ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 9 (472)

УДК 517.95; 539.95

М.Ф. КУЛАГИНА

ПОСТРОЕНИЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

Задачи о распространении поверхностных волн идеальной жидкости рассмотрены в [1]. Там они решаются с помощью интегрального преобразования Фурье. Решения задач выражаются через обратное преобразование Фурье, которое представляет собой несобственный интеграл от колеблющихся функций, что вызывает большие вычислительные трудности.

В данной работе с помощью обобщенного дискретного преобразования Фурье, введенного и изученного автором в [2] и [3], строятся почти-периодические в смысле Бора решения ряда задач о распространении поверхностных волн. Эти решения получены в виде абсолютно сходящихся рядов Фурье, коэффициенты которых выражаются через заданные функции.

Почти-периодическим полиномом называется функция $p(t)$, $-\infty < t < +\infty$, являющаяся линейной комбинацией функций вида $\exp(i\lambda t)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Через Π_C обозначим замыкание по норме $L_\infty(-\infty,+\infty)$ множества всех почти-периодических полиномов. Множество Π_C является подалгеброй $L_\infty(-\infty,+\infty)$, состоящей из всех почти-периодических по Бору функций. Через Π_W обозначим подмножество Π_C, состоящее из функций $A(t) \in \Pi_C$ вида $A(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Множество Π_W является банаховой алгеброй [4].

Каждой функции $A(t)$ из Π_W поставим в соответствие функцию

$$a(\lambda) = M\{A(t)e^{-i\lambda t}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A(t)e^{-i\lambda t}dt. \tag{1}$$

Такая функция существует и может быть отличной от нуля не более чем для счетного множества значений $\lambda : \lambda_1, \lambda_2, \dots; a(\lambda_n) = a_n \neq 0$ [5]. Таким образом, каждой функции из Π_W поставим в соответствие функцию $a(\lambda)$ или последовательность пар $a(\lambda) = \{(a_1,\lambda_1),(a_2,\lambda_2),\dots\}$, $a_n \in \mathbf{C}$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

Если $A(t) \in \Pi_W$, то соответствующая этой функции последовательность $\{a_k\} \in l_1$ (будем говорить $a(\lambda) \in l_1$). И наоборот, для каждой функции $a(\lambda) \in l_1$ существует функция $A(t)$, для которой выполнено (1) и

$$A(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}. \tag{2}$$

Ряд сходится абсолютно и равномерно при $-\infty < t < \infty$. Следовательно, установлено взаимнооднозначное соответствие между функциями из Π_W и двумерными последовательностями $a(\lambda) \in l_1$. При этом мы считаем, что две последовательности $a(\lambda), b(\lambda) \in l_1$ совпадают, если им соответствуют одни и те же функции, т. е. последовательность $a(\lambda)$ не изменится, если к ней добавить счетное множество пар вида $(0,\lambda)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 01-01-00720.

Равенство (2), которым последовательности $a(\lambda) \in l_1$ ставится в соответствие функция $A(t) \in \Pi_W$, назовем обобщенным дискретным преобразованием Фурье (ОДФ). Равенство (1) производит обратное преобразование. ОДФ будем обозначать символом $A(t) = W_0 a(\lambda)$, $a(\lambda) = W_0^{-1} A(t)$.

Коэффициенты последовательности $a(\lambda)$ могут зависеть также от параметров, например, от x и y: $a(\lambda, x, y) = \{(a_1(x,y), \lambda_1); (a_2(x,y), \lambda_2), \dots\}$. Тогда, если существует последовательность положительных чисел $\{a_n\} \in l_1$ таких, что $|a_n(x,y)| \le \alpha_n$ для всех допустимых x и y, то $A(t,x,y) = W_0 a(\lambda, x, y) \in \Pi_W$ при любых фиксированных x и y. Этот факт будем записывать в виде $A(t,x,y) \in \Pi_W^{x,y}$.

Если функция $A(t,x,y)$ дифференцируема p раз по y и q раз по x и

$$\frac{\partial^j A(t,x,y)}{\partial y^j} \in \Pi_W^{x,y}, \quad j = \overline{1,p}; \qquad \frac{\partial^l A(t,x,y)}{\partial x^l} \in \Pi_W^{x,y}, \quad l = \overline{1,q},$$

то

$$W_0 \frac{\partial^p A(t,x,y)}{\partial y^p} = \frac{\partial^p a(\lambda,x,y)}{\partial y^p}; \quad W_0 \frac{\partial^q A(t,x,y)}{\partial x^q} = \frac{\partial^q a(\lambda,x,y)}{\partial x^q}. \tag{3}$$

В первой из рассматриваемых краевых задач предположим, что жидкость имеет бесконечную глубину $y \le 0$ и волны возникают под действием динамического давления на поверхности жидкости $y = 0$. Движение жидкости в этом случае можно описать при помощи потенциала скоростей φ. Как показано в [1], для определения потенциала надо решить следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad \text{при } y = 0, \tag{5}$$

$$\varphi = \frac{p_0(x)}{\rho} \qquad \text{при } y = 0, \quad t = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad \text{при } y = 0, \quad t = 0. \tag{7}$$

Будем считать, что $p_0(x) \in \Pi_W$, т. е. функция $p_0(x)$ представима в виде абсолютно сходящегося ряда $p_0(x) = \sum\limits_{\lambda \ne 0} p(\lambda) e^{i\lambda x}$.

Решение задачи (4)–(7) будем искать в таком классе функций $\varphi(x,y,t)$, когда сама функция и ее частные производные до второго порядка включительно принадлежат классу $\Pi_W^{y,t}$ и

$$\varphi(x,y,t) \to 0 \quad \text{при } y \to -\infty \text{ равномерно по } x \text{ и } t. \tag{8}$$

Тогда

$$\varphi(x,y,t) = \sum_\lambda a_\lambda(y,t) e^{i\lambda x}, \tag{9}$$

и этот ряд можно дважды почленно дифференцировать. (Суммирование здесь производится по счетному множеству значений λ, но это множество пока не определено.)

Применяя к уравнению (4) преобразование W_0^{-1} и учитывая (3), придем к следующим дифференциальным уравнениям для коэффициентов:

$$\frac{d^2a_\lambda(y,t)}{dy^2} - \lambda^2 a_\lambda(y,t) = 0, \quad t \text{ — параметр;}$$

$$\frac{d^2a_0(y,t)}{dy^2} = 0 \Rightarrow a_0(y,t) = b_0(t) + c_0(t)y \quad \text{при } \lambda = 0;$$

$$\frac{d^2a_\lambda(y,t)}{dy^2} - \lambda^2 a_\lambda(y,t) = 0 \Rightarrow a_\lambda(y,t) = b_\lambda(t)e^{|\lambda|y} + c_\lambda(t)e^{-|\lambda|y} \quad \text{при } \lambda \neq 0.$$

Учитывая, что искомое решение должно принадлежать классу $\Pi_W^{y,t}$, получаем $\varphi(x,y,t) = b_0(t) + \sum\limits_\lambda (b_\lambda(t)e^{|\lambda|y} + c_\lambda(t)e^{-|\lambda|y})e^{i\lambda x}$. Удовлетворим условию (8), тогда $\varphi(x,y,t) = \sum\limits_{\lambda\neq 0} b_\lambda(y,t)e^{|\lambda|y}e^{i\lambda x}$. Используя (5), получим

$$\frac{d^2b_\lambda(t)}{dt^2} + g|\lambda|b_\lambda(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\varphi(x,y,t) = \sum_{\lambda\neq 0}(c_\lambda^{(1)}e^{i\sqrt{g|\lambda|}t} + c_\lambda^{(2)}e^{-i\sqrt{g|\lambda|}t})e^{i\lambda x}, \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\substack{y=0\\t=0}} = \sum_{\lambda\neq 0}(c_\lambda^{(1)}i\sqrt{g|\lambda|} - c_\lambda^{(2)}i\sqrt{g|\lambda|})e^{i\lambda x} = 0.$$

Из (7) следует, что $c_\lambda^{(1)} = c_\lambda^{(2)}$, тогда решение задачи запишется в виде

$$\varphi(x,y,t) = \sum_{\lambda\neq 0} c_\lambda \cos(\sqrt{g|\lambda|}t)e^{|\lambda|y+i\lambda x},$$

где c_λ — произвольная постоянная, которую находим из граничного условия (6). Так как

$$\varphi(x,0,0) = \sum_{\lambda\neq 0} c_\lambda e^{i\lambda x} = \frac{1}{\rho}\sum_{\lambda\neq 0} p(\lambda)e^{i\lambda x} \Rightarrow c_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\rho},$$

то окончательно имеем

$$\varphi(x,y,t) = \frac{1}{\rho}\sum_{\lambda\neq 0} p(\lambda)\cos(\sqrt{g|\lambda|}t)e^{|\lambda|y+i\lambda x}. \tag{10}$$

Итак, справедлива

Теорема 1. *Если* $p_0(x) = \sum\limits_{\lambda\neq 0} p(\lambda)e^{i\lambda x}$ *и* $\lambda^j p(\lambda) \in l_1$, $j = 0,1,2$, *то задача* (4)–(7) *имеет единственное решение в форме* (10), *которое вместе со своими частными производными до второго порядка включительно принадлежит классу* $\Pi_W^{y,t}$.

Рассмотрим снова полубесконечную жидкую среду $y \leq 0$, но будем считать, что волновое движение вызывается начальным смещением поверхности жидкости. Как показано в [1], для определения потенциала скоростей φ надо решить уравнения (4) и (5) с граничными условиями

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = gf(x) \text{ при } y = 0,\ t = 0. \tag{11}$$

Из рассуждений, аналогичных приведенным, вытекает

Теорема 2. *Если* $f(x) = \sum\limits_{\lambda\neq 0} f(\lambda)e^{i\lambda x}$ *и* $\lambda^j f(\lambda) \in l_1$, $j = 0,1,2$, *то задача* (4), (5), (11) *имеет единственное решение*

$$\varphi(x,y,t) = \sum_{\lambda\neq 0}\sqrt{\frac{g}{|\lambda|}}f(\lambda)\sin(\sqrt{g|\lambda|}t)e^{|\lambda|y+i\lambda x},$$

которое вместе со своими частными производными до второго порядка включительно принадлежит классу $\Pi_W^{y,t}$.

Теперь предположим, что глубина жидкости конечна и равна h, т. е. предположим, что $-h \le y \le 0$. В этом случае волновое движение, вызванное динамическим давлением, описывается уравнениями (4)–(7), но к ним прибавляется еще условие

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = -h. \tag{12}$$

Будем считать, что $p(x) = p_0 + \sum\limits_{\lambda\ne 0} p(\lambda)e^{i\lambda x}$. Рассуждая аналогично тому, как это сделано при решении предыдущих задач, получим $\varphi(x,y,t) = b_0(t) + \sum\limits_{\lambda\ne 0}(b_\lambda(t)e^{|\lambda|y} + c_\lambda(t)e^{-|\lambda|y})e^{i\lambda x}$. Из условия (12) имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \sum_{\lambda\ne 0}|\lambda|(b_\lambda(t)e^{-|\lambda|h} - c_\lambda(t)e^{|\lambda|h})e^{i\lambda x} = 0 \Rightarrow b_\lambda(t) = c_\lambda(t)e^{2|\lambda|h}.$$

Тогда

$$a_\lambda(y,t) = c_\lambda(t)e^{2|\lambda|h}e^{|\lambda|y} + c_\lambda(t)e^{-|\lambda|y} = 2e^{|\lambda|h}c_\lambda(t)\frac{e^{|\lambda|(h+y)} + e^{-|\lambda|(h+y)}}{2} = e^{|\lambda|h}c_\lambda(t)\,\mathrm{ch}[|\lambda|(h+y)],$$

значит, $\varphi(x,y,t) = b_0(t) + \sum\limits_{\lambda\ne 0} c_\lambda(t)\,\mathrm{ch}[|\lambda|(h+y)]e^{|\lambda|h+i\lambda x}$.

Из уравнения (5) следует

$$\frac{d^2 b_0(t)}{dt^2} = 0 \Rightarrow b_0(t) = c_0^{(1)} + c_0^{(2)}t;$$

$$\frac{d^2 c_\lambda(t)}{dt^2}\,\mathrm{ch}(|\lambda|h) + |\lambda|g c_\lambda(t)\,\mathrm{sh}(|\lambda|h) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 c_\lambda(t)}{dt^2} + |\lambda|g c_\lambda(t)\,\mathrm{th}(|\lambda|h) = 0 \Rightarrow$$

$$c_\lambda(t) = b_\lambda^{(1)}e^{i\sqrt{g|\lambda|\,\mathrm{th}(|\lambda|h)}t} + b_\lambda^{(2)}e^{-i\sqrt{g|\lambda|\,\mathrm{th}(|\lambda|h)}t} \Rightarrow$$

$$\varphi(x,y,t) = c_0^{(1)} + c_0^{(2)}t + \sum_{\lambda\ne 0}(b_\lambda^{(1)}e^{i\sqrt{g|\lambda|\,\mathrm{th}(|\lambda|h)}t} + b_\lambda^{(2)}e^{-i\sqrt{g|\lambda|\,\mathrm{th}(|\lambda|h)}t}\,\mathrm{ch}(|\lambda|(h+y))e^{|\lambda|h+i\lambda x}.$$

По условию (7) находим

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\substack{y=0\\t=0}} = c_0^{(2)} + \sum_{\lambda\ne 0} i\sqrt{g|\lambda|\,\mathrm{th}(|\lambda|h)}(b_\lambda^{(1)} - b_\lambda^{(2)})\,\mathrm{ch}(|\lambda|h)e^{|\lambda|h+i\lambda x} = 0 \Rightarrow c_0^{(2)} = 0,\ \ b_\lambda^{(1)} = b_\lambda^{(2)} = b_\lambda,$$

тогда

$$c_\lambda(t) = 2b_\lambda\frac{e^{i\sqrt{g|\lambda|\,\mathrm{th}(|\lambda|h)}t} - e^{-i\sqrt{g|\lambda|\,\mathrm{th}(|\lambda|h)}t}}{2} = b_\lambda\cos(\sqrt{g|\lambda|\,\mathrm{th}(|\lambda|h)}t),$$

и

$$\varphi(x,y,t) = c_0 + \sum_{\lambda\ne 0} b_\lambda\cos(\sqrt{g|\lambda|\,\mathrm{th}(|\lambda|h)}t)\,\mathrm{ch}(|\lambda|(h+y))e^{|\lambda|h+i\lambda x},$$

$$\varphi(x,0,0) = c_0 + \sum_{\lambda\ne 0} b_\lambda\,\mathrm{ch}(|\lambda|(h))e^{|\lambda|h+i\lambda x} = \frac{1}{\rho}\Big(p_0 + \sum_{\lambda\ne 0}p(\lambda)e^{i\lambda x}\Big) \Rightarrow$$

$$c_0 = \frac{p_0}{\rho};\quad b_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\rho\,\mathrm{ch}(|\lambda|h)e^{|\lambda|h}}.$$

Окончательно имеем

$$\varphi(x,y,t) = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{\rho}\sum_{\lambda\ne 0}p(\lambda)\cos(\sqrt{g|\lambda|\,\mathrm{th}(|\lambda|h)}t)\frac{\mathrm{ch}(|\lambda|(h+y))}{\mathrm{ch}(|\lambda|h)}e^{i\lambda x}. \tag{13}$$

Итак, справедлива

Теорема 3. *Если* $p(x) = p_0 + \sum\limits_{\lambda \neq 0} p(\lambda) e^{i\lambda x}$ *и* $\lambda^j p(\lambda) \in l_1$, $j = 0, 1, 2$, *то задача* (4)–(7), (12) *имеет единственное решение* (13), *которое вместе со своими частными производными до второго порядка включительно принадлежит классу* $\Pi_W^{y,t}$.

Наконец, рассмотрим задачу об образовании поверхностных волн в случае конечной глубины жидкости, обусловленных начальным смещением. В этом случае к условиям (4), (5), (11) добавляется условие (12).

Здесь имеет место

Теорема 4. *Если* $f(x) = \sum\limits_{\lambda \neq 0} f(\lambda) e^{i\lambda x}$ *и* $\lambda^l f(\lambda) \in l_1$, $j = 0, 1, 2$, *то задача* (4), (5), (11), (12) *имеет единственное решение*

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{\lambda \neq 0} \sqrt{\frac{g}{|\lambda| \operatorname{th}(|\lambda| h)}} f(\lambda) \sin(\sqrt{g|\lambda| \operatorname{th}(|\lambda| h)}\, t) \frac{\operatorname{ch}(|\lambda|(h + y))}{\operatorname{ch}(|\lambda| h)} e^{i\lambda x},$$

которое вместе со своими частными производными до второго порядка включительно принадлежит классу $\Pi_W^{y,t}$.

Литература

1. Снеддон И. *Преобразование Фурье.* – М.: Ин. лит., 1955. – 667 с.
2. Кулагина М.Ф. *О некоторых бесконечных системах с разностными индексами* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 3. – С. 18–23.
3. Кулагина М.Ф. *Об интегральных уравнениях в средних значениях в пространствах почти-периодических функций* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 8. – С. 19–28.
4. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.* – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
5. Левитан Б.Н. *Почти-периодические функции.* – М.: ГИТТЛ, 1953. – 396 с.

Чувашский государственный университет

Поступила
10.01.2000