И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1999 МАТЕМАТИКА № 10 (449)

УДК 517.982

Г.С. ТЮГАШОВ

k-РАСТЯНУТОСТЬ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ И ВЫПУКЛОСТЬ

Приведенные ниже утверждения обобщают результаты, полученные в [1] и [2] для α-растянутых топологических пространств.

Напомним некоторые обозначения и определения из [3], где (как и в данной статье) все топологические пространства предполагаются T_1-пространствами.

Если $<$ — линейное упорядочение на пространстве X, то (по определению) $X_{<x}\,(X_{\le x}) = \{y \in X : y < x \ (y \le x)\}$. Если $<$ — линейное упорядочение на топологическом пространстве X, P — класс топологических пространств и для любого $x \in X$ имеем $[X_{<x}] \setminus X_{<x} \in P$, то линейное упорядочение $<$ называется слабо P-согласованным с топологией пространства X или слабо P-согласованным на X. Если, кроме того, для любого $x \in X$ при $[X_{<x}] \setminus X_{<x} \ne \varnothing$ имеем $x \in [X_{<x}] \setminus X_{<x}$, то линейное упорядочение $<$ назовем P-согласованным с топологией пространства X (P-согласованным на X).

Определение. Пусть P — произвольный класс топологических пространств. Топологическое пространство X назовем (слабо) P-растянутым (P-левым), если на X существует (слабо) P-согласованное линейное упорядочение (вполне упорядочение); если на X существует (слабо) P-согласованное упорядочение, обратное к вполне упорядочению, то пространство X назовем (слабо) P-правым.

Если класс P состоит из всех топологических пространств, включающих не более k точек, где k — любое натуральное число, то основное определение становится определением (слабо) k-растянутых, (слабо) k-левых и (слабо) k-правых пространств; если при этом $k = 1$, то получаем определение (слабо) α-растянутых, (слабо) α-левых, (слабо) α-правых пространств. Наконец, если класс P состоит из всех пустых топологических пространств, то основное определение становится определением растянутых, левых, правых пространств.

Пусть далее $<$ — линейное упорядочение на топологическом пространстве X и $A \subset X$. Говорят, что множество A выпукло, если из $x \in A$, $y \in A$ и $x \le z \le y$ следует, что $z \in A$.

Теорема 1. *Если на топологическом пространстве X существует k-согласованное линейное упорядочение $<$, удовлетворяющее у с л о в и ю Z :*

$$\text{для } \forall x \in X \text{ множество } [X_{<x}] \setminus X_{<x} \text{ выпукло,}$$

то любое бикомпактное подмножество пространства X имеет минимальный элемент относительно упорядочения $<$.

Доказательство. Для любого $x \in A$ положим $A_x = A \cap [X_{<x}]$. Так как линейное упорядочение $<$ k-согласовано на X, то $x \in A_x$ для любого $x \in A$ и семейство $\{A_x : x \in A\}$ является центрированной системой замкнутых множеств в бикомпакте A и потому имеет непустое пересечение $B = \cap\{A_x : x \in A\}$. Покажем, что $|B| \le k$. Предположим (от противного), что $|B| > k$, и зафиксируем $k+1$ точек $x_1, \dots, x_k, x_{k+1} \in B$, $x' = \min\{x_i : i = 1, \dots, k, k+1\}$. Тогда

$x_i \in [X_{<x'}] \setminus X_{<x'}$ для любого $i = 1, \ldots, k, k+1$, следовательно, $|[X_{<x'}] \setminus X_{<x'}| > k$, что противоречит k-согласованности упорядочения $<$ на X. Значит, $|B| \leq k$ и во множестве B существует минимальный элемент x_0.

Предположим, что в A нет минимального элемента и выберем $x_k < \cdots < x_1 < x_0 \in A$. Так как $<$ — k-согласованное линейное упорядочение на X, то $x_k \in [X_{<x_k}] \setminus X_{<x_k}$, а из $x_0 \in B$ следует, что $x_0 \in [X_{<x_k}] \setminus X_{<x_k}$, поэтому в силу условия Z получаем, что $x_R \in [X_{<x_k}] \setminus X_{<x_k}$ для любого $R = 0, 1, \ldots, k$. Это противоречие доказывает теорему.

Пример 1. Пусть $X = \{1/n : n \in N\} \cup \{0\} \subset R$. Топология на X индуцирована естественной топологией вещественной прямой R. Для любого $x \in X$, $x \neq 0$, положим $x < 0$, а для остальных пар $x, y \in X$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, порядок $<$ совпадает с естественным порядком вещественной прямой. Тогда $|[X_{<x}] \setminus X_{<x}| = 1$ для любой точки $x \in X$, следовательно, выполнено условие Z и $<$ — слабо α-согласованное линейное упорядочение на X (но не α-согласованное). В бикомпакте X нет минимального элемента относительно упорядочения $<$.

Пример 2. Пусть $X = [0, 1] \subset R$. Топология на X индуцирована естественной топологией вещественной прямой R. Для любого $x \in X$, $x \neq 0$, положим $x < 0$, а для остальных пар $x, y \in X$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, линейный порядок $<$ совпадает с естественным порядком вещественной прямой. Тогда $|[X_{<x}] \setminus X_{<x}| \leq 2$ и $x \in [X_{<x}] \setminus X_{<x}$ для любой точки $x \in X$, следовательно, $<$ — 2-согласованное линейное упорядочение на X. Очевидно, условие Z не выполнено. В бикомпакте X нет минимального элемента относительно упорядочения $<$.

Пример 3. Пусть X — множество рациональных чисел с естественной топологией и $<$ — обратный порядок к минимальному вполне упорядочению на X. Так как множество X счетно, то для любого $x \in X$ множество $[X_{<x}] \setminus X_{<x}$ конечно и $[X_{<x}] = X$, следовательно, выполнено условие Z и $<$ является P-согласованным линейным упорядочением на X, где P — класс всех конечных топологических пространств. Очевидно, упорядочение $<$ не является k-согласованным на X ни для какого натурального k. Если в качестве подпространства A в X рассмотреть бикомпакт из примера 1, то в A нет минимального элемента относительно упорядочения $<$.

Примеры 1–3 показывают, что все посылки теоремы 1 являются существенными.

Теорема 2. *Для любого топологического пространства X следующие утверждения равносильны:*

1. *пространство X слабо k-растянуто;*
2. *пространство X k-растянуто;*
3. *пространство X k-растянуто и удовлетворяет условию Z.*

Доказательство. Очевидно, 3) $\Rightarrow$ 2), 2) $\Rightarrow$ 1). Покажем, что 1) $\Rightarrow$ 3). Пусть $<$ — слабо k-согласованное линейное упорядочение на X.

1°. Положим $X' = \{x \in X : |[X_{<x}] \setminus X_{<x}| \geq k\}$. Без ограничения общности считаем $X \neq \varnothing$ (в противном случае полагаем $k = \max\{|[X_{<x}] \setminus X_{<x}| : x \in X\}$).

Рассмотрим разбиение F множества X' на непересекающиеся подмножества, полагая, что точки $x, y \in X'$ принадлежат одному и тому же подмножеству $A \in F$, если $\min\{[X_{<x}] \setminus X_{<x}\} = \min\{[X_{<y}] \setminus X_{<y}\}$ (min берется относительно упорядочения $<$). Пусть $x_A = \{[X_{<x}] \setminus X_{<x}\}$ для некоторого $x \in A \in F$, тогда $x_A \in A$ для любого $A \in F$. Очевидно, что каждый элемент семейства F является выпуклым подмножеством множества X. Определим на множестве X новый линейный порядок $\ll$ следующим образом: для любого $A \in F$, для любого $x \in A$, $x \neq x_A$, полагаем $x_A \ll x$; для всех остальных пар точек $x, y \in X$ порядок $\ll$ совпадает с порядком $<$. Тогда для любого $x \in X \setminus X'$ имеем $X_{\ll x} = X_{<x}$ и, следовательно, $|[X_{\ll x}] \setminus X_{\ll x}| < k$. Кроме того, если $x \in A \in F$, $x \neq x_A$, то $|[X_{\ll x}] \setminus X_{\ll x}| < |[X_{<x}] \setminus X_{<x}| = k$.

Наконец, если $x = x_A$ для некоторого $A \in F$, то либо $x \notin [X_{\ll x}]$ и, значит, $|[X_{\ll x}] \setminus X_{\ll x}| < k$, либо $x \in [X_{\ll x}]$ и только в этом случае может быть $|[X_{\ll x}] \setminus X_{\ll x}| \geq k$. Переобозначим линейное упорядочение $\ll$ через $<$. Тогда на следующем шаге имеем слабо k-согласованное линейное упорядочение $<$ на пространстве X такое, что, если $|[X_{<x}] \setminus X_{<x}| \geq k-1$ для некоторой точки $x \in X$, то $[X_{<x}] \setminus X_{<x} = B \cup C$, где B — выпуклое относительно $<$ подмножество в X, $|B| \leq 1$, $x \in B$ при $B \neq \varnothing$, $|C| = k-1$.

2°. $X' = \{x \in X : |[X_{<x}] \setminus X_{<x}| \geq k-1\}$. Как и выше, рассмотрим разбиение F множества X' на непересекающиеся подмножества, полагая, что точки $x, y \in X'$ принадлежат одному и тому же подмножеству $A \in F$, если $\min\{C_1\} = \min\{C_2\}$ в представлениях $[X_{<x}] \setminus X_{<x} = B_1 \cup C_1$, $[X_{<y}] \setminus X_{<y} = B_2 \cup C_2$.

Пусть $x_A = \min\{C\}$ и $[X_{<x}] \setminus X_{<x} = B \cup C$ для некоторого $x \in A \in F$. Тогда $x_A \in A$ для любого $A \in F$. Каждый элемент семейства F является выпуклым подмножеством множества X. Определим на множестве X новый линейный порядок $\ll$ следующим образом: для любого $A \in F$, для любого $x \in A$, $x \neq x_A$, полагаем $x_A \ll x$; для всех остальных пар точек $x, y \in X$ порядок $\ll$ совпадает с порядком $<$. Тогда для любого $x \in X \setminus X'$ имеем $X_{\ll x} = X_{<x}$ и, следовательно, $|[X_{\ll x}] \setminus X_{\ll x}| < k-1$. Кроме того, если $x \in A \in F$, $x \neq x_A$, то $|[X_{\ll x}] \setminus X_{\ll x}| < |[X_{<x}] \setminus X_{<x}|$ и $[X_{\ll x}] \setminus X_{\ll x} = B \cup C$, где B — выпуклое относительно $\ll$ подмножество в X, $|B| \leq 1$, $x \in B$ при $B \neq \varnothing$, $|C| = k-2$. Наконец, если $x = x_A$ для некоторого $A \in F$, то либо $x \notin [X_{\ll x}]$ и, значит, $[X_{\ll x}] \setminus X_{\ll x} = B \cup C$, где $B = \varnothing$ (следовательно, выпукло), $|C| \leq k-2$, либо $x \in [X_{\ll x}]$ и $[X_{\ll x}] \setminus X_{\ll x} = B \cup C$, где $|B| \leq 2$, B — выпуклое относительно $\ll$ подмножество в X, $|B| \leq 2$, $|C| \leq k-2$.

Итак, получено слабо k-согласованное линейное упорядочение $\ll$ на пространстве X, для которого при условии $|[X_{\ll x}] \setminus X_{\ll x}| \geq k-2$ (для некоторой точки $x \in X$) справедливо представление $[X_{\ll x}] \setminus X_{\ll x} = B \cup C$, где B — выпуклое относительно $\ll$ подмножество в X, $|B| \leq 2$, $x \in B$ при $B \neq \varnothing$, $|C| = k-2$.

Продолжая описанную процедуру, на последнем k-м шаге получим слабо k-согласованное линейное упорядочение $\ll$ на пространстве X такое, что если $|[X_{\ll x}] \setminus X_{\ll x}| \geq 0$ для некоторой точки $x \in X$, то $[X_{\ll x}] \setminus X_{\ll x} = B \cup C$, где B — выпуклое относительно $\ll$ подмножество в X, $|B| \leq k$, $x \in B$ при $B \neq \varnothing$, $|C| = 0$.

Так как всякое подпространство слабо k-растянутого топологического пространства k-растянуто, то в силу теоремы 2 справедливо

Следствие 1. Любое подпространство k-растянутого топологического пространства k-растянуто.

Теорема 3. *Если $f : X \to Y$ — замкнутое бикомпактное (необязательно непрерывное) отображение топологического пространства X на топологическое пространство Y и пространство X является k-растянутым, то k-растянуто и пространство Y.*

Доказательство. Пусть $<$ есть k-согласованное линейное упорядочение на пространстве X с условием Z. Для любого $y \in Y$ положим $x_y = \min f^{-1}(y)$ (такой минимум существует по теореме 1 в силу бикомпактности отображения f). Определим линейное упорядочение $\ll$ на пространстве Y следующим образом: $y' \ll y''$ для $y' \neq y'' \in Y$, если и только если $x_{y'} < x_{y''}$. В силу теоремы 2 достаточно показать, что линейное упорядочение $\ll$ слабо k-согласовано на Y.

Пусть $y^* \in Y$ и $x^* = x_{y^*}$, тогда $f(X_{<x^*}) = Y_{\ll y^*}$. Действительно, если $y \ll y^*$, то $x_y < x^*$, следовательно, $x_y \in X_{<x^*}$ и $y = f(x_y) \in f(X_{<x^*})$. Значит, $Y_{\ll y^*} \subset f(X_{<x^*})$. Если $x < x^*$, то $x_{f(x)} \leq x < x^* = x_{y^*}$ и, значит, $f(x) \ll y^*$, т.е. $f(x) \in Y \ll y^*$, следовательно, $f(X_{<x^*}) \subset Y_{\ll y^*}$. Итак, $f(X_{<x^*}) = Y_{\ll y^*}$. Тогда в силу замкнутости отображения f имеем $[Y_{\ll y}] \setminus Y_{\ll y^*} \subset f([X_{<x^*}]) \setminus Y_{\ll y^*} = f([X_{<x^*}]) \setminus f(X_{<x^*}) \subset f([X_{<x^*}]) \setminus X_{<x^*}$ и, значит, $|[Y_{\ll y^*}] \setminus Y_{\ll y^*}| \leq |[X_{<x^*}] \setminus X_{<x^*}| \leq k$, что и требовалось доказать.

Аналогично обоснованию теоремы 3 доказывается

Теорема 4. *Если $f : X \to Y$ — открытое бикомпактное отображение на топологическое пространство Y и на пространстве X существует слабо k-согласованное линейное упорядочение такое, что обратный порядок l-согласован и удовлетворяет условию Z, то пространство Y является k-растянутым.*

Теорема 5. *Если X – не пустой k-растянутый бикомпакт счетной тесноты, то в X существует точка счетного характера.*

Доказательство. Пусть $x(x, X) \geq \aleph$ для любого $x \in X$ и $<$ — k-согласованное линейное упорядочение на X, удовлетворяющее условию Z, F — семейство всех непустых бикомпактов счетного характера в X. Определим $F_\alpha \in F$ и $x_\alpha \in X$ для любого $\alpha < \aleph$ по правилу: $F_0 = X$ и $x_0 = \min X$. Пусть $\beta < \aleph_1$ и $F_\alpha \in F$, $x_\alpha \in X$ определены для всех $\alpha < \beta$ с условиями: а) если $a' < \alpha'' < \beta$, то $F_{\alpha''} \subset F_{\alpha'} \setminus [\{x_\alpha : \alpha \leq \alpha'\}]$; б) $x_\alpha = \min F_\alpha$ для любого $\alpha < \beta$. Тогда $\Phi_\beta = \cap\{F_\alpha : \alpha < \beta\} \in F$. Для $y_\beta = \min \Phi_\beta$ имеем $x_\alpha \leq y_\beta$ любого $\alpha < \beta$, поэтому $[\{x_\alpha : \alpha < \beta\}] \subset [\{x \in X : x < y_\beta\}]$. Значит, $|[\{x_\alpha : \alpha < \beta\}] \subset \Phi_B| \leq K$. Так как $\aleph(x, X) \geq \aleph_1$ для любого $x \in X$, то $|\Phi_\beta| < K$. Поэтому существует $F_\beta \in F$ такое, что $F_\beta \subset \Phi_\beta \setminus [\{x_\alpha : \alpha < \beta\}]$ и $x_\beta = \min F_\beta$. Тогда $\{x_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ — свободная последовательность в X длины $\aleph_1$. Действительно, для любого $\beta < \aleph_1$ имеем $[\{x_\alpha : \alpha < \beta\}] \cap F_\beta = \varnothing$ и $[\{x_\alpha : \beta \leq \alpha\}] \subset [F_\beta]$. Но в X не может быть свободной последовательности длины $\aleph_1$, что и доказывает теорему.

Теорема 6. *Если X есть k-растянутое, счетно компактное, регулярное T_1-пространство, то существуют такая точка $x \in X$ и такая последовательность $\eta = \{U_n : n \in N^+\}$ непустых открытых в X множеств, что η сходится к x.*

Для доказательства теоремы 6 сформулируем и докажем две леммы. Обозначим через P семейство всех непустых открытых в X множеств и пусть $<$ — k-согласованное линейное упорядочение на X, удовлетворяющее условию Z.

Лемма 1. *Если $U \in P$ и $|U| > 1$, то существуют такие $V \in P$ и $x \in U$, что $V \subset U$ и $y < x$ для любого $y \in V$.*

Доказательство (от противного). Пусть существует $U \in P$, $|U| > 1$, для которого не выполнено заключение леммы 1, тогда в U нет наибольшего элемента, иначе $V = U \setminus \{\max U\}$ искомое. Положим $P^* = \{V \in P : V \subset U\}$. Из сделанного предположения следует, что для любого $x \in U$ и каждого $V \in P^*$ получим $V \setminus [X_{<x}] = \varnothing$. Определим последовательности $\eta^i = \{V^i_j : j \in N^+\} \subset P^*$ и $\xi^i = \{x^i_j : j \in N^+\} \subset U$, где $i \in \{1, 2, \ldots, k, k+1\}$.

Выберем $V^i_1 \in P^*$ так, чтобы было: а) $V^i_1 \cap V^j_1 = \varnothing$ при $i, j \in \{1, 2, \ldots, k, k+1\}$, $i \neq j$ и б) $V^i_1 \subset U$, $i \in \{1, 2, \ldots, k, k+1\}$.

Фиксируем любые $x^i_1 \in V^i_1$ для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, k, k+1\}$. Пусть $l \in N^+$ и $V^i_l \in U$, $x^i_l \in U$, где $i \in \{1, 2, \ldots, k, k+1\}$, уже определены. Множество $U^i_{l+1} = V^i_1 \setminus [X < \max\{x^{-1}_l x^{-2}_l, \ldots, x^{-k}_l, x^{k+1}_l\}]$ не пусто и открыто в X. Выберем $V^i_{l+1} \in P$ и $x^i_{l+1} \in X$ так, что $[V^{-i}_{l+1}] \subset U^i_{l+1}$ и $x^i_{l+1} \in V^i_{l+1}$. Тогда $V^i_{l+1} \in P^*$ и $x^i_{l+1} \in U$ для любого $i \in \{1, 2, \ldots, k, k+1\}$. Построенные последовательности η^i и ξ^i обладают свойствами: в) $[V^i_{l+1}] \subset V$ при $j \in N^+$; г) $x^{i'}_{j'} < y$ для любого $y \in V_{ij}$ при $j' < j$ и $i', i \in \{1, 2, \ldots, k, k+1\}$. В силу счетной компактности X из в) следует, что η^i сходится к $F_i = \cap\eta^i$. Так как $x^i_j \in V^i_j$, то $[\xi^i] \cap F_i \neq \varnothing$. Фиксируем $y^i \in F_i \cap [\xi^i]$. По г) $x^i_j < y^i$ при $i', i \in \{1, 2, \ldots, k, k+1\}$, $j' \in N^+$, но $y^i \neq y^j$ при $i, j \in \{1, 2, \ldots, k, k+1\}$, $i \neq j$, т.к. $y^i \in V^i_1$ и $V^i_1 \cap V^j_1 = \varnothing$ при $i, j \in \{1, 2, \ldots, k, k+1\}$, $i \neq j$. Поэтому соотношение $[\xi^1 \cup \xi^2 \cup \xi^k, \cup \xi^{k+1}] \supset \{y^1, y^2, \ldots, y^k, y^{k+1}\}$ противоречит k-согласованности упорядочения $<$ на X.

Заметим, что если x — изолированная точка в X, то множество $X_{<x}$ замкнуто.

Лемма 2. *Если $U \in P$ и $|U| > 1$, то существуют такие $U' \in P$ и $U'' \in P$, что $U' \cup U'' \subset U$ и $x' < x''$ для любых $x' \in U'$, $x'' \in U''$.*

Доказательство. Применяя лемму 1 к U, получим $V_1 \in P$, $V_1 \subset U$ и $x_1 \in U$ такие, что $y < x_1$ для любого $y \in V_1$. Если $|V_1| = 1$, то $U' = V_1$ и $U'' = U \setminus X_{<=y}$, где $\{y\} = V_1$, искомые.

Пусть $|V_1| > 1$. На следующем шаге применим лемму 1 к V_1. Получим $V_2 \in P$ и $x_2 \in V_1$ такие, что $y < x_2$ для любого $y \in V_2$. Применяя описанную процедуру $k+1$ раз, получим $V_{k+1} \in P$ и $x_{k+1} \in V_k$ такие, что $y < x_{k+1}$ для любого $y \in V_{k+1}$. При $U = V_{k+1}$ имеем $x_{k+1} < x_k < \cdots < x_2 < x_1$. Поэтому $U'' = U \setminus [X_{x_{k+1}}] = \varnothing$. Множества U', U'' искомые.

Доказательство теоремы 6. Если существует $U \in P$, для которого $|U| = 1$, то заключение теоремы очевидно. Пусть $|U| > 1$ для любого $U \in P$. Так как X регулярно, то леммы 1 и 2 позволяют построить последовательности $\eta = \{U_i : i \in N^+\}$ и $\xi = \{V_i : i \in N^+\}$ в P такие, что при всех $i \in N^+$: 1) если $x \in U_i$ и $y \in V_i$, то $x < y$; 2) $U_{i+1} \cup [V_{i+1}] \subset V_i$. Положим $F = \cap\xi$ и $G = \cup\eta$. Из 2) и счетной компактности X следует, что ξ сходится к F. Но $U_{i+1} \subset V_i$, значит, и η сходится к F. По 1) $x < y$ при $x \in G$ и $y \in F$, $W = \cup\{X \setminus [X_{<x}] : x \in F\}$ открыто в X и $W \cap G = \varnothing$. Так как η сходится к F, то $F \not\subset W$. Значит, существует $x^* = \min F$. Пусть $A = [G] \cap F$, тогда $1 \le |A| \le K$. Выберем произвольную точку $x' \in A$. Далее построим последовательности $\eta' = \{U_i' : i \in N^+\}$ и $\xi' = \{V_i' : i \in N^+\}$ в P, $V_i' = V_1 \setminus (A \setminus \{x'\})$ и $U_1' = U_1$.

Пусть при всех $i < 1$ выбраны множества $V_i', U_i' \in P$, которые кроме 1), 2) удовлетворяют условию 3) $x' \in V_i'$. В силу регулярности пространства X существует $V \in P$ такое, что $x' \in V \subset [V] \subset V_{l-1}'$. Так как $x \notin [U_i]$ для любого $i \in N^+$, то существует такое $n \in N^+$, что $U_n \cap V \ne \varnothing$ и можно считать, что $n \ge 1$.

Множества $U_l' = U_n \cap V$, $V_l' = V_n \cap V \in P$ удовлетворяют условиям 1), 2), 3). Итак, последовательности ξ' и η' построены. Положим $F' = \cap\xi'$ и $G' = \cup\eta'$. Как и выше, последовательности ξ' и η' сходятся к F. $W' \supset F' \setminus \{x'\}$ открыто в X и $W' \cap G' \ne \varnothing$. Существует $\min F'$ и по условию 3) $\min F' = x'$. В силу выбора множества V_i' имеем $W' \supset F' \setminus \{x'\}$. Пусть $O_{x'} \in x'$, $O_{x'} \in P$. Тогда $O_{x'} \cup W' \supset F'$ и поэтому существует такое $i' \in N^+$, что $V_{i'} \subset O_{x'} \cup W'$. Значит, по 2) и $U_i' \subset O_{x'} \cup W'$ при всех $i > i'$. Но $U_i' \cap W_i' = \varnothing$, значит, $U_i' \subset O_{x'}$ для любого $i > i'$, т.е. последовательность η' сходится к x', что и требовалось доказать.

В работе [2] введено обозначение $\delta(x, X) \le \aleph_0$, если существует такое счетное центрированное семейство ξ открытых в X множеств, что $x \in \cap\{[U] :\in \xi\}$ и для любой окрестности O_x точки x в X существует такое $V \in \xi$, что $V \subset O_x$. Из доказательства теоремы 6 получается

Теорема 7. *Если X принадлежит классу $\Im(k)$, состоящему из k-растянутых, счетно компактных, регулярных T_1-пространств, то $[\{x \in X : \delta(x, X) \le \aleph_0\}] = X$.*

Следствие 2. Если $X \in \Im(k)$, то существуют такая последовательность $S = \{F_n : n \in N^+\}$ непустых замкнутых в X множеств F_n и такая точка $x \in X$, что последовательность S сходится к точке x и $\aleph(F_n, X) \le \aleph$ для любого $n \in N^+$.

Следствие 3. Если $X \in \Im(k)$ и $|X| \ge \aleph$, то в X имеется нетривиальная сходящаяся последовательность.

Доказательство. Если X не разрежено, то доказательство сводится к случаю, когда в X нет изолированных точек, а тогда заключение следует из теоремы 6. Если же X разрежено, то см. приложение 3 из работы [2].

Следствие 4. Если $X \in \Im(k)$, то множество точек счетного π характера в X всюду плотно в X.

Бикомпакт X называют *диадическим*, если он является непрерывным образом канторова куба D^τ при некотором $\tau \ge \aleph_0$.

Вполне регулярное пространство называют *диадическим*, если оно имеет диадическое бикомпактное расширение.

Следствие 5. Если $X \in \Im(k)$ и X диадично, то $\omega(X) \le \aleph_0$.

Базу топологического пространства называют *слабо нётеровской*, если каждый ее элемент содержится в качестве подмножества в не более чем счетном множестве других элементов из базы.

Пространство, имеющее слабо нётеровскую базу, называют *слабо нётеровским*.

Следствие 6. Слабо нётеровский k-растянутый бикомпакт метризуем, следовательно, α-растянут.

Следствие 7. Если бикомпакт D^{τ} k-растянут, то $\tau \leq \aleph_0$.

Следствие 8. Каждый k-растянутый диадический бикомпакт X метризуем, следовательно, α-растянут.

Следствие 8 справедливо, т.к. иначе X содержит топологическую копию $D_1^{\aleph}$.

Литература

1. Архангельский А.В. О топологиях, допускающих слабую связь с упорядочениями // ДАН СССР. – 1978. – Т. 238. – № 4. – С. 773–776.
2. Архангельский А.В. Об α-растянутых пространствах // ДАН СССР. – 1978. – Т. 239. – № 3. – С. 336–340.
3. Тюгашов Г.С. О P-растянутых пространствах // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 10. – С. 74–75.

Самарский архитектурно-строительный институт

Поступила 16.09.1994