Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета по предмету "Математика"
Очный тур
2016-2017 учебный год
10 класс

1. Сколько существует способов представить число 2017 в виде суммы членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел?

Решение: Используя формулу суммы арифметической прогрессии и условие, что она состоит из натуральных чисел получаем уравнение в целых числах

$$(a_1 + a_n)n = 2 \cdot 2017, \qquad \text{где } a_1, a_n, n \in \mathbb{N}$$

Поскольку 2017 - простое число, у уравнения существуют следующие решения:

$$\begin{cases} a_1 + a_n = 2 \\ n = 2017 \end{cases} \begin{cases} a_1 + a_n = 2017 \\ n = 2 \end{cases} \begin{cases} a_1 + a_n = 4034 \\ n = 1 \end{cases}$$

В первой системе уравнений из условия $a_1 + a_n = 2$ получаем $a_1 = a_2 = 1$. Таким образом, $\sum_{n=1}^{2017} 1 = 2017$.

При решении второй системы получаем следующие решения

$$a_1 = 1, a_2 = 2016;\ a_1 = 2, a_2 = 2015;$$
$$\dots$$
$$a_1 = 1008, a_2 = 1009;\ a_1 = 1009, a_2 = 1008;$$
$$\dots$$

$a_1 = 2015, a_2 = 2;\ a_1 = 2016, a_2 = 1.$

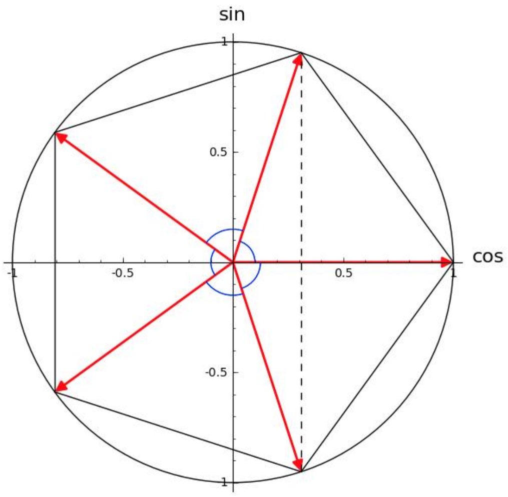
Последняя система дает тривиальный случай, когда сумма содержит единственное слагаемое $a_1 = 2017$.

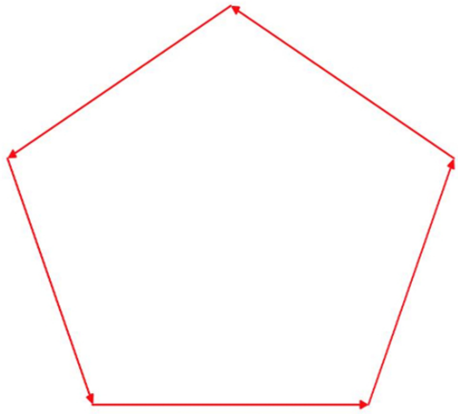
Таким образом существует ровно 2017 нетривиальных разложений числа 2017 в сумму членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел,
если учитывать порядок сложения.

Если порядок сложения не учитывать, то получается \$1009\$ нетривиальных разложений числа \$2017\$ в сумму членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел.

2. Докажите, что $\cos(\frac{2\pi}{5}) + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

Решение:
Обратим внимание, что точки $(cos\frac{2\pi}{5}, \sin\frac{2\pi}{5}), (\cos\frac{4\pi}{5}, \sin\frac{4\pi}{5}), (cos\frac{6\pi}{5}, \sin\frac{6\pi}{5}), (cos\frac{8\pi}{5}, \sin\frac{8\pi}{5}), (\cos 0, \sin 0)$ образуют вершины
правильного пятиугольника вписанного в окружность единичного радиуса.



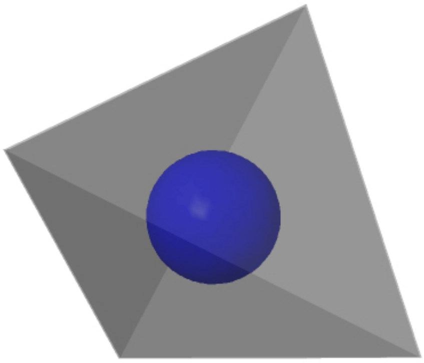
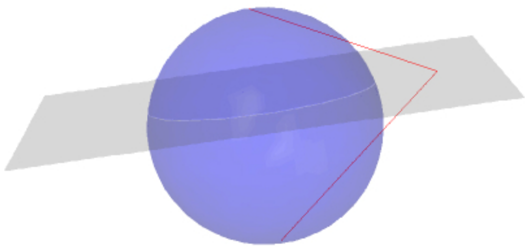


Легко проверить, что сумма векторов, обозначенных на рисунке красным, равна нулевому вектору. Таким образом, $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} + \cos 0 = 0$.

Имея в виду, что $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\frac{6\pi}{5}, \cos\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{8\pi}{5}$ получаем, что $2(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + 1) = 0$, откуда легко получить необходимое утверждение.

3. Каково наименьшее количество спутников, оборудованных видеообрудованием необходимых для видеофиксации всех точек планеты одновременно?

Решение: Пренебрегая релятивистскими эффектами, можно считать, что задача сводится к следующему геометрическому вопросу: каков наименьший набор точек $A_1, A_2, \dots A_n$, чтобы для любой точки T на поверхности сферы хотя бы один из отрезков A_kT имел единственное пересечение со сферой в точке T. Поскольку сферу можно вложить в тетраэдер, то четырех спутников достаточно.

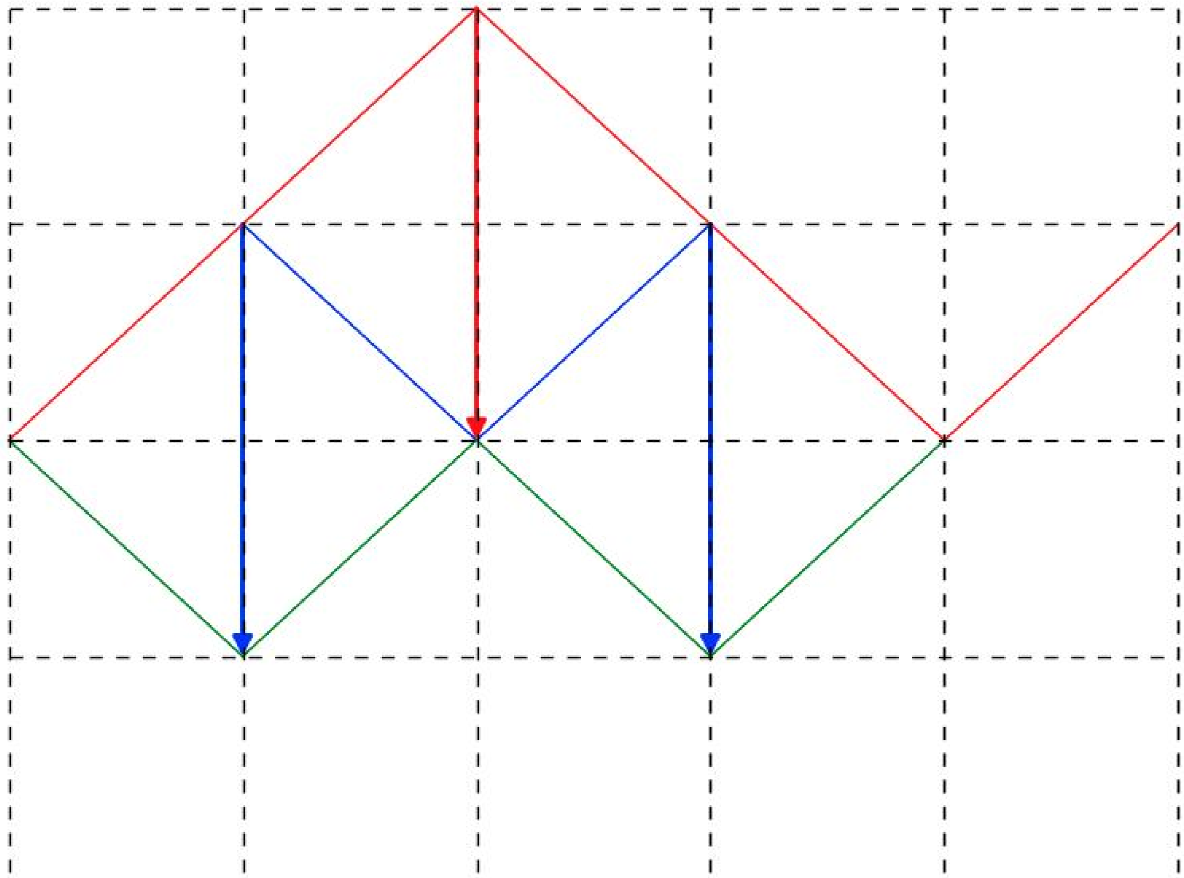



Теперь необходимо доказать, что трех точек не достаточно. Через три точки всегда можно провести плоскость. Плоскость $A_1A_2A_3$ может находится в одном из трех положений относительно сферы. Она может её пересекать, может её касаться и может с ней не пересекаться. Во всех трех случаях существует две полярные точки на сфере, в которых либо $A_1A_2A_3$, либо параллельная ей плоскость касается сферы. Хотя бы одна из этих полярных точек не видна ни из одной точки плоскости, поэтому при любом расположении точек A_1, A_2, A_3 в плоскости $A_1A_2A_3$, хотя бы одна из полярных точек не будет видна.

Заметим, что аналогичные соображения не работают для других фигур. Например, если бы наша планета обладала формой правильного многогранника,
то достаточно было бы всего двух точек. Так, например, для куба достаточно двух точек, расположенных на прямой, содержащей его большую диагональ.

4. Сержант, стоящий перед шеренгой солдат, командует: «НАЛЕ-ВО!». После этого часть солдат поворачивается налево, а часть направо. Оказавшись лицом к лицу, солдаты разворачиваются спина к спине. На каждый разворот солдаты тратят по одной секунде. Каково наибольшее время, за которое n солдат повернутся так, что смогут разойтись?

Решение: Формализуем шеренгу в качестве ломанной, нарисованной на клетчатом листке, состоящую из диагоналей клеток этого листа. Если солдат смотрит направо, то ему отвечает линия, идущая по диагонали «/»,
а если соладт смотрит налево, то ему отвечает «\». Каждую секунду все сочетания «Λ» меняются на «V». Движение в шеренге прекратиться и солдаты смогут разойтись в разные стороны тогда, когда в ломанной не останется ни одного сочетания «Λ». Число солдат повернутых в ту или иную сторону остается постоянным, поэтому концы ломанной зафиксированы на протяжении всего времени движения в шеренге. Конечная ломанная будет иметь единственный излом типа «V»



шеренга из пяти солдат в начальный момент времени сразу после
поворота по команде <<НАЛЕ-ВО>> соответствует красной ломанной.
Изменения через одну и две секунды (по красной стрелке и зеленой стрелкам) указаны синим и зеленым соответственно.

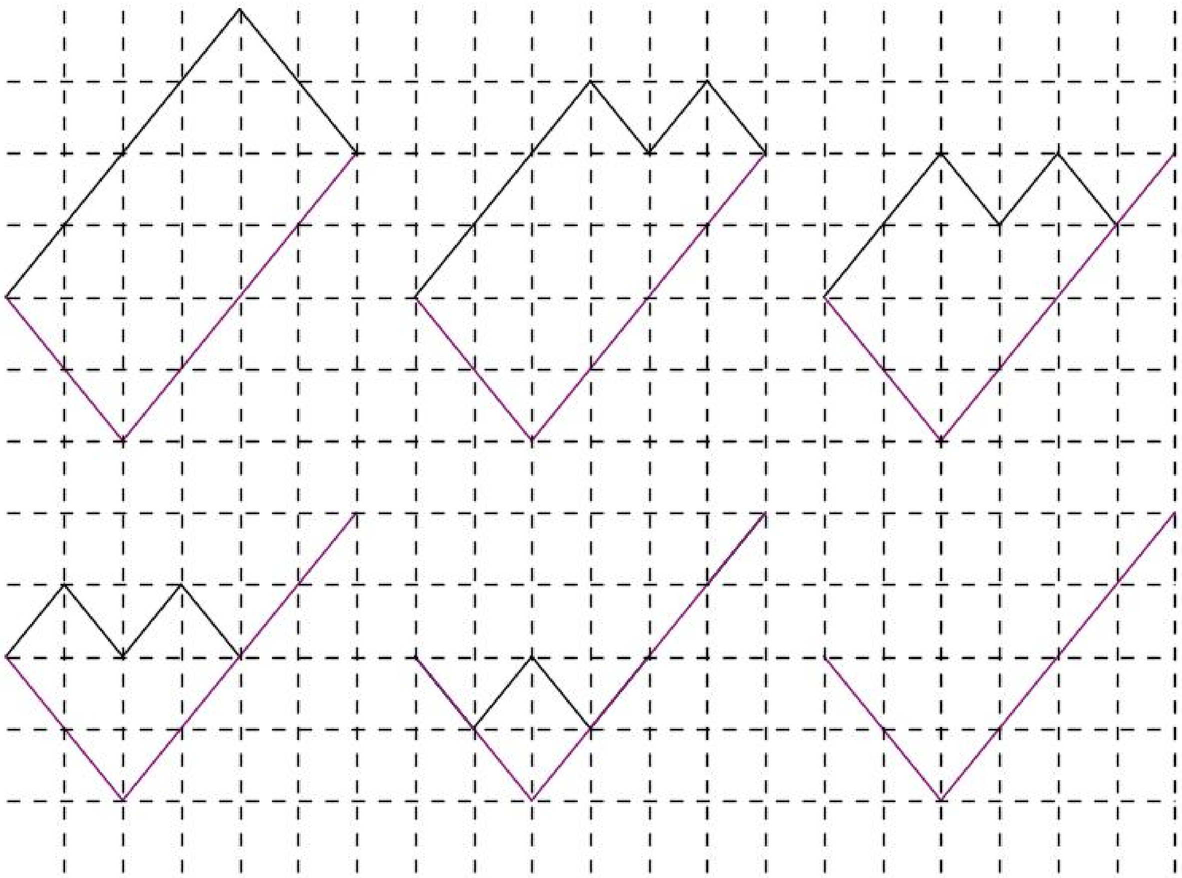
Строки, в которых находится ломанная занумеруем сверху вниз, начиная с 1. Тогда, если в момент времени t на строке k находится излом типа «Λ», то в момент времени t+1 на строке k+1 ровно под «Λ» появляется излом типа «V».
Процесс заканчивается тогда, когда не остается ни одного излома типа «Λ»,
поэтому в любой момент времени пока процесс не закончился на какой-то из строк находится излом типа «Λ».

Заметим, что на строке 1, начиная с момента времени t=1, не может быть ни одного излома типа «Λ», отсюда следует, что в момент времени t=2 новых изломов на строке 2 не появляется, поскольку на строке 1 уже не было ни одного излома типа «Λ».
Обратим внимание также на то, что те изломы типа «Λ», которые были в момент времени t=1 на строке 2 переходят в изломы на строке 3, поэтому на строке 2 начиная с момента времени \$t=2\$ нет ни одного излома типа «Λ».

Аналогично, если в момент времени t=n на строке n нет ни одного излома типа «Λ», то в момент времени t=n+1 на строке n+1 нет ни одного излома типа «Λ» потому что те, что были в момент времени t=n перешли в изломы на строке n+2, а новых не появилось потому что не было на строке n.

Таким образом время, необходимое для завершения процесса не больше, чем количество строк, занимаемых начальной и конечной конфигурациями,
совмещенными на одном рисунке.

Обратим внимание, что поскольку количество развернувшихся в ту или иную сторону солдат постоянно, то сумма высоты ломанной начальной конфигурации
и высоты ломанной конечной конфигурации не может превышать количество столбцов, а самая высокая комбинация достигается если начальная конфигурация
центрально симметрична по отношению к конечной конфигурации, тогда время равно n-1.



Таким образом для завершения движения в шеренге после выполнения команды «НАЛЕ-ВО» составляет n-1 секунду.