказательство. Так как $\int\limits_0^1 g(x,t,\rho)f(t)dt$ удовлетворяет уравнению $y^{(n)}+\rho^n y=f$, то

$$R_{0,\lambda}f = Y(x,\rho)C + \int_0^1 g(x,t,\rho)f(t)dt, \qquad (5)$$

где $C=(c_1,\dots,c_n)^T$ – постоянный вектор. Подчиняя $R_{0,\lambda}f$ условиям (2), имеем

$$0 = M(\rho)C + \int_0^1 V(g)f(t)dt.$$

Находя отсюда C и подставляя в (5), получим (4). □

Следствие. При $s=0,\dots,n-1$ имеют место формулы

$$\frac{d^s}{dx^s}R_{0,\lambda}f = -Y^{(s)}(x,\rho)M^{-1}(\rho)(V(g),f) + \int_0^1 g^{(s)}_{x^s}(x,t,\rho)f(t)\,dt.$$

Обозначим $U_j(y_k) = A_{jk} + B_{jk}\exp\rho\omega_k$, где $A_{jk} = \sum\limits_{\mu=0}^{\sigma_j} a_{j\mu}(\rho\omega_k)^\mu$, $B_{jk} = \sum\limits_{\mu=0}^{\sigma_j} b_{j\mu}(\rho\omega_k)^\mu$. Далее $(y_k(x,\rho),\varphi_j) = C_{jk}\exp\rho\omega_k$ при $k\le\nu$ и $(y_k(x,\rho),\varphi_j) = C_{jk}$ при $k\ge\nu+1$. Тогда очевидно

$$\begin{aligned} V_j(y_k) &= A_{jk} + \widetilde{B}_{jk}\exp\rho\omega_k, \quad k=1,\dots,\nu,\\ V_j(y_k) &= \widetilde{A}_{jk} + B_{jk}\exp\rho\omega_k, \quad k=\nu+1,\dots,n, \end{aligned}$$

где $\widetilde{A}_{jk} = A_{jk} - C_{jk}$, $\widetilde{B}_{jk} = B_{jk} - C_{jk}$.

Лемма 2. *Имеют место формулы*

$$\frac{d^s}{ds^s}R_{0,\lambda}f = \sum_{m=1}^n K_{ms}\exp\rho\omega_m x + \int_0^1 g^{(s)}_{x^s}(x,t,\rho)f(t)dt, \quad s=0,\dots,n-1, \qquad (6)$$

где $K_{ms} = -\frac{(\rho\omega_m)^s}{\Delta}\Big(-\sum\limits_{k=1}^{\nu} P^A_{km}(z_k,f) + \sum\limits_{k=\nu+1}^{n} P^B_{km}(z_k,f)\exp\rho\omega_k - Q_m\Big)$, $\Delta=\Delta(\rho)=\det M(\rho)$, $P^L_{km} = \sum\limits_{j=1}^n L_{jk}\Delta_{jm}$, $L=(L_{jk})_1^n$, Δ_{jm} *— алгебраическое дополнение элемента определителя* Δ*, стоящего в* j*-й строке и* m*-м столбце,*

$$Q_m = \sum_{j=1}^n \Delta_{jm}\int_0^1\int_0^1 g(x,t,\rho)\varphi_j(x)f(t)dx\,dt.$$

Доказательство. Имеем $M^{-1}(\rho) = (X_{mj})_1^n$, где $X_{mj} = \frac{\Delta_{jm}}{\Delta}$. Тогда $M^{-1}(\rho)(V(g),f) = (D_1,\dots,D_n)^T$, где $D_m = \sum\limits_{j=1}^n X_{mj}(V_j(g),f)$. Но

$$V_j(g) = -\sum_{k=1}^{\nu} A_{jk}z_k(t,\rho) + \sum_{k=\nu+1}^{n} B_{jk}z_k(t,\rho)\exp\rho\omega_k - \int_0^1 g(x,t,\rho)\varphi_j(x)dx.$$

Отсюда

$$(V_j(g),f) = -\sum_{k=1}^{\nu} A_{jk}(z_k,f) + \sum_{k=\nu+1}^{n} B_{jk}(z_k,f)\exp\rho\omega_k - \int_0^1\int_0^1 g(x,t,\rho)\varphi_j(x)f(t)dx\,dt.$$

Значит,

$$Y^{(s)}(x,\rho)M^{-1}(\rho)(V(g),f)=$$
$$=\sum_{m=1}^{n}(\rho\omega_m)^s D_m \exp\rho\omega_m x=\sum_{m=1}^{n}(\rho\omega_m)^s\sum_{j=1}^{n}X_{mj}(V_j(g),f)\exp\rho\omega_m x=$$
$$=\frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{n}(\rho\omega_m)^s\Big(-\sum_{k=1}^{\nu}(z_k,f)\sum_{j=1}^{n}A_{jk}\Delta_{jm}+\sum_{k=\nu+1}^{n}(z_k,f)\sum_{j=1}^{n}B_{jk}\Delta_{jm}\exp\rho\omega_k-$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\Delta_{jm}\int_0^1\int_0^1 g(x,t,\rho)\varphi_j(x)f(t)dx\,dt\Big)\exp\rho\omega_m x,$$

и утверждение леммы вытекает из следствия леммы 1. $\square$

2. Формулы (6) будут использоваться для получения асимптотики $\frac{d^s}{dx^s}R_{0,\lambda}f$ при больших $|\lambda|$ и $f(x)\in C^\alpha[0,1]$. В этом пункте получим асимптотики отдельных компонент формул (6).

В дальнейшем будем считать $n=4n_0+3$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Обозначим через $\gamma(\rho)$ функции, допускающие оценку

$$\gamma(\rho)=O(\rho^{-n})+O(\rho^{-n+1}\varkappa(\rho)), \tag{7}$$

где $\varkappa(\rho)=\frac{1-\exp(-\operatorname{Re}\rho\omega_\nu)}{Re\,\rho\omega_\nu}$. Если $\gamma(\rho)$ зависит еще и от других аргументов, то оценка (7) равномерна относительно них. Обозначим $\gamma_0(\rho)=O(\exp(-h|\rho|))$, где $h>0$ и свое для каждой $\gamma_0(\rho)$.

Лемма 3. *Для определителя $\Delta(\rho)=\det M(\rho)$ справедлива асимптотическая формула*

$$\Delta(\rho)=\{P_1+P_2\exp(-\rho\omega_\nu)+\gamma_0(\rho)\}\exp\rho\Omega, \tag{8}$$
$$P_1=\begin{vmatrix}\widetilde B_{11}\dots\widetilde B_{1\nu}\widetilde A_{1,\nu+1}\dots\widetilde A_{1n}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \widetilde B_{n1}\dots\widetilde B_{n\nu}\widetilde A_{n,\nu+1}\dots\widetilde A_{nn}\end{vmatrix},\quad P_2=\begin{vmatrix}\widetilde B_{11}\dots\widetilde B_{1,\nu-1}A_{1\nu}\widetilde A_{1,\nu+1}\dots\widetilde A_{1n}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \widetilde B_{n1}\dots\widetilde B_{n,\nu-1}A_{n\nu}\widetilde A_{n,\nu+1}\dots\widetilde A_{nn}\end{vmatrix},$$

где $\Omega=\sum\limits_{k=1}^{\nu}\omega_k$.

Утверждение леммы получается из разложения $\Delta(\rho)$ в сумму определителей, последующего вынесения множителей $\exp\rho\omega_k$ и рассмотрения каждого слагаемого в отдельности.

Введем определители: $P_1^L(k,m)$ (соответственно $P_2^L(k,m)$) получается из P_1 (соответственно P_2) заменой m-го столбца на k-й столбец матрицы L; $P_i^f(m)$ имеют тот же смысл, что и $P_i^L(k,m)$, но m-й столбец в этом случае заменяется на столбец с элементами (f,φ_j), $j=1,\dots,n$. Обозначим $\widetilde\omega_m=\omega_m$ при $m=1,\dots,\nu$ и $\widetilde\omega_m=0$ при $m=\nu+1,\dots,n$. Положим $F_k(l)=\sum\limits_{j=0}^{\alpha-1}(\rho\omega_k)^{-j}f^{(j)}(l)$, где $l=0,1$.

Лемма 4. *Имеют место асимптотические формулы*

$$P_{km}^L=(P_1^L(k,m)+P_2^L(k,m)\exp(-\rho\omega_\nu)+\gamma_0(\rho))\exp\rho(\Omega-\widetilde\omega_m), \tag{9}$$
$$P_m^f=\sum_{j=1}^{n}(f,\varphi_j)\Delta_{jm}=(P_1^f(m)+P_2^f(m)\exp(-\rho\omega_\nu)+\gamma_0(\rho))\exp\rho(\Omega-\widetilde\omega_m),$$

где L — одна из матриц $A=(A_{jk})_1^n$, $B=(B_{jk})_1^n$, $C=(C_{jk})_1^n$.

Доказательство. Выражение P_{km}^A представляет собой определитель, получающийся из $\Delta(\rho)$ заменой m-го столбца на столбец $(A_{1k},\dots,A_{nk})^T$. Поэтому формулы (9) при $L=A$ получаются аналогично (8). Аналогично рассматриваются и остальные случаи. $\square$

Очевидной является

Лемма 5. *Имеют место оценки*

$$(y_k,\varphi_j)=\int_0^1 y_k(x,\rho)\varphi_j(x)\,dx=\gamma(\rho)\rho^{n-1}\exp\rho\widetilde{\omega}_k,\quad k,j=1,\dots,n.$$

Лемма 6. *Пусть $f(x)\in C^\alpha[0,1]$ при целом α, $0\le\alpha\le n-1$. Тогда*

$$(z_k,f)=-\frac{1}{n\rho^n}F_k(0)+\gamma(\rho)\rho^{-\alpha}\|f\|,\quad k=1,\dots,\nu-1,$$
$$(z_\nu,f)=-\frac{1}{n\rho^n}[F_\nu(0)-F_\nu(1)\exp(-\rho\omega_\nu)]+\gamma(\rho)\rho^{-\alpha}\|f\|,$$
$$(z_k,f)=\left[\frac{1}{n\rho^n}F_\nu(1)+\gamma(\rho)\rho^{-\alpha}\|f\|\right]\exp(-\rho\omega_k),\quad k=\nu+1,\dots,n.$$

Здесь и в дальнейшем $\|f\|$ — норма $f(x)$ в пространстве $C^\alpha[0,1]$.

Доказательство получается интегрированием по частям с последующей оценкой некоторых слагаемых.

Обозначим через $S(\delta)$ область, получающуюся из сектора S после удаления круговых δ-окрестностей точек $\rho_k=\sqrt[n]{-\lambda_k}$, $k=1,2,\dots$, где λ_k — собственные значения оператора L, δ — достаточно малое положительное число. Пусть $S_j(\delta)=S(\delta)\cup S_j$, $j=\overline{1,4}$. Тогда при $\rho\in S(\delta)$ и выполнении д), как и в ([2], сс. 95, 96), имеем оценку

$$\Delta^{-1}(\rho)=O(\rho^{-\sigma}\exp(-\rho\Omega)). \tag{10}$$

Лемма 7. *Если $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы 6, то при $\rho\in S_3(\delta)$ имеет место представление*

$$I_s=\int_0^1 g^{(s)}_{x^s}(x,t,\rho)f(t)\,dt=\frac{f_1^{(s)}(x)}{\rho^n}+\sum_{m=1}^n T_{ms}\exp\rho\omega_m x+\gamma(\rho)\rho^{s-\alpha}\|f\|,$$

где $f_1(x)=f(x)$, если $s\le\alpha-1$, $f_1(x)\equiv0$, если $s\ge\alpha$, $T_{ms}=-\frac{(\rho\omega_m)^s}{n\rho^n\Delta}[P_1+P_2\exp(-\rho\omega_\nu)]F_m(l)\times$ $\exp\rho(\Omega-\widetilde{\omega}_m)$, $l=0$ при $m\ge\nu+1$, $l=1$ при $m\le\nu$.

Доказательство. Интегрируя по частям α раз, имеем

$$I_s=\int_0^x+\int_x^1=\frac{1}{n\rho^{n-s}}\Big\{\sum_{k=\nu+1}^n\sum_{j=0}^{\alpha-1}\frac{1}{\rho^j}\omega_k^{s-j}f^{(j)}(x)-\sum_{k=\nu+1}^n\sum_{j=0}^{\alpha-1}\frac{1}{\rho^j}\omega_k^{s-j}f^{(j)}(0)\exp\rho\omega_k x-$$
$$-\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{j=0}^{\alpha-1}\frac{1}{\rho^j}\omega_k^{s-j}f^{(j)}(1)\exp\rho\omega_k(x-1)+\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{j=0}^{\alpha-1}\frac{1}{\rho^j}\omega_k^{s-j}f^{(j)}(x)\Big\}+\gamma(\rho)\rho^{s-\alpha}\|f\|.$$

Сгруппируем слагаемые, не содержащие экспонент, а затем в получившейся двойной сумме поменяем порядок суммирования.

Тогда с учетом определения $F_k(l)$

$$I_s=\frac{1}{n\rho^{n-s}}\Big\{\sum_{j=0}^{\alpha-1}\frac{1}{\rho^j}\Big(\sum_{k=1}^n\omega_k^{s-j}\Big)f^{(j)}(x)-\sum_{k=\nu+1}^n\omega_k^sF_k(0)\exp\rho\omega_k x-$$
$$-\sum_{k=1}^{\nu}\omega_k^sF_k(1)\exp\rho\omega_k(x-1)\Big\}+\gamma(\rho)\rho^{s-\alpha}\|f\|. \tag{11}$$

Но $\sum\limits_{k=1}^n\omega_k^{s-j}=n\delta_{sj}$, где δ_{sj} — символ Кронекера. Поэтому двойная сумма в (11) равна нулю, если $s\ge\alpha$, и равна $\frac{nf^{(s)}(x)}{\rho^s}$, если $s\le\alpha-1$. Учитывая, что в силу (8) выполнено равенство $1=\frac{P_1+P_2\exp(-\rho\omega_\nu)}{\Delta}\exp\rho\Omega+\gamma_0(\rho)$, получаем требуемое. □

Следствие. Если $f(x) \in C^\alpha[0,1]$, $0 \le \alpha \le n-1$, то

$$\int_0^1 \int_0^1 g(x,t,\rho)\varphi_j(t) f(x) dt\, dx =$$
$$= \frac{1}{n\rho^n}\Big[n(f,\varphi_j) - \sum_{k=\nu+1}^n c_{jk}F_k(0) - \sum_{k=1}^{\nu} c_{jk}F_k(1)\Big] + \gamma(\rho)\rho^{-\alpha}\|f\|. \quad (12)$$

Эта формула получается из (11) при $s=0$.

Лемма 8. *Пусть $f(x)$ и Q_m те же, что и в леммах 2 и 6. Тогда*

$$Q_m = \frac{1}{\rho^n}\Big\{P_1^f(m) + P_2^f(m)\exp(-\rho\omega_\nu) - \frac{1}{n}\Big[\sum_{k=\nu+1}^n F_k(0)(P_1^{\mathrm{C}}(k,m) +$$
$$+ P_2^{\mathrm{C}}(k,m)\exp(-\rho\omega_\nu)) + \sum_{k=1}^{\nu} F_k(1)(P_1^{\mathrm{C}}(k,m) + P_2^{\mathrm{C}}(k,m)\exp(-\rho\omega_\nu))\Big] +$$
$$+ \gamma(\rho)\rho^{\sigma-\alpha}\|f\|\Big\}\exp\rho(\Omega - \widetilde{\omega}_m). \quad (13)$$

Доказательство. В силу (12) имеем

$$Q_m = \frac{1}{\rho^n}\Big\{P_m^f - \frac{1}{n}\sum_{k=\nu+1}^n P_{km}^{\mathrm{C}}F_k(0) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\nu} P_{km}^{\mathrm{C}}F_k(1) + \sum_{s=1}^n \Delta_{sm}\gamma(\rho)\rho^{-\alpha}\|f\|\Big\}.$$

Но $\Delta_{sm} = O(\rho^\sigma \exp\rho(\Omega - \widetilde{\omega}_m))$. Поэтому по лемме 4 получаем (13). $\square$

Лемма 9. *Имеют место формулы*

$$\sum_{k=1}^n \omega_k^{-s}A_{jk} = \begin{cases} na_{js}\rho^s, & \sigma_j \ge s; \\ 0, & \sigma_j < s, \end{cases} \quad \sum_{k=1}^n \omega_k^{-s}B_{jk} = \begin{cases} nb_{js}\rho^s, & \sigma_j \ge s; \\ 0, & \sigma_j < s. \end{cases} \quad (14)$$

Доказательство. Так как $\sum\limits_{k=1}^n \omega_k^{-s}A_{jk} = \sum\limits_{k=1}^n \omega_k^{-s}\sum\limits_{\mu=0}^{\sigma_j} a_{j\mu}\omega_k^\mu\rho^\mu = \sum\limits_{\mu=0}^{\sigma_j} a_{j\mu}\rho^\mu \sum\limits_{k=1}^n \omega_k^{\mu-s}$ и $\sum\limits_{k=1}^n \omega_k^{s-j} = n\delta_{sj}$, то отсюда получаем первую из формул (14). Вторая получается аналогично. $\square$

3. Проведем необходимое исследование $\frac{d^s}{dx^s}R_{0,\lambda}f$, когда $f(x) \in C^\alpha[0,1]$ при $0 \le \alpha \le n-1$.

Лемма 10. *Если $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы 6, то при $\rho \in S_3(\delta)$*

$$\frac{d^s}{dx^s}R_{0,\lambda}f = \sum_{m=1}^n (K_{ms} + T_{ms})\exp\rho\omega_m x + \frac{f_1^{(s)}(x)}{\rho^n} + \gamma(\rho)\rho^{s-\alpha}\|f\|.$$

Утверждение леммы вытекает из лемм 2 и 7 с учетом оценки (10).

Лемма 11. *Если $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы 6, то*

$$K_{ms} + T_{ms} = -\frac{(\rho\omega_m)^s}{n\rho^n\Delta}\{Z_{1m} + P_1F_m(1) + (Z_{2m} + P_2F_m(1))\exp(-\rho\omega_\nu)\} \times$$
$$\times \exp\rho(\Omega - \widetilde{\omega}_m) + \gamma(\rho)\rho^{s-\alpha}\|f\|\exp(-\rho\widetilde{\omega}_m), \quad (15)$$

где

$$Z_{1m}=\sum_{k=1}^{\nu}P_1^A(k,m)F_k(0)+\sum_{k=\nu+1}^{n}P_1^B(k,m)F_k(1)-nP_1^f(m)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\nu}P_1^C(k,m)F_k(1)+\sum_{k=\nu+1}^{n}P_1^C(k,m)F_k(0),$$

$$Z_{2m}=\sum_{k=1}^{\nu-1}P_2^A(k,m)F_k(0)-P_1^A(\nu,m)F_\nu(1)+\sum_{k=\nu+1}^{n}P_2^B(k,m)F_k(1)-nP_2^f(m)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\nu}P_2^C(k,m)F_k(1)+\sum_{k=\nu+1}^{n}P_2^C(k,m)F_k(0).$$

Доказательство. В силу лемм 4–6, 8

$$K_{ms}=-\frac{(\rho\omega_m)^s}{n\rho^n\Delta}\Big\{\sum_{k=1}^{\nu-1}[P_1^A(k,m)+P_2^A(k,m)\exp(-\rho\omega_\nu)]F_k(0)+P_1^A(\nu,m)\times$$

$$\times[F_\nu(0)-F_\nu(1)\exp(-\rho\omega_\nu)]+\sum_{k=\nu+1}^{n}[P_1^B(k,m)+P_2^B(k,m)\exp(-\rho\omega_\nu)]F_k(1)-$$

$$-n[P_1^f(m)+P_2^f(m)\exp(-\rho\omega_\nu)]+\sum_{k=1}^{\nu}[P_1^C(k,m)+P_2^C(k,m)\exp(-\rho\omega_\nu)]F_k(1)+$$

$$+\sum_{k=\nu+1}^{n}[P_1^C(k,m)+P_2^C(k,m)\exp(-\rho\omega_\nu)]F_k(0)+\gamma(\rho)\rho^{n+\sigma-\alpha}\|f\|\Big\}\exp\rho(\Omega-\widetilde{\omega}_m).$$

Отсюда, группируя отдельно слагаемые, не содержащие $\exp(-\rho\omega_\nu)$ и содержащие ее, придем к (15). □

Положим $V_j^\alpha(f)=\sum\limits_{\mu=0}^{\alpha-1}(a_{j\mu}f^{(\mu)}(0)+b_{j\mu}f^{(\mu)}(1))-(f,\varphi_j)$, если $\sigma_j\geq\alpha$, $V_j^\alpha(f)=V_j(f)$, если $\sigma_j\leq\alpha-1$.

Лемма 12. *Если $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы 6, то при $\rho\in S_3(\delta)$ выполняется равенство*

$$K_{ms}+T_{ms}=-\frac{(\rho\omega_m)^s}{\rho^n\Delta}\{P_1^{V^\alpha}(m)+P_2^{V^\alpha}(m)\exp(-\rho\omega_\nu)+\gamma(\rho)\rho^{n+\sigma-\alpha}\|f\|\}\times$$

$$\times\exp\rho(\Omega-\widetilde{\omega}_m),\quad m=1,2,\ldots,n;\quad s=0,1,\ldots,n-1,$$

где $P_1^{V^\alpha}(m)$ ($P_2^{V^\alpha}(m)$) получается из $P_1(m)$ ($P_2(m)$) заменой m-го столбца на столбец $(V_1^\alpha(f),\ldots,V_n^\alpha(f))^T$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $1\leq m\leq\nu-1$.

Приведем $Z_{2m}+P_2F_m(1)$ к виду $\sum\limits_{j=0}^{\alpha-1}\rho^{-j}D_j-nP_2^f(m)$, где

$$D_j=\sum_{k=1}^{\nu-1}\omega_k^{-j}P_2^A(k,m)f^{(j)}(0)-\omega_\nu^{-j}P_1^A(\nu,m)f^{(j)}(1)+\sum_{k=\nu+1}^{n}\omega_k^{-j}P_2^B(k,m)f^{(j)}(1)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\nu}\omega_k^{-j}P_2^C(k,m)f^{(j)}(1)+\sum_{k=\nu+1}^{n}\omega_k^{-j}P_2^C(k,m)f^{(j)}(0)+P_2F_m(1).$$

Учитывая, что $P_1^A(\nu,m) = -P_2^{\tilde B}(\nu,m)$, где $P_2^{\tilde B}(\nu,m)$ — определитель, получающийся в результате замены m-го столбца в $P_2^A(\nu,m)$ на столбец $(\widetilde B_{1m},\dots,\widetilde B_{nm})^T$, замечаем, что все определители, входящие в D_j, отличаются от P_2 лишь m-м столбцом. Поэтому $D_j = P_2^d(m)$, где $P_2^d(m)$ — определитель, получающийся из P_2 заменой m-го столбца на столбец $d = (d_1,\dots,d_n)^T$, где

$$d_l = \Big(\sum_{k=1}^{\nu-1}\omega_k^{-j}A_{lk}\Big)f^{(j)}(0) + \omega_\nu^{-j}\widetilde B_{l\nu}f^{(j)}(1) + \Big(\sum_{k=\nu+1}^{n}\omega_k^{-j}B_{lk}\Big)f^{(j)}(1) + \\ + \Big(\sum_{k=1}^{\nu}\omega_k^{-j}C_{lk}\Big)f^{(j)}(1) + \Big(\sum_{k=\nu+1}^{n}\omega_k^{-j}C_{lk}\Big)f^{(j)}(0) + \omega_m^{-j}\widetilde B_{lm}f^{(j)}(1).$$

Прибавим к m-му столбцу определителя $P_2^d(m)$ столбцы с номерами $k=\nu,\dots,n$, умноженные соответственно на $\omega_k^{-j}f^{(j)}(0)$, и столбцы с номерами $k=1,\dots,m-1,m+1,\dots,\nu-1$, умноженные соответственно на $\omega_k^{-j}f^{(j)}(1)$. В результате получим определитель $P_2^{\tilde d}(m)$, m-й столбец которого $\tilde d = (\tilde d_1,\dots,\tilde d_n)^T$ после замен $\widetilde A_{jk} = A_{jk} - C_{jk}$, $\widetilde B_{jk} = B_{jk} - C_{jk}$ приводится к виду, когда $\tilde d_l = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k^{-j}A_{lk}\Big)f^{(j)}(0) + \Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k^{-j}A_{lk}\Big)f^{(j)}(1)$, $l=1,\dots,n$. Из леммы 9 имеем $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k^{-j}A_{lk} = n\tilde a_{lj}\rho^j$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k^{-j}B_{lk} = n\tilde b_{lj}\rho^j$, где $\tilde a_{lj} = a_{lj}$, $\tilde b_{lj} = b_{lj}$, если $j \le \sigma_l$, $\tilde a_{lj} = \tilde b_{lj} = 0$, если $j > \sigma_l$. Поэтому $Z_{2m} + P_2F_m(1) = \sum\limits_{j=0}^{\alpha-1}\rho^{-j}D_j - nP_2^f(m) = P_2^\gamma(m)$, где $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n)^T$, $\gamma_l = n\Big(\sum\limits_{j=0}^{\alpha-1}[\tilde a_{lj}f^{(j)}(0) + \tilde b_{lj}f^{(j)}(1)] - (f,\varphi_l)\Big)$. Из определения $V_l^\alpha(f)$ следует $\gamma_l = nV_l^\alpha(f)$. Поэтому $Z_{2m} + P_2F_m(1) = nP_2^{V^\alpha}(m)$. Аналогично доказывается, что $Z_{1m} + P_1F_m(1) = nP_1^{V^\alpha}(m)$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Теперь утверждение леммы вытекает из леммы 11. □

Теорема 3. *Если $f(x) \in C^\alpha[0,1]$, где α целое, $0 \le \alpha \le n-1$, то при $\rho \in S(\delta)$*

$$\frac{d^s}{dx^s}R_{0,\lambda}f = \frac{f_1^{(s)}(x)}{\rho^n} - \frac{1}{\rho^n\Delta(\rho)}\Big\{\sum_{m=1}^{\nu}(\rho\omega_m)^s[P_1^{V^\alpha}(m) + P_2^{V^\alpha}(m)\exp(-\rho\omega_\nu)]\times \\ \times\exp\rho(\Omega - \omega_m(1-x)) + \sum_{m=\nu+1}^{n}(\rho\omega_m)^s[P_1^{V^\alpha}(m) + P_2^{V^\alpha}(m)\exp(-\rho\omega_\nu)]\times \\ \times\exp\rho(\Omega + \omega_m x)\Big\} + \rho^{s-\alpha}\gamma(\rho)\|f\|, \quad s = 0,1,\dots,n-1,$$

где $f_1(x) = f(x)$, если $s \le \alpha-1$, $f_1(x) \equiv 0$, если $s \ge \alpha$.

Утверждение теоремы вытекает из лемм 10 и 12.

Следствие. Если $f(x) \in C^\alpha[0,1]$ и удовлетворяет тем из условий (2), для которых $\sigma_j \le \alpha-1$, то при $\rho \in S(\delta)$ и $s = 0,\dots,n-1$ справедливы оценки $D_x^sR_{0,\lambda}f = O\big(\frac{1}{\rho^n}\|f\|\big)$ при $s \le \alpha-1$, $D_x^sR_{0,\lambda}f = \rho^{s-\alpha}\gamma(\rho)\|f\|$ при $s \ge \alpha$. Для доказательства этих оценок достаточно в представлении $\frac{d^S}{dx^S}R_{0,\lambda}f$ разложить определители $P_i^{V^\alpha}(m)$, $i=1,2$, по элементам m-го столбца и воспользоваться оценкой (10).

2. Замыкание области определения оператора L_0 в пространстве $C^\alpha[0,1]$

Пусть, как и в предыдущем параграфе, α целое, $0 \le \alpha \le n-1$. Обозначим через n_α наименьшее из j, для которых $\sigma_j \le \alpha$, и через D^0 — множество функций из $C^\alpha[0,1]$, удовлетворяющих условиям $V_j(y) = 0$, $j = n_\alpha,\dots,n$.

Лемма 13. *Если $f(x) \in D^0$, то существует такая последовательность функций $\{y_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$, что 1) $y_m(x) \in C^n[0,1]$; 2) $V_j(y_m) = 0$, $j = n_\alpha, \ldots, n$; 3) $y_m(x) \to f(x)$ по норме $C^\alpha[0,1]$.*

Доказательство. Пусть $\{p_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность алгебраических многочленов, сходящаяся к $f(x)$ в $C^\alpha[0,1]$. Тогда имеем $V_j(p_m) \to 0$ $(j = n_\alpha, \ldots, n)$ при $m \to \infty$. Обозначим через $\{\psi_i(x)\}_{i=n_\alpha}^{n}$ произвольный набор функций из $C^n[0,1]$, для которых $U_j(\psi_i) = \delta_{ij}$ при $j \ge i$. Докажем, что такие функции существуют. Пусть в форме $U_i(y)$ для определенности $a_{i\sigma_i} \neq 0$. В этом случае в качестве $\psi_i(x)$ можно взять интерполяционный алгебраический полином, подчиненный условиям $\psi_i^{(s)}(0) = 0$, $s = 0, \ldots, \sigma_i - 1$, $\psi_i^{(\sigma_i)}(0) = a_{i\sigma_i}^{-1}$, $\psi_i^{(s)}(1) = 0$, $s = 0, \ldots, \sigma_i$. Обозначим через $h_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, такие функции из $C^n[0,1]$, что

1) $h_\nu(x) \equiv 1$, $x \in [0, \frac{1}{2\nu}] \cup [1 - \frac{1}{2\nu}, 1]$;

2) $h_\nu(x) \equiv 0$, $x \in [\frac{1}{\nu}, 1 - \frac{1}{\nu}]$;

3) $0 \le h_\nu(x) \le 1$ при $x \in [\frac{1}{2\nu}, \frac{1}{\nu}] \cup [1 - \frac{1}{\nu}, 1 - \frac{1}{2\nu}]$.

Положим $\psi_{i\nu}(x) = \psi_i(x) h_\nu(x)$. Тогда $(\psi_{i,\nu}, \varphi_j) = o(1)$ при $\nu \to \infty$ и $U_j(\psi_{i\nu}) = U_j(\psi_i)$. Значит, $V_j(\psi_{i\nu}) = U_j(\psi_i) + o(1)$ при $\nu \to \infty$.Будем искать требуемую последовательность в виде $y_m(x) = p_m(x) - \sum\limits_{i=n_\alpha}^{n} c_{im} \psi_{i\nu}(x)$, где $\nu = \nu(m)$ будут выбраны ниже. Для определения c_{im} имеем систему

$$\sum_{i=n_\alpha}^{n} c_{im}(U_j(\psi_i) + o(1)) = V_j(p_m), \quad j = n_\alpha, \ldots, n. \tag{16}$$

Матрица $\|U_j(\psi_i)\|_{j,i=n_\alpha}^{n}$ является треугольной, на ее главной диагонали стоят единицы, а ниже главной диагонали — нули. Следовательно, $\det \|U_j(\psi_i)\|_{n_\alpha}^{n} = 1$, и потому при достаточно больших ν модуль определителя системы (16) не меньше $1/2$. Одно из таких ν возьмем в виде $\nu = \nu(m)$. Тогда, т.к. $V_j(p_m) = o(1)$ при $m \to \infty$, получаем $c_{im} = o(1)$ при $m \to \infty$. □

Обозначим $D_i = \{y(x) \in C^n[0,1] \mid V_j(y) = 0,\ j = i, i+1, \ldots, n\}$, $i = 1, 2, \ldots, n_\alpha$, и через $\overline{D}_i$ — замыкание D_i по норме $C^\alpha[0,1]$.

Лемма 14. *При $i = 2, \ldots, n_\alpha$ справедливы включения $D_i \subset \overline{D}_{i-1}$.*

Доказательство. Пусть i — фиксированное число среди $2, \ldots, n_\alpha$ и $f(x) \in D_i$. Построим последовательность $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ такую, что $f_m(x) \in D_{i-1}$ и $f_m(x) \to f(x)$ в $C^\alpha[0,1]$, следующим образом.

Обозначим

$$\psi_{i-1,m}(x) = \frac{(1-x)^{\sigma_{i-1}+1} \sin^{\sigma_{i-1}}(mx)}{\sigma_{i-1}! m^{\sigma_{i-1}}}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Тогда $\psi_{i-1,m}^{(\sigma_{i-1})}(0) = 1$, $\psi_{i-1,m}^{(\sigma_{i-1})}(1) = 0$, $\psi_{i-1,m}^{(j)}(0) = \psi_{i-1,m}^{(j)}(1) = 0$ при $j = 0, \ldots, \sigma_{i-1} - 1$ и $\psi_{i-1,m}(x) \to 0$ при $m \to \infty$ по норме $C^\alpha[0,1]$. Далее, пусть $\psi_s(x)$ $(s = i, \ldots, n)$, $\psi_{s\nu}(x) = \psi_s(x) h_\nu(x)$ те же, что и в лемме 13. Будем искать $f_m(x)$ в виде $f_m(x) = f(x) - c_{i-1,m}\psi_{i-1,m}\psi_{i-1,m}(x) - \sum\limits_{s=i}^{n} c_{sm}\psi_{s\nu}(x)$.

Обозначим $V_{i-1}(f) = a$. Тогда для определения c$_{sm}$ получаем систему

$$V_j(\psi_{i-1,m})\mathrm{c}_{i-1,m} + \sum_{s=i}^{n} V_j(\psi_{s\nu}) c_{sm} = a\delta_{i-1,j}, \quad j = i-1, \ldots, n. \tag{17}$$

Так как $V_{i-1}(\psi_{i-1,m}) = a_{i-1,\sigma_{i-1}} + o(1)$ при $m \to \infty$, то матрица V системы (17) на главной диагонали имеет элементы $a_{i-1,\sigma_{i-1}} + o(1), 1 + o(1), \ldots, 1 + o(1)$, где $1 + o(1) \to 1$ при $\nu \to \infty$. Под главной диагональю стоят элементы вида $o(1)$, причем в первом столбце $o(1) \to 0$ при $m \to \infty$, а в остальных столбцах $o(1) \to 0$ при $\nu \to \infty$. Выше главной диагонали элементы ограничены по m и ν. Поэтому для любого достаточно большого m можно указать такое $\nu = \nu(m)$, что $|\det V| \ge \frac{1}{2}|a_{i-1,\sigma_{i-1}}|$. Тогда из системы (17) получаем $c_{i-1,m} = O(1)$, $c_{sm} = o(1)$ $(s = i, \ldots, n)$ при $m \to \infty$. Отсюда заключаем, что $f_m(x) \to f(x)$ по норме $C^\alpha[0,1]$. □

Теорема 4. *Справедливо равенство* $\overline{D}_1 = D^0$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что D^0 замкнуто в $C^\alpha[0,1]$ и, значит, $\overline{D}_1 \subset D^0$. Возьмем $f(x) \in D^0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ по лемме 13 найдется функция $f_{n_\alpha} \in D_{n_\alpha}$ такая, что $\|f - f_{n_\alpha}\| < \varepsilon$. По лемме 14 существует система $\{f_i(x)\}_{i=1}^{n_\alpha - 1}$ такая, что $f_i(x) \in D_i$ и $\|f_i - f_{i-1}\| < \varepsilon$. Отсюда $\|f - f_1\| \le \|f - f_{n_\alpha}\| + \sum\limits_{i=2}^{n_\alpha - 1} \|f_i - f_{i-1}\| \le n_\alpha \varepsilon$. $\square$

Для случая $\alpha = 0$ и $\varphi_j(x) \equiv 0$, $j = 1, \dots, n$, эта теорема получена в [7].

3. Обобщенные средние Рисса

Напомним, что A^{-1} представляет собой интегро-дифференциальный оператор (1) с условиями (2). В [1] было показано, что если $U_j(y)$, $j = 1, \dots, n$, регулярны, то (1) можно привести к виду, когда $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$. Так как присутствие a_n в (1) несущественно в нижеследующих рассуждениях, то для простоты будем считать, что $a_n = 0$, т. е. в (1) будем полагать $a_1 = \dots = a_n = 0$. Пусть $g(\lambda, r)$ удовлетворяет условиям е)–д) из введения.

Лемма 15. *Пусть* $f(x) \in C^\alpha[0,1]$, *где* α *целое,* $0 \le \alpha \le n-1$, $f_0(x) \in D_1$ (D_1 *из предыдущего параграфа*). *Тогда для всякого* $r > 0$ *такого, что на окружности* $|\lambda| = r$ *нет характеристических чисел оператора* A, *справедливы формулы*

$$f^{(s)}(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\frac{d^s}{dx^s}R_\lambda f\,d\lambda = f^{(s)}(x)(1 - g(\mu,r)) + \\ + g(\mu,r)(f^{(s)}(x) - f_0^{(s)}(x)) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\frac{g(\lambda,r)}{\lambda-\mu}\frac{d^s}{dx^s}R_\lambda g_0\,d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\frac{d^s}{dx^s}R_\lambda(f - f_0)d\lambda, \quad s = 0,1,\dots,\alpha, \quad (18)$$

где $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A = (A^{-1} - \lambda E)^{-1}$, $g_0(x) = A^{-1}f_0 - \mu f_0 = (E+N)f_0^{(n)} - \mu f_0$, μ — *произвольное число, не являющееся характеристическим значением оператора* A.

Доказательство. Имеем $A^{-1}f_0 - \lambda f_0 = (\mu - \lambda)f_0 + g_0$. Так как f_0 удовлетворяет (2), то $R_\lambda f_0 = \frac{f_0}{\mu - \lambda} + \frac{1}{\lambda - \mu}R_\lambda g_0$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f_0\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda(f - f_0)d\lambda = \\ = -g(\mu,r)f_0 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{g(\lambda,r)}{\mu-\lambda}R_\lambda g_0\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda(f - f_0)d\lambda.$$

Отсюда получаем (18) при $s = 0$. Остальные соотношения в (18) получаются дифференцированием (18) при $s = 0$. $\square$

Теорема 5. *Пусть* $f(x) \in D^0$. *Тогда при* $\rho \in S_\delta$

$$\frac{d^s}{dx^s}R_\lambda f = \gamma(\rho)\|f\|, \quad s = 0,1,\dots,\alpha.$$

Доказательство. Положим $y(x,\lambda) = R_\lambda f$. Тогда имеем $(E + N)y^{(n)} - \lambda y = f(x)$. Отсюда, интегрируя по частям, получим

$$y^{(n)} - \lambda y = f(x) + N(x,0)y^{(n-1)}(0,\lambda) - N(x,1)y^{(n-1)}(1,\lambda) + N'_t y^{(n-1)}, \quad (19)$$

где $N'_t f = \int\limits_0^1 N'_t(x,t)f(t)dt$.

Применим к обеим частям (19) оператор $R_{0,\lambda}$

$$y(x,\lambda)=R_{0,\lambda}f(x)+y^{(n-1)}(0,\lambda)R_{0,\lambda}N(x,0)-y^{(n-1)}(0,\lambda)R_{0,\lambda}N(x,1)+R_{0,\lambda}N'_ty^{(n-1)}. \qquad (20)$$

Продифференцируем (20) $n-1$ раз

$$y^{(n-1)}(x,\lambda)=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}R_{0,\lambda}f(x)+y^{(n-1)}(0,\lambda)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}R_{0,\lambda}N(x,0)-$$
$$-y^{(n-1)}(1,\lambda)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}R_{0,\lambda}N(x,1)+\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}R_{0,\lambda}N'_ty^{(n-1)}. \qquad (21)$$

Известно [1], что если $f(x,t)$ непрерывна при $t\le x$ и $t\ge x$, то $\left\|\frac{d^s}{dx^s}R_{0,\lambda}f(x,t)\right\|_\infty=o(\frac{1}{\rho^{n-1-s}})$, $s=0,\dots,n-1$, при $|\rho|\to\infty$ равномерно по t ($\|\cdot\|_\infty$ — норма в $C[0,1]$). Поэтому из (21) с учетом следствия из теоремы 3 следует $y^{(n-1)}(x,\lambda)=\rho^{n-1-\alpha}\gamma(\rho)\|f\|+o(1)\|y^{(n-1)}\|_\infty$. Отсюда

$$\|y^{(n-1)}\|_\infty=\rho^{n-1-\alpha}\gamma(\rho)\|f\|. \qquad (22)$$

Теперь продифференцируем (20) s раз

$$y^{(s)}(x,\lambda)=\frac{d^s}{dx^s}R_{0,\lambda}f(x)+y^{(n-1)}(0,\lambda)\frac{d^s}{dx^s}R_{0,\lambda}N(x,0)-$$
$$-y^{(n-1)}(1,\lambda)\frac{d^s}{dx^s}R_{0,\lambda}N(x,1)+\frac{d^s}{dx^s}R_{0,\lambda}N'_ty^{(n-1)}.$$

Используя оценку (22), получим $y^{(s)}(x,\lambda)=\gamma(\rho)\|f\|+\rho^{n-1-\alpha}\gamma(\rho)\|f\|o(\frac{1}{\rho^{n-1-s}})$, т. е.

$$y^{(s)}(x,\lambda)=\gamma(\rho)\|f\|. \quad \square$$

Лемма 16. *Если $f(x)\in C[0,1]$ и $\rho\in S_\delta$, то*

$$\left\|\frac{d^k}{dx^k}R_{0,\lambda}f\right\|_\infty=\rho^k\gamma(\rho)\|f\|_\infty,\quad k=0,\dots,n-1.$$

Утверждение леммы фактически содержится в лемме 8 [1].

Лемма 17. *Если $f(x)\in C[0,1]$, то при $\rho\in S_\delta$*

$$\left\|\frac{d^k}{dx^k}R_{\lambda}f\right\|_\infty=\rho^k\gamma(\rho)\|f\|_\infty,\quad k=0,\dots,n-1.$$

Доказательство повторяет доказательство теоремы 5 с учетом леммы 16.

Доказательство теоремы 1. Необходимость очевидна.

Установим достаточность. Оценим $I_{rs}(f)=\int\limits_{|\lambda|=r}g(\lambda,r)\frac{d^s}{dx^s}R_\lambda f\,d\lambda$, когда $s=0,\dots,\alpha$ и $f\in D^0$. Выполним замену $\lambda=-\rho^n$, $-\frac{\pi}{n}\le\arg\rho\le\frac{\pi}{n}$. Тогда $I_{rs}(f)=-n\int\limits_{C_{r_1}}g(-\rho^n,r)\frac{d^s}{dx^s}R_{-\rho^n}f\rho^{n-1}\,ds$, где $r_1=\sqrt[n]{r}$, C_{r_1} — дуга окружности $|\rho|=r_1$, попавшая в сектор S. Представим $C_{r_1}=\bigcup\limits_{k=1}^4C_{r_1k}$, где C_{r_1k} — часть дуги C_{r_1}, лежащая в секторе S_k. Тогда $I_{rs}(f)=\sum\limits_{k=1}^4I_{rs}^{(k)}(f)$. Дадим оценку $I_{rs}^{(3)}$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Имеем по теореме 5

$$I_{rs}^{(3)}(f)=\|f\|r_1^{n-1}\Gamma_{r_1}, \qquad (23)$$

где $\Gamma_{r_1}=\int\limits_{C_{r_13}}|g(-\rho^n,r)|\gamma(\rho)|d\rho|$. Далее, имеем

$$\Gamma_{r_1}=O\Big(\int_{C_{r_13}}|g(-\rho^n,r)|\frac{1}{r_1^n}|d\rho|+\int_{C_{r_13}}|g(-\rho^n,r)|\frac{1}{r_1^{n-1}}\varkappa(\rho)|d\rho|\Big)=O(I_1+I_2).$$

Очевидно, $I_1 = O(\frac{1}{r_1^{n-1}})$. Оценим I_2. Положим $\rho = r_1 \exp i\varphi$. В нашем случае $\omega_\nu = \exp\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\pi i$. Поэтому

$$\varkappa(\rho) = \frac{1 - \exp(-r_1 \sin(\frac{\pi}{2n} - \varphi))}{r_1 \sin(\frac{\pi}{2n} - \varphi)} \leq \frac{\pi(1 - \exp(-r_1\tau))}{2r_1\tau},$$

где $\tau = \frac{\pi}{2n} - \varphi$, и, т. к. $g(-r\exp n\varphi, r) = O(\tau^h)$ при некотором $h > 0$, то

$$I_2 = O\left(\frac{1}{r_1^{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \tau^{h-1}(1 - \exp(-r_1\tau))d\tau\right) = O\left(\frac{r_1^h}{r_1^{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2n}r_1} \xi^{h-1}(1 - \exp(-\xi))d\xi\right) = O\left(\frac{1}{r_1^{n-1}}\right).$$

Таким образом, из (23) получаем оценку $I_{rs}^{(3)}(f) = O(\|f\|)$. Следовательно,

$$I_{rs}(f) = O(\|f\|). \tag{24}$$

Воспользуемся леммой 15. Пусть $f(x) \in D^0$, зададим $\varepsilon > 0$. По теореме 4 подберем такую $f_0(x) \in D_1$, что $\|f - f_0\| < \varepsilon$. Тогда правая часть (18) по лемме 17 и (24) допускает оценку

$$\|f\| \cdot |1 - g(\mu, r)| + \varepsilon |g(\mu, r)| + C(\varepsilon) r_1^{s-n} + C\varepsilon,$$

где $C(\varepsilon)$ зависит только от μ и ε, а C не зависит от r_1, μ, ε. Таким образом,

$$\left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f \, d\lambda \right\| = o(1)$$

при $r \to \infty$ и таких, что C_{r_1} целиком находятся в S_δ. $\square$

Доказательство теоремы 2. В [8] показано, что в рассматриваемом случае формы $U_j(y)$, $j = 1, \ldots, n$, регулярны по Биркгофу. Поэтому по теореме 1 соотношение (3) имеет место тогда и только тогда, когда $f(x) \in D^0 = \Delta_\alpha$. $\square$

Литература

1. Хромов А.П. *Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов* // Матем. сб. – 1981. – Т. 114. – № 3. – С. 378–405.
2. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1969. – 526 с.
3. Kaufmann F.-J. *Derived Birkhoff-series associated with $N(Y) = \lambda P(Y)$* // Results in Mathem. – 1989. – V. 15. – P. 255–290.
4. Stone M.H. *A comparison of the series of Fourier and Birkhoff* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1926. – V. 28. – P. 695–761.
5. Тихомиров В.В. *О риссовских средних разложений в тригонометрический ряд Фурье и по собственным функциям пучка М.В. Келдыша обыкновенных несамосопряженных дифференциальных операторов* // ДАН СССР. – 1976. – Т. 226. – № 5. – С. 1015–1017.
6. Тихомиров В.В. *О средних Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора* // Матем. сб. – 1977. – Т. 102. – № 1. – С. 33–55.
7. Хромова Г.В. *О регуляризации интегральных уравнений первого рода с ядром Грина* // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 8. – С. 94–104.
8. Корнев В.В., Хромов А.П. *О равносходимости операторных разложений самосопряженных интегральных операторов* // Современ. методы в теории краевых задач. Тр. Воронеж. весен. матем. школы “Понтрягинские чтения–XI”. – Воронеж, 3–9 мая 2000. – Ч. II. – С. 73–82.

Саратовский государственный университет

Поступила 19.03.2002