ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 5 (456)

УДК 514.76

*Г.Н. ТИМОФЕЕВ*

# ИНТЕГРИРУЕМАЯ $\pi$-СТРУКТУРА С СИММЕТРИЧНОЙ ВТОРОЙ КОВАРИАНТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ АФФИНОРА

**1.** Интегрируемая $\pi$-структура с аффинором

$$a_\alpha^\sigma a_\sigma^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (\alpha, \beta, \delta, \ldots = 1, 2, \ldots, N)$$

определяет [1] композицию $X_n \times X_m$ $(n + m = N)$ двух базовых многообразий $X_n$ и $X_m$.

В данной статье предполагается, что пространство $W_N$ допускает композицию $X_n \times X_m$, для которой вторая ковариантная производная аффинора симметрична

$$\nabla_\mu \nabla_\gamma a_\alpha^\beta = \nabla_\gamma \nabla_\mu a_\alpha^\beta. \tag{1}$$

Если $g_{\alpha\beta}$ и $\omega_\gamma$ — соответственно метрический тензор и дополнительный вектор пространства $W_N$, то для тензора композиции [1]

$$a_{\alpha\beta} = a_\alpha^\sigma g_{\sigma\beta} \tag{2}$$

вторую ковариантную производную можно представить в виде

$$\nabla_\mu \nabla_\gamma a_{\alpha\beta} = \nabla_\mu \nabla_\gamma a_\alpha^\sigma g_{\sigma\beta} + 2\omega_\mu \nabla_\gamma a_{\alpha\beta} + 2\omega_\gamma \nabla_\mu a_{\alpha\beta} + 2\nabla_\mu \omega_\gamma a_{\alpha\beta} - 4\omega_\mu \omega_\gamma a_{\alpha\beta}.$$

Поэтому равенство (1) можно заменить соотношением

$$\nabla_{[\mu} \nabla_{\gamma]} a_{\alpha\beta} = 2\nabla_{[\mu} \omega_{\gamma]} a_{\alpha\beta}. \tag{3}$$

Следовательно, в пространстве $W_N$ композицию (1) можно определить с помощью тензора композиции (2), удовлетворяющего условию (3).

Условие (1) равносильно ([2], с. 126) соотношению

$$-R_{\mu\gamma\alpha}{}^\sigma a_\sigma^\beta + R_{\mu\gamma\sigma}{}^\beta a_\alpha^\sigma = 0, \tag{4}$$

где $R_{\mu\gamma\alpha}{}^\beta = \partial_\mu \Gamma_{\gamma\alpha}{}^\beta - \partial_\gamma \Gamma_{\mu\alpha}{}^\beta + \Gamma_{\mu\sigma}{}^\beta \Gamma_{\gamma\alpha}{}^\sigma - \Gamma_{\gamma\sigma}{}^\beta \Gamma_{\mu\alpha}{}^\sigma$ — тензор кривизны пространства. В адаптированной к композиции $X_n \times X_m$ системе координат из (4) легко получить равенства

$$R_{\mu\gamma i}{}^{\bar{j}} = R_{\mu\gamma\bar{i}}{}^j = R_{kl\bar{i}}{}^{\bar{j}} = R_{\bar{k}\bar{l}i}{}^j = 0,$$
$$\text{(а) } R_{i\bar{k}\bar{l}}{}^{\bar{j}} = R_{i\bar{l}\bar{k}}{}^{\bar{j}}, \quad \text{(б) } R_{\bar{i}kl}{}^j = R_{\bar{i}lk}{}^j$$
$$(i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, n; \;\; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \ldots = n+1, \ldots, n+m = N).$$

Следовательно, отличными от нуля адаптированными компонентами тензора кривизны являются только компоненты $R_{ijk}{}^l$, $R_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}{}^{\bar{l}}$, $R_{i\bar{j}\bar{k}}{}^{\bar{l}}$, $R_{\bar{i}jk}{}^l$. Тогда в адаптированных координатах условия интегрируемости $R_{\mu\gamma\alpha}{}^{\sigma} g_{\sigma\beta} + R_{\mu\gamma\beta}{}^{\sigma} g_{\alpha\sigma} = -4\nabla_{[\mu}\omega_{\gamma]} g_{\alpha\beta}$ основных уравнений $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 2\omega_\gamma g_{\alpha\beta}$ превращаются в следующую систему:

$$
\begin{aligned}
&\text{(а)} \quad R_{kli}{}^{s} g_{sj} + R_{klj}{}^{s} g_{is} = -4\nabla_{[k}\omega_{l]} g_{ij},\\
&\text{(б)} \quad R_{\bar{k}li}{}^{s} g_{sj} + R_{\bar{k}lj}{}^{s} g_{is} = -4\nabla_{[\bar{k}}\omega_{l]} g_{ij},\\
&\text{(в)} \quad \nabla_{[\bar{k}}\omega_{\bar{l}]} g_{ij} = 0,\\
&\text{(г)} \quad R_{klj}{}^{s} g_{\bar{i}s} = -4\nabla_{[k}\omega_{l]} g_{\bar{i}j},\\
&\text{(д)} \quad R_{\bar{k}l\bar{i}}{}^{\bar{s}} g_{\bar{s}j} + R_{\bar{k}lj}{}^{s} g_{\bar{i}s} = -4\nabla_{[\bar{k}}\omega_{l]} g_{\bar{i}j},\\
&\text{(ж)} \quad R_{\bar{k}\bar{l}\bar{i}}{}^{\bar{s}} g_{\bar{s}j} = -4\nabla_{[\bar{k}}\omega_{\bar{l}]} g_{\bar{i}j},\\
&\text{(з)} \quad \nabla_{[k}\omega_{l]} g_{\bar{i}\bar{j}} = 0,\\
&\text{(и)} \quad R_{\bar{k}l\bar{i}}{}^{\bar{s}} g_{\bar{s}\bar{j}} + R_{\bar{k}l\bar{j}}{}^{\bar{s}} g_{\bar{i}\bar{s}} = -4\nabla_{[\bar{k}}\omega_{l]} g_{\bar{i}\bar{j}},\\
&\text{(к)} \quad R_{\bar{k}\bar{l}\bar{i}}{}^{\bar{s}} g_{\bar{s}\bar{j}} + R_{\bar{k}\bar{l}\bar{j}}{}^{\bar{s}} g_{\bar{i}\bar{s}} = -4\nabla_{[\bar{k}}\omega_{\bar{l}]} g_{\bar{i}\bar{j}}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Заметим, что из равенств (5 (б), (д), (и)) соответственно можно получить

$$R_{\bar{k}li}{}^{s} g_{sj} = -2\nabla_{[\bar{k}}\omega_{l]} g_{ij} - 2\nabla_{[\bar{k}}\omega_{i]} g_{jl} + 2\nabla_{[\bar{k}}\omega_{j]} g_{il}, \tag{6}$$

$$R_{k\bar{l}\bar{i}}{}^{\bar{s}} g_{\bar{s}\bar{j}} = -2\nabla_{[k}\omega_{\bar{l}]} g_{\bar{i}\bar{j}} - 2\nabla_{[k}\omega_{\bar{i}]} g_{\bar{l}\bar{j}} + 2\nabla_{[k}\omega_{\bar{j}]} g_{\bar{l}\bar{i}}, \tag{7}$$

$$\nabla_{[\bar{k}}\omega_{l]} g_{\bar{i}j} - \nabla_{[\bar{i}}\omega_{l]} g_{\bar{k}j} - \nabla_{[\bar{k}}\omega_{j]} g_{\bar{i}l} + \nabla_{[\bar{i}}\omega_{j]} g_{\bar{k}j} = 0.$$

Применив тождества Риччи к равенствам (5 (в), (з)), будем иметь

$$\nabla_{[k}\omega_{l]} g_{j\bar{i}} + \nabla_{[l}\omega_{j]} g_{k\bar{i}} + \nabla_{[j}\omega_{k]} g_{l\bar{i}} = 0, \tag{8}$$

$$\nabla_{[\bar{k}}\omega_{\bar{l}]} g_{\bar{j}i} + \nabla_{[\bar{l}}\omega_{\bar{j}]} g_{\bar{k}i} + \nabla_{[\bar{j}}\omega_{\bar{k}]} g_{\bar{l}i} = 0. \tag{9}$$

В системе (5 (г) и (ж)) по значениям первых множителей в левых частях можно выделить следующие четыре случая:

$$
\begin{aligned}
&1.\ \nabla_{[k}\omega_{i]} \neq 0, \quad \nabla_{[\bar{k}}\omega_{\bar{i}]} \neq 0, \quad 3.\ \nabla_{[k}\omega_{i]} = 0, \quad \nabla_{[\bar{k}}\omega_{\bar{i}]} \neq 0,\\
&2.\ \nabla_{[k}\omega_{i]} \neq 0, \quad \nabla_{[\bar{k}}\omega_{\bar{i}]} = 0, \quad 4.\ \nabla_{[k}\omega_{i]} = 0, \quad \nabla_{[\bar{k}}\omega_{\bar{i}]} = 0.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим случай 1. Из равенств (г) и (ж) вытекают условия $g_{ij} = g_{\bar{i}\bar{j}} = 0$, означающие [1] изотропность позиций $P(X_n)$ и $P(X_m)$ композиции. В работе [3] для этой композиции установлено, что матрица метрического тензора имеет блочно-диагональный вид

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & g_{i\bar{j}} \\ g_{\bar{i}j} & 0 \end{pmatrix}; \tag{10}$$

пространство четномерно ($N = 2n$); число измерений позиций одинаково; блоки $(g_{i\bar{j}})$ и $(g_{\bar{i}j})$ невырождены и существует тензор $g^{\bar{i}j}$, удовлетворяющий условиям

$$g_{\bar{i}j} g^{j\bar{k}} = \delta_{\bar{i}}^{\bar{k}}, \quad g_{\bar{i}j} g^{k\bar{i}} = \delta_j^k. \tag{11}$$

Нетрудно показать, что при $n \neq 2$ из равенств (8) и (9) вытекают свойства $\nabla_{[k}\omega_{l]} = \nabla_{[\bar{k}}\omega_{\bar{l}]} = 0$, противоречащие случаю 1. Следовательно, в действительности случай 1 не имеет места.

Поскольку позиции $P(X_n)$ и $P(X_m)$ равноправны, то случаи 2 и 3 принципиально не отличаются. Поэтому исходная совокупность сводится только к случаям 3 и 4. Но в случаях 3 и 4 присутствует одно и тоже условие $\nabla_{[k}\omega_{l]} = 0$. Таким образом, можем сказать: хотя бы одна составлющая дополнительного вектора является градиентной.

Случай 3. Так как вектор $\omega_i$ не градиентен, то из равенства (5 (г)) вытекает, что $g_{ij} = 0$ и матрица $(g_{\alpha\beta})$ метрического тензора принимает вид

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & g_{i\bar{j}} \\ g_{\bar{j}i} & g_{\bar{i}\,\bar{j}} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Относительно размерностей $m$ и $n$ возможны предположения: $m < n$, $m \geq n$. При $m < n$ вычисления показывают, что определитель $\det(g_{\alpha\beta})$ равен нулю, что противоречит условию невырожденности вейлевой метрики. Следовательно, имеет место только $m \geq n$. При $m = n$ матрица $(g_{i\bar{j}})$ квадратная невырожденная. Поэтому существует тензор $g^{\bar{i}j}$, удовлетворяющий условиям (11). Тогда из равенства (9) при $n \neq 2$ вытекает градиентность вектора $\omega_{\bar{i}}$ (противоречие). Следовательно, $m \neq n$. При $m > n$ матрица $(g_{i\bar{j}})$ прямоугольная размерности $n \times m$, ее ранг равен $n$ [3]. Расположим ранговый минор в верхнем углу справа в матрице $(g_{i\bar{j}})$. Тогда матрицу (12) метрического тензора можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & \vdots & g_{iA} & \vdots & g_{i\overline{A}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{Ai} & \vdots & g_{BA} & \vdots & g_{B\overline{A}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{\overline{A}i} & \vdots & g_{\overline{A}B} & \vdots & g_{\overline{B}\,\overline{A}} \end{pmatrix}$$

$$(A, B, \ldots = n+1, \ldots, m; \;\; \overline{A}, \overline{B}, \ldots = m+1, \ldots, m+n).$$

Анализ соотношения (9) при таком строении метрической матрицы приводит к равенству $\nabla_{[\bar{i}}\omega_{\bar{j}]} = 0$, противоречащему исходному. Таким образом, и случай 3 не имеет места.

Итак, *в вейлевом пространстве, допускающем композицию вида* (3)*, компоненты дополнительного вектора градиентны.*

Если композиция изотропная [3], т. е. $g_{ij} = g_{\bar{i}\,\bar{j}} = 0$, то матрица метрического тензора имеет вид (10) и блоки $g_{i\bar{j}}$, $g_{\bar{j}i}$ невырождены. Умножив равенство (8) на $g^{\bar{i}j}$, имеем $(n-2)\nabla_{[\bar{k}}\omega_{l]} = 0$. Следовательно, *пространство, допускающее изотропную композицию вида* (3) *при* $n > 2$ *является римановым.* При этом равенство (5 (г)) принимает вид $R_{klj}{}^{s} g_{\bar{i}s} = 0$, откуда следует $R_{klj}{}^{s} = 0$. Соответственно из (5 (ж)) имеем $R_{\bar{k}\,\bar{l}\,\bar{j}}{}^{\bar{s}} = 0$. Таким образом, отличными от нуля компонентами тензора кривизны являются только $R_{l\bar{k}\,\bar{i}}{}^{\bar{j}}$ и $R_{\bar{l}ki}{}^{j}$, причем они связаны соотношением (5 (д))

$$R_{\bar{k}lj}{}^{s} g_{\bar{i}s} - R_{l\bar{k}\,\bar{i}}{}^{\bar{s}} g_{\bar{s}j} = 0, \quad R_{l\bar{k}\,\bar{i}}{}^{\bar{j}} = R_{l\bar{i}\,\bar{k}}{}^{\bar{j}}, \quad R_{\bar{l}ki}{}^{j} = R_{\bar{l}ik}{}^{j}.$$

**2.** В $W_N$ имеет место естественное оснащение ([2], [3]) позиций. Внутренняя связность, индуцированная на позициях, есть связность Вейля. Адаптированные компоненты поляритета и дополнительного вектора на позициях совпадают с соответствующими компонентами основных тензоров пространства. Если $g_{ij}$ и $g_{\bar{i}\,\bar{j}}$ невырождены, то коэффициенты $G^{k}_{ij}$ и $G^{\bar{k}}_{\bar{i}\,\bar{j}}$ внутренних связностей позиций выражаются с помощью формул [3]

$$G^{k}_{ij} = \Gamma_{ij}{}^{k} + \Gamma_{ij}{}^{\bar{s}} g_{\bar{s}p} g^{pk}, \quad G^{\bar{k}}_{\bar{i}\,\bar{j}} = \Gamma_{\bar{i}\,\bar{j}}{}^{\bar{k}} + \Gamma_{\bar{i}\,\bar{j}}{}^{s} g_{s\bar{p}} g^{\bar{p}\bar{k}}.$$

В дальнейшем предполагается, что адаптированные поляритеты на позициях не вырождены. Тогда из соотношений (6), (7) можно определить компоненты

$$\begin{aligned} &(\text{а})\ R_{\bar{k}li}{}^{j} = -2\nabla_{[\bar{k}}\omega_{l]}\delta^{j}_{i} - 2\nabla_{[\bar{k}}\omega_{i]}\delta^{j}_{l} + \nabla_{[\bar{k}}\omega_{s]} g^{sj} g_{il}; \\ &(\text{б})\ R_{k\bar{l}\,\bar{i}}{}^{\bar{j}} = -\nabla_{[k}\omega_{\bar{l}]}\delta^{\bar{j}}_{\bar{i}} - 2\nabla_{[k}\omega_{\bar{i}]}\delta^{\bar{j}}_{\bar{l}} + \nabla_{[k}\omega_{\bar{s}]} g^{\bar{s}\bar{j}} g_{\bar{i}\,\bar{l}}, \end{aligned} \tag{13}$$

где они связаны соотношением (5 (д)) с помощью величин $g_{i\bar{j}}$. Здесь следует рассмотреть два случая.

а) $g_{i\bar{j}} = 0$. Это условие характеризует [4] композицию как ортогональную (трансверсальные позиции взаимно ортогональны). Из соотношения (13) следует, что коэффициенты внутренних связностей позиций совпадают с соответствующими адаптированными компонентами коэффициентов связности пространства. Геометрии на позициях римановы.

б) $g_{i\bar{j}} \neq 0$. В этом случае $n > 2$ и $m > 2$ и из (5 (д)) следует $\nabla_{[l}\omega_{\bar{i}]} = 0$. Следовательно, при неортогональности допускаемой композиции рассматриваемое пространство риманово. Ясно, что отличными от нуля адаптированными компонентами тензора кривизны являются только $R_{kli}{}^{j}$ и $R_{\bar{k}\bar{l}\bar{i}}{}^{\bar{j}}$.

## Литература


1. Тимофеев Г.Н. *Инвариантные признаки специальных композиций в пространствах Вейля* // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 1. – С. 87–99.
2. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.
3. Леонтьев Е.К. *О чебышевских композициях* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1966. – Т. 126. – № 1. – С. 23–40.
4. Тимофеев Г.Н. *Ортогональные композиции в пространствах Вейля* // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 3. – С .73–85.



*Марийский государственный университет*



*Поступила* 08.02.1999