ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 7 (530)

УДК 514.752:514.821

В.А. ГОРЬКАВЫЙ

О КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО С СОХРАНЕНИЕМ ГРАССМАНОВА ОБРАЗА

1. Введение

Данная статья посвящена изучению двумерных поверхностей в n-мерном пространстве Минковского M^n и их конформным G-преобразованиям. Отображение поверхностей $F^2 \to \widetilde{F}^2$ в M^n называется G-преобразованием, если в соответствующих точках поверхностей F^2 и $\widetilde{F}^2$ их касательные плоскости параллельны. Иначе говоря, G-преобразование характеризуется тем, что оно поточечно сохраняет грассманов образ поверхности. G-преобразование $F^2 \to \widetilde{F}^2$ называется конформным, если в соответствующих по отображению точках пропорциональны первые квадратичные формы поверхностей F^2 и $\widetilde{F}^2$. Тривиальными примерами конформных G-преобразований являются трансляции и гомотетии объемлющего пространства M^n.

Задача нахождения поверхностей в пространстве Минковского, допускающих нетривиальные непрерывные конформные G-деформации, мотивирована тем, что в евклидовом случае такие деформации допускаются только лишь минимальными поверхностями (напр., [1]). Частично этот результат подтверждается и в пространстве Минковского. А именно, доказано, что *если регулярная поверхность F^2 в M^n является пространственно- или времени-подобной, то она допускает нетривиальные непрерывные конформные G-деформации тогда и только тогда, когда ее средняя кривизна равна нулю.*

Что касается изотропных (светоподобных) поверхностей в M^n, то формулировка утверждения, аналогичная евклидовому случаю, требует уточнения. Метрика, индуцированная на изотропной поверхности F^2, является вырожденной, поэтому нельзя стандартным образом рассматривать такие элементы внешней геометрии F^2, как средняя кривизна. Предположение о том, что *любая* изотропная поверхность F^2 в M^n допускает нетривиальные непрерывные конформные G-деформации, также оказывается неверным при $n \geq 5$. А именно, доказано следующее классифицирующее утверждение.

Теорема. *Пусть F^2 — изотропная поверхность в пространстве Минковского M^n, заданная радиус-вектором $x = \rho(u^1, u^2)$ так, что индуцированная на F^2 метрика имеет вид $ds^2 = g_{22}(du^2)^2$, т. е. координатные линии $u^2 = \mathrm{const}$ на F^2 являются изотропными кривыми пространства M^n. Поверхность F^2 допускает нетривиальную непрерывную конформную G-деформацию тогда и только тогда, когда либо*

1) *$\partial_{u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho$, $\partial_{u^1u^1}\rho$ линейно зависимы, либо*
2) *$\partial_{u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho$, $\partial_{u^1u^1}\rho$ линейно независимы, а $\partial_{u^1u^2}\rho$ линейно зависит от них.*

В первом случае F^2 является нуль-линейчатой изотропной поверхностью, т. е. изотропные кривые $u^2 = \mathrm{const}$ на поверхности F^2 являются изотропными геодезическими объемлющего пространства Минковского — такой класс изотропных поверхностей хорошо исследован в литературе как самый простой и естественный (см. [2]–[4] и содержащиеся в этих работах ссылки). Во втором случае речь идет об изотропных поверхностях в M^n, не являющихся нуль-линейчатыми,

— эти поверхности названы в данной статье сильно изотропными; такие поверхности рассматривались ранее, например, в работах К.В. Ильенко [4], [5]. Исходя из соображений размерности, не составляет особого труда увидеть, что в M^3 любая изотропная поверхность является нуль-линейчатой; в M^4 любая изотропная поверхность является либо нуль-линейчатой, либо сильно-изотропной, причем второй класс является более общим; в M^n, $n \geq 5$, нуль-линейчатые и сильно изотропные поверхности образуют специальные классы изотропных поверхностей, а в ситуации общего положения изотропная поверхность F^2 в M^n, $n \geq 5$, не является ни нуль-линейчатой, ни сильно-изотропной.

Таким образом, *нуль-линейчатые изотропные поверхности и сильно-изотропные поверхности могут рассматриваться как аналоги пространственно- и времени-подобных поверхностей с нулевой средней кривизной.* Приведем дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют радиус-векторы $x = \rho(u^1, u^2)$ этих поверхностей в соответствующих специальных системах координат [6].

Перечислим четыре класса поверхностей и соответствующие им условия для радиус-векторов:

$$\partial_{u^1 u^1}\rho + \partial_{u^2 u^2}\rho = 0,$$
$$\langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^1}\rho \rangle = \langle \partial_{u^2}\rho, \partial_{u^2}\rho \rangle, \quad \langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^2}\rho \rangle = 0$$

— пространственно-подобная поверхность и изотермические координаты;

$$\partial_{u^1 u^1}\rho - \partial_{u^2 u^2}\rho = 0,$$
$$\langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^1}\rho \rangle = -\langle \partial_{u^2}\rho, \partial_{u^2}\rho \rangle, \quad \langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^2}\rho \rangle = 0$$

— времени-подобная поверхность и изотермические координаты;

$$\partial_{u^1 u^2}\rho = P\partial_{u^1}\rho + Q\partial_{u^2}\rho,$$
$$\langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^1}\rho \rangle = 0, \quad \langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^2}\rho \rangle = 0$$

— сильно изотропная поверхность и лиувилевы координаты;

$$\partial_{u^1 u^1}\rho = 0,$$
$$\langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^1}\rho \rangle = 0, \quad \langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^2}\rho \rangle = 0$$

— нуль-линейчатая изотропная поверхность.

Интересной проблемой представляется построение геометрической вариационной задачи, экстремалями которой наряду с времени- и пространственно-подобными поверхностями нулевой средней кривизны являются нуль-линейчатые и сильно изотропные поверхности [7], [8].

В первой части работы подробно описываются конформные G-преобразования пространственно-подобных, времени-подобных и изотропных поверхностей. Затем рассмотрены преобразования Лапласа сильно изотропных поверхностей и связанная с ними трактовка изотропных двумерных поверхностей как каустик трехмерных нуль-линейчатых изотропных подмногообразий в M^n. Завершает статью набор конкретных примеров изотропных поверхностей в пространствах Минковского, в том числе сильно изотропных.

2. Общие конформные G-преобразования

Введем в n-мерном пространстве Минковского M^n стандартные координаты $x^0, \ldots, x^{n-1}$, в которых метрика M^n запишется в виде $d\sigma^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - \cdots - (dx^{n-1})^2$. Рассмотрим регулярную двумерную поверхность F^2 в M^n, заданную параметрически радиус-вектором

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ \ldots \\ x^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^0(u^1, u^2) \\ \ldots \\ \rho^{n-1}(u^1, u^2) \end{pmatrix} = \rho(u^1, u^2).$$

Касательная плоскость T_PF^2 к F^2 в точке $P \in F^2$ натянута на векторы $\partial_{u^1}\rho$ и $\partial_{u^2}\rho$. Индуцированная метрика на F^2 имеет вид $ds^2 = g_{ij}du^idu^j$, где $g_{ij} = \langle \partial_{u^i}\rho, \partial_{u^j}\rho \rangle$ — скалярные произведения в M^n.

Пусть поверхность F^2 преобразуется в поверхность $\widetilde{F}^2$ с радиус-вектором $\widetilde{\rho}(u^1, u^2)$. Предположим, что касательные плоскости поверхностей F^2 и $\widetilde{F}^2$ в соответствующих точках параллельны, т. е. выполнены соотношения

$$\partial_{u^1}\widetilde{\rho} = A\partial_{u^1}\rho + B\partial_{u^2}\rho, \tag{1}$$

$$\partial_{u^2}\widetilde{\rho} = C\partial_{u^1}\rho + D\partial_{u^2}\rho, \tag{2}$$

где A, B, C, D — некоторые функции от u^1, u^2. По аналогии с евклидовым случаем, будем говорить, что в данной ситуации имеет место G-преобразование $F^2 \to \widetilde{F}^2$. Очевидно, параллельный перенос и гомотетия в M^n являются G-преобразованиями для любой поверхности, будем называть их тривиальными G-преобразованиями. В этих случаях $A = D = 1$, $B = C = 0$ и $A = D = \mathrm{const}$, $B = C = 0$ соответственно. Кроме тривиальных могут также существовать и нетривиальные G-преобразования, изучение которых представляет отдельный интерес. Наличие нетривиальных G-преобразований определяется ограничениями на коэффициенты A, B, C, D, вытекающими из условия совместности $\partial_{u^1u^2}\widetilde{\rho} = \partial_{u^2u^1}\widetilde{\rho}$ уравнений (1)–(2). Это условие записывается следующим образом:

$$(\partial_{u^2}A - \partial_{u^1}C)\partial_{u^1}\rho + (\partial_{u^2}B - \partial_{u^1}D)\partial_{u^2}\rho - C\partial_{u^1u^1}\rho + (A - D)\partial_{u^1u^2}\rho + B\partial_{u^2u^2}\rho = 0. \tag{3}$$

Как следствие, в общем случае будем иметь набор дифференциальных и алгебраических уравнений для нахождения A, B, C, D, количество которых определяется линейными зависимостями между векторами $\partial_{u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho$, $\partial_{u^1u^1}\rho$, $\partial_{u^1u^2}\rho$, $\partial_{u^2u^2}\rho$. Следует также учесть и условие регулярности G-преобразования

$$AD - BC \neq 0. \tag{4}$$

Предположим теперь, что рассматриваемое G-преобразование обладает дополнительным свойством конформности — метрика $d\widetilde{s}^2 = \widetilde{g}_{ij}du^idu^j$ поверхности $\widetilde{F}^2$ пропорциональна метрике исходной поверхности F^2, т. е.

$$\frac{\widetilde{g}_{11}}{g_{11}} = \frac{\widetilde{g}_{12}}{g_{12}} = \frac{\widetilde{g}_{22}}{g_{22}}. \tag{5}$$

Учитывая (1)–(2), получаем следующие условия для коэффициентов A, B, C, D:

$$\frac{A^2g_{11} + 2ABg_{12} + B^2g_{22}}{g_{11}} = \frac{ACg_{11} + (AD + CB)g_{12} + BDg_{22}}{g_{12}} = \frac{C^2g_{11} + 2CDg_{12} + D^2g_{22}}{g_{22}}. \tag{6}$$

Таким образом, существование и количество конформных G-преобразований заданной поверхности $F^2 \subset M^n$ определяется разрешимостью системы уравнений (3)–(4) и (6) относительно функций A, B, C, D. В ситуации общего положения имеются только тривиальные решения, но в отдельных случаях появляются конечные наборы нетривиальных решений, а иногда даже и непрерывные семейства нетривиальных решений — в этом случае можно говорить о непрерывной конформной G-деформации поверхности F^2. Выясним, когда у системы (3)–(4), (6) существует непрерывное семейство нетривиальных решений $A(u^1, u^2; \varepsilon)$, $B(u^1, u^2; \varepsilon)$, $C(u^1, u^2; \varepsilon)$, $D(u^1, u^2; \varepsilon)$, где ε — параметр семейства. При этом естественно считать

$$A(u^1, u^2; 0) = 1, \quad B(u^1, u^2; 0) = 0, \quad C(u^1, u^2; 0) = 0, \quad D(u^1, u^2; 0) = 1. \tag{7}$$

Проанализируем ситуацию, рассмотрев отдельно случаи, когда F^2 является пространственно-подобной, времени-подобной и изотропной.

3. Пространственно-подобные поверхности

Предположим, что поверхность F^2 пространственно-подобна, т. е. на F^2 индуцируется отрицательно определенная метрика: $g_{11} < 0$, $g_{22} < 0$, $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$. Не уменьшая общности, будем предполагать, что координаты u^1, u^2 на F^2 являются изотермическими, т. е. метрика на F^2 имеет вид $ds^2 = -\lambda^2((du^1)^2 + (du^2)^2)$ — такие координаты всегда можно ввести на пространственно-подобной поверхности. В этом случае уравнения (6) перепишутся в виде

$$A^2 + B^2 = C^2 + D^2, \quad AC + BD = 0.$$

С учетом (7) записанные уравнения разрешаются следующим образом:

$$A = \Lambda\cos\alpha, \quad B = \Lambda\sin\alpha, \quad C = -\Lambda\sin\alpha, \quad D = \Lambda\cos\alpha, \tag{8}$$

здесь $\Lambda(u^1, u^2; \varepsilon) > 0$, $\alpha(u^1, u^2; \varepsilon)$ — произвольные функции, принимающие при $\varepsilon = 0$ значения $\Lambda(u^1, u^2; 0) = 1$, $\alpha(u^1, u^2; 0) = 0$. Подставляя найденные коэффициенты в (3), получаем условие на Λ и α

$$\sin\alpha(\partial_{u^1u^1}\rho + \partial_{u^2u^2}\rho) + \big((\partial_{u^2}\ln\Lambda + \partial_{u^1}\alpha)\cos\alpha + (\partial_{u^1}\ln\Lambda - \partial_{u^2}\alpha)\sin\alpha\big)\partial_{u^1}\rho +$$
$$+ \big((\partial_{u^2}\ln\Lambda + \partial_{u^1}\alpha)\sin\alpha - (\partial_{u^1}\ln\Lambda - \partial_{u^2}\alpha)\cos\alpha\big)\partial_{u^2}\rho = 0. \tag{9}$$

Ввиду изотермичности координат u^1, u^2 из деривационных формул Гаусса–Вейнгартена следует, что $\partial_{u^1u^1}\rho + \partial_{u^2u^2}\rho$ равняется в точности вектору средней кривизны пространственно-подобной поверхности F^2. Как следствие, если средняя кривизна отлична от нуля, то $\partial_{u^1u^1}\rho + \partial_{u^2u^2}\rho$ не зависит линейно от касательных векторов $\partial_{u^1}\rho$ и $\partial_{u^2}\rho$, а значит, решением (9) будет $\alpha = 0$, $\Lambda = \text{const}$, что соответствует тривиальной деформации $A = D = \text{const}$, $B = C = 0$. Поэтому необходимым условием существования нетривиальной деформации является равенство нулю средней кривизны F^2, т. е.

$$\partial_{u^1u^1}\rho + \partial_{u^2u^2}\rho = 0. \tag{10}$$

Таким образом, имеет место

Утверждение 1. *Если пространственно-подобная поверхность F^2 в M^n допускает непрерывную нетривиальную конформную G-деформацию, то средняя кривизна F^2 равна нулю.*

Если средняя кривизна равна нулю, т. е. выполнено равенство (10), то условие (9) можно переписать в виде

$$\partial_{u^2}\ln\Lambda + \partial_{u^1}\alpha = 0,$$
$$\partial_{u^1}\ln\Lambda - \partial_{u^2}\alpha = 0.$$

Иначе говоря, $\ln\Lambda$ и α — произвольные сопряженные гармонические функции. Поэтому, в дополнение к утверждению 1, имеет место

Утверждение 2. *Пространственно-подобная поверхность $F^2 \subset M^n$ с нулевой средней кривизной допускает непрерывные нетривиальные конформные G-деформации. В терминах изотермических координат на F^2 каждое G-преобразование представляется парой сопряженных гармонических функций.*

Чтобы построить нетривиальную непрерывную конформную G-деформацию рассматриваемой поверхности, возьмем произвольное непрерывное семейство пар сопряженных гармонических функций $\ln\Lambda(u^1, u^2; \varepsilon)$, $\alpha(u^1, u^2; \varepsilon)$ такое, что $\ln\Lambda(u^1, u^2; 0) = 0$ и $\alpha(u^1, u^2; 0) = 0$. Используя сначала соотношения (8), а затем полную совместную систему дифференциальных уравнений (1)–(2), при каждом ε будем получать пространственно-подобную поверхность F^2_ε с нулевой средней кривизной, параметризованную изотермическими координатами u^1, u^2.

4. Времени-подобные поверхности

Предположим, что поверхность F^2 времени-подобна, т. е. метрика поверхности является знакопеременной, $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 < 0$, $g_{11} > 0$, $g_{22} < 0$. Не уменьшая общности, будем считать, что координаты u^1, u^2 на F^2 являются изотермическими, т. е. метрика имеет вид $ds^2 = \lambda^2((du^1)^2 - (du^2)^2)$ — такие координаты всегда можно ввести на времени-подобной поверхности. Уравнения (6) перепишутся следующим образом:

$$A^2 - B^2 = -C^2 + D^2, \quad AC - BD = 0.$$

С учетом (7) решения записанных уравнений представляются в форме

$$A = \Lambda \operatorname{ch} \alpha, \quad B = \Lambda \operatorname{sh} \alpha, \quad C = \Lambda \operatorname{sh} \alpha, \quad D = \Lambda \operatorname{ch} \alpha; \tag{11}$$

здесь $\Lambda(u^1, u^2; \varepsilon) > 0$, $\alpha(u^1, u^2; \varepsilon)$ — произвольные функции, принимающие при $\varepsilon = 0$ значения $\Lambda(u^1, u^2; 0) = 1$, $\alpha(u^1, u^2; 0) = 0$. Подставляя найденные коэффициенты в (3), получаем условие на Λ и α

$$\begin{aligned} -\operatorname{sh}\alpha(\partial_{u^1u^1}\rho - \partial_{u^2u^2}\rho) + ((\partial_{u^2}\ln\Lambda - \partial_{u^1}\alpha)\operatorname{ch}\alpha + (-\partial_{u^1}\ln\Lambda + \partial_{u^2}\alpha)\operatorname{sh}\alpha)\partial_{u^1}\rho + \\ + ((\partial_{u^2}\ln\Lambda - \partial_{u^1}\alpha)\operatorname{sh}\alpha + (-\partial_{u^1}\ln\Lambda + \partial_{u^2}\alpha)\operatorname{ch}\alpha)\partial_{u^2}\rho = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

В виду изотермичности координат u^1, u^2 из деривационных формул Гаусса–Вейнгартена следует, что $\partial_{u^1u^1}\rho - \partial_{u^2u^2}\rho$ равняется вектору средней кривизны времени-подобной поверхности F^2. Как следствие, если средняя кривизна отлична от нуля, то $\partial_{u^1u^1}\rho - \partial_{u^2u^2}\rho$ не зависит линейно от касательных векторов $\partial_{u^1}\rho$ и $\partial_{u^2}\rho$, а значит, решением (12) будет $\alpha = 0$, $\Lambda = \mathrm{const}$, что соответствует тривиальной деформации $A = D = \mathrm{const}$, $B = C = 0$. Поэтому необходимым условием существования нетривиальной деформации является равенство нулю средней кривизны F^2, т. е.

$$\partial_{u^1u^1}\rho - \partial_{u^2u^2}\rho = 0. \tag{13}$$

Таким образом, имеет место

Утверждение 3. *Если времени-подобная поверхность $F^2 \subset M^n$ допускает непрерывную нетривиальную конформную G-деформацию, то средняя кривизна F^2 равна нулю.*

Если средняя кривизна равна нулю, т. е. выполнено равенство (13), то условие (12) можно записать в форме

$$\partial_{u^2}\ln\Lambda - \partial_{u^1}\alpha = 0, \quad \partial_{u^1}\ln\Lambda - \partial_{u^2}\alpha = 0.$$

Эта система легко интегрируется

$$\alpha = p(u^1 + u^2) + q(u^1 - u^2), \quad \ln\Lambda = p(u^1 + u^2) - q(u^1 - u^2),$$

где $p(t)$ и $q(\tau)$ – пара произвольных функций. Поэтому в дополнение к утверждению 3 имеет место

Утверждение 4. *Времени-подобная поверхность $F^2 \subset M^n$ с нулевой средней кривизной допускает непрерывные нетривиальные конформные G-деформации. Каждое конформное G-преобразование в терминах изотермических координат на F^2 представляется парой функций одной переменной.*

Чтобы построить нетривиальную непрерывную конформную G-деформацию рассматриваемой поверхности, возьмем произвольное непрерывное семейство функций $p(t; \varepsilon)$, $q(\tau; \varepsilon)$ такое, что $p(t; 0) = 0$ и $q(\tau; 0) = 0$. Используя сначала соотношения (11), а затем полную совместную систему дифференциальных уравнений (1)–(2), при каждом ε будем получать времени-подобную поверхность F_ε^2 с нулевой средней кривизной, параметризованную изотермическими координатами u^1, u^2.

5. Изотропные поверхности

Предположим, что регулярная поверхность F^2 изотропна (светоподобна), т. е. метрика поверхности вырождена, $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 0$. В каждой точке $P \in F^2$ в касательной плоскости T_PF^2 однозначно определено изотропное направление. Как следствие, F^2 расслаивается в однопараметрическое семейство изотропных кривых. Не уменьшая общности, будем предполагать, что координаты u^1, u^2 на F^2 введены так, что координатные линии $u^2 = \mathrm{const}$ являются изотропными. Тогда метрика поверхности примет вид $ds^2 = g_{22}(du^2)^2$, т. е.

$$g_{11} = \langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^1}\rho \rangle = 0, \quad g_{12} = \langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^2}\rho \rangle = 0. \tag{14}$$

Следует отметить, что при произвольной регулярной замене координат $u^1 = u^1(\widehat{u}^1, \widehat{u}^2)$, $u^2 = u^2(\widehat{u}^2)$, семейство координатных линий $\widehat{u}^2 = \mathrm{const}$ на F^2 будет представлено теми же изотропными кривыми, а метрика все так же будет иметь вид $ds^2 = \widehat{g}_{22}(d\widehat{u}^2)^2$.

При таком выборе координат условие (6) будет выполнено тогда и только тогда, когда

$$B = 0. \tag{15}$$

Иначе говоря, в данной ситуации условие конформности (6) означает, что при G-преобразовании $F^2 \to \widetilde{F}^2$ изотропные линии на светоподобной поверхности F^2 перейдут в изотропные линии на светоподобной поверхности $\widetilde{F}^2$.

Подставляя (15) в (3), получаем

$$(\partial_{u^2}A - \partial_{u^1}C)\partial_{u^1}\rho - \partial_{u^1}D\partial_{u^2}\rho - C\partial_{u^1u^1}\rho + (A - D)\partial_{u^1u^2}\rho = 0. \tag{16}$$

При этом ни A, ни D не должны обращаться в нуль в виду условия регулярности (4).

Если векторы $\partial_{u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho$, $\partial_{u^1u^1}\rho$ и $\partial_{u^1u^2}\rho$ линейно независимы, то решением уравнения (16) будут функции $C = 0$, $A = D = \mathrm{const}$, что соответствует тривиальному конформному G-преобразованию. Поэтому имеет место

Утверждение 5. *Если изотропная поверхность F^2 в M^n с радиус-вектором $x = \rho(u^1, u^2)$ и метрикой $ds^2 = g_{22}(du^2)^2$ допускает нетривиальные конформные G-преобразования, то векторы $\partial_{u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho$, $\partial_{u^1u^1}\rho$ и $\partial_{u^1u^2}\rho$ линейно зависимы.*

Полученное условие для радиус-вектора $\rho(u^1, u^2)$ инвариантно относительно упомянутых выше координатных преобразований на F^2, сохраняющих изотропность одного семейства координатных линий. Ограничительность этого условия зависит от размерности объемлющего пространства.

Лемма 1. *Пусть F^2 — изотропная поверхность в n-мерном пространстве Минковского M^n. Предположим, что F^2 задана радиус-вектором $\rho(u^1, u^2)$ так, что координатные линии $u^2 = \mathrm{const}$ изотропны, т. е. метрика поверхности имеет вид $ds^2 = g_{22}(du^2)^2$. Тогда*

1) *$\partial_{u^1u^1}\rho$ и $\partial_{u^1u^2}\rho$ линейно зависят от $\partial_{u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho$ при $n = 3$,*
2) *$\partial_{u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho$, $\partial_{u^1u^1}\rho$ и $\partial_{u^1u^2}\rho$ линейно зависимы при $n = 4$.*

Доказательство. Координаты на изотропной поверхности F^2 выбраны так, что

$$\langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^1}\rho \rangle = 0, \tag{17}$$
$$\langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^2}\rho \rangle = 0. \tag{18}$$

Продифференцировав каждое из этих тождеств, легко получить следующие равенства:

$$\langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^1u^1}\rho \rangle = 0, \tag{19}$$
$$\langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^1u^2}\rho \rangle = 0, \tag{20}$$
$$\langle \partial_{u^2}\rho, \partial_{u^1u^1}\rho \rangle = 0, \tag{21}$$
$$\langle \partial_{u^2}\rho, \partial_{u^1u^2}\rho \rangle + \langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^2u^2}\rho \rangle = 0.$$

В частности, из (17)–(20) следует, что $\partial_{u^2}\rho$, $\partial_{u^1u^1}\rho$ и $\partial_{u^1u^2}\rho$ ортогональны изотропному вектору $\partial_{u^1}\rho$. С другой стороны, подпространство векторов, ортогональных данному изотропному вектору, имеет размерность $n-1$ и содержит сам этот вектор. Поэтому, если $n=3$, то $\partial_{u^1u^1}\rho$ и $\partial_{u^1u^2}\rho$ являются линейными комбинациями векторов $\partial_{u^1}\rho$ и $\partial_{u^2}\rho$.

Если $n=4$, то подпространство векторов, ортогональных к $\partial_{u^1}\rho$, трехмерно, а значит содержащиеся в нем векторы $\partial_{u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho$, $\partial_{u^1u^1}\rho$ и $\partial_{u^1u^2}\rho$ обязаны быть линейно зависимыми.

Если $n>4$, то размерность подпространства векторов, ортогональных к $\partial_{u^1}\rho$, не меньше 4. Поэтому в ситуации общего положения $\partial_{u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho$, $\partial_{u^1u^1}\rho$ и $\partial_{u^1u^2}\rho$ линейно независимы. Однако в отдельных случаях между этими векторами могут возникать линейные зависимости, что приводит к выделению специальных классов изотропных поверхностей в M^n. $\square$

Учитывая вышесказанное и отталкиваясь от взаимозависимостей между $\partial_{u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho$, $\partial_{u^1u^1}\rho$ и $\partial_{u^1u^2}\rho$, с локальной точки зрения можно выделить три класса изотропных поверхностей:

А) $\partial_{u^1u^1}\rho$ линейно зависит от $\partial_{u^1}\rho$ и $\partial_{u^2}\rho$,

Б) $\partial_{u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho$ и $\partial_{u^1u^1}\rho$ линейно независимы, а $\partial_{u^1u^2}\rho$ линейно зависит от них,

В) $\partial_{u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho$, $\partial_{u^1u^1}\rho$ и $\partial_{u^1u^2}\rho$ линейно независимы.

В последнем случае любое конформное G-преобразование является тривиальным в силу утверждения 5. Поэтому в дальнейшем проанализируем первые два класса поверхностей.

5.1. *Линейчатые изотропные поверхности.* Предположим, что вектор $\partial_{u^1u^1}\rho$ линейно зависит от $\partial_{u^1}\rho$ и $\partial_{u^2}\rho$, т. е.

$$\partial_{u^1u^1}\rho = P\partial_{u^1}\rho + Q\partial_{u^2}\rho. \tag{22}$$

Принимая во внимание ортогональность $\partial_{u^1u^1}\rho$ и $\partial_{u^2}\rho$, выраженную равенством (21), получаем $Q=0$. Поэтому вместо (22) можем записать

$$\partial_{u^1u^1}\rho = P\partial_{u^1}\rho. \tag{23}$$

Последнее равенство означает, что изотропные кривые $u^2=\mathrm{const}$ являются нуль-геодезическими пространства Минковского M^n, т. е. в этом случае изотропная поверхность F^2 является нуль-линейчатой. Как следует из леммы 1, в M^3 любая изотропная поверхность является нуль-линейчатой. Напротив, в M^n, $n>3$, такие поверхности образуют достаточно узкий специальный класс. Нуль-линейчатые изотропные поверхности имеют простую структуру, они интенсивно исследовались ранее [2]–[4].

Подобрав замену координат $u^1=u^1(\widehat{u}^1,\widehat{u}^2)$, $u^2=u^2(\widehat{u}^2)$, можно переписать (23) в виде

$$\partial_{\hat{u}^1\hat{u}^1}\rho = 0. \tag{24}$$

Не уменьшая общности, можно считать, что именно такие координаты на F^2 и были выбраны изначально. Уравнение (24) легко интегрируется, $\rho=\xi(u^2)u^1+\eta(u^2)$, при этом вектор-функции $\xi(u^2)$ и $\eta(u^2)$ обязаны удовлетворять соотношениям (14), принимающим теперь вид $\langle\xi,\xi\rangle=0$, $\langle\xi,\eta'\rangle=0$. Кроме того, ξ и $\xi'u^1+\eta'$ обязаны быть линейно независимыми в виду регулярности поверхности F^2.

Возвращаясь к уравнениям (16), получаем

$$\xi(\partial_{u^2}A-\partial_{u^1}C)-\eta'\partial_{u^1}D-\xi'(\partial_{u^1}Du^1+D-A)=0. \tag{25}$$

Нетривиальная разрешимость этого уравнения определяется отсутствием или наличием линейных зависимостей между ξ, ξ' и η'.

5.2. *Сильно изотропные поверхности.* Предположим, что во всех точках поверхности F^2 векторы $\partial_{u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho$ и $\partial_{u^1u^1}\rho$ линейно независимы, а $\partial_{u^1u^2}\rho$ зависит от них, т. е.

$$\partial_{u^1u^2}\rho = P\partial_{u^1}\rho + Q\partial_{u^2}\rho + R\partial_{u^1u^1}\rho. \tag{26}$$

В этой ситуации изотропную поверхность F^2 будем называть сильно изотропной. Легко видеть, что F^2 уже не является нуль-линейчатой. Кроме того, коэффициент R в разложении (26) можно обратить в нуль, сделав подходящую замену координат $u^1 = u^1(\widehat{u}^1, \widehat{u}^2)$, $u^2 = u^2(\widehat{u}^2)$ на F^2. Не уменьшая общности, будем считать, что именно такие специальные координаты на F^2 и были зафиксированы с самого начала, т. е.

$$\partial_{u^1 u^2}\rho = P\partial_{u^1}\rho + Q\partial_{u^2}\rho. \tag{27}$$

Выбранные координаты u^1 и u^2 на F^2, которые будем называть лиувиллевыми, определены однозначно с точностью до шкалирующих преобразований $u^1 \to \widetilde{u}^1(u^1)$, $u^2 \to \widetilde{u}^2(u^2)$. Учитывая (17)–(21), не составляет труда вычислить коэфициенты разложения (27):

$$P = \frac{\langle \partial_{u^1 u^1 u^2}\rho, \partial_{u^1 u^1}\rho\rangle}{\langle \partial_{u^1 u^1}\rho, \partial_{u^1 u^1}\rho\rangle}, \quad Q = \frac{\langle \partial_{u^1 u^2}\rho, \partial_{u^2}\rho\rangle}{\langle \partial_{u^2}\rho, \partial_{u^2}\rho\rangle}.$$

Именно этот класс нелинейчатых изотропных поверхностей был рассмотрен, например, в [4], [5].

Утверждение 6. *Сильно изотропная поверхность F^2 в M^n допускает непрерывные нетривиальные конформные G-деформации. Каждое регулярное конформное G-преобразование переводит F^2 в сильно изотропную поверхность $\widetilde{F}^2$, при этом лиувиллевы координаты на F^2 переходят в лиувиллевы координаты на $\widetilde{F}^2$.*

Доказательство. С учетом (27) перепишем условие (16)

$$(\partial_{u^2}A - \partial_{u^1}C + P(A-D))\partial_{u^1}\rho + (Q(A-D) - \partial_{u^1}D)\partial_{u^2}\rho - C\partial_{u^1 u^1}\rho = 0.$$

Поскольку $\partial_{u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho$ и $\partial_{u^1 u^1}\rho$ линейно независимы, получаем $C = 0$, а необращающиеся в нуль функции A и D являются решением системы

$$\partial_{u^2}A = P(D-A), \tag{28.1}$$

$$\partial_{u^1}D = Q(A-D). \tag{28.2}$$

Очевидно, у этой системы имеется много решений, отличных от $A = D = \mathrm{const}$, а это означает, что рассматриваемая сильно изотропная поверхность F^2 допускает много нетривиальных конформных G-преобразований, из которых можно образовывать непрерывные нетривиальные конформные G-деформации.

Предположим теперь, что известно некоторое нетривиальное решение A, D системы (28). Тогда можно построить нетривиальное конформное G-преобразование $\psi : F^2 \to \widetilde{F}^2$ поверхности F^2, проинтегрировав систему совместных уравнений (1)–(2), которая в данном случае имеет вид

$$\partial_{u^1}\widetilde{\rho} = A\partial_{u^1}\rho, \tag{29.1}$$

$$\partial_{u^2}\widetilde{\rho} = D\partial_{u^2}\rho. \tag{29.2}$$

Выясним свойства преобразованной поверхности $\widetilde{F}^2$, заданной радиус-вектором $\widetilde{\rho}(u^1, u^2)$. Прежде всего, легко видеть, что $\widetilde{F}^2$ является изотропной, координатные линии $u^2 = \mathrm{const}$ на $\widetilde{F}^2$ изотропны, а метрика имеет вид $d\widetilde{s}^2 = \widetilde{g}_{22}(du^2)^2$, где $\widetilde{g}_{22} = g_{22}D^2$. Далее, дифференцируя (29.1) и учитывая (28.1), получаем

$$\partial_{u^1 u^1}\widetilde{\rho} = \partial_{u^1}A\partial_{u^1}\rho + A\partial_{u^1 u^1}\rho, \tag{30}$$

$$\partial_{u^1 u^2}\widetilde{\rho} = PD\partial_{u^1}\rho + QA\partial_{u^2}\rho. \tag{31}$$

Из (29)–(30) следует, что $\partial_{u^1}\widetilde{\rho}$, $\partial_{u^2}\widetilde{\rho}$ и $\partial_{u^1 u^1}\widetilde{\rho}$ линейно независимы. Кроме того, находя $\partial_{u^1}\rho$ и $\partial_{u^2}\rho$ из (29) и подставляя в (31), получаем

$$\partial_{u^1 u^2}\widetilde{\rho} = \widetilde{P}\partial_{u^1}\widetilde{\rho} + \widetilde{Q}\partial_{u^2}\widetilde{\rho},$$

где $\widetilde{P} = P\frac{D}{A}$ и $\widetilde{Q} = Q\frac{A}{D}$. Как следствие, поверхность $\widetilde{F}^2$ является сильно изотропной, координаты u^1 и u^2 на $\widetilde{F}^2$ являются лиувиллевыми, а радиус-вектор $\widetilde{\rho}$ поверхности $\widetilde{F}^2$ удовлетворяет уравнению вида (27), как и радиус-вектор ρ поверхности F^2, но уже с коэффициентами $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$. □

6. Преобразования Лапласа сильно изотропных поверхностей

Для изученной выше сильно изотропной поверхности F^2, представленной в лиувиллевых координатах радиус-вектором $\rho(u^1, u^2)$, рассмотрим преобразование $L : F^2 \to \widehat{F}^2$, задаваемое в виде

$$\widehat{\rho} = \rho - \frac{1}{Q}\partial_{u^1}\rho. \tag{32}$$

Отображение L определено поверхностью F^2 однозначно, поскольку вектор $\frac{1}{Q}\partial_{u^1}\rho$ не изменяется при шкалирующих преобразованиях координат $u^1 \to \overline{u}^1(u^1)$, $u^2 \to \overline{u}^2(u^2)$, сохраняющих лиувиллевость. В соответствии с традиционной терминологией [9] отображение L называется преобразованием Лапласа поверхности F^2. Естественно такое преобразование возможно в случае, когда коэффициент Q из разложения (27) не обращается в нуль. Дифференцируя (32) и принимая во внимание (27), получаем

$$\partial_{u^1}\widehat{\rho} = \left(1 + \frac{\partial_{u^1}Q}{Q^2}\right)\partial_{u^1}\rho - \frac{1}{Q}\partial_{u^1u^1}\rho, \tag{33.1}$$

$$\partial_{u^2}\widehat{\rho} = \left(\frac{\partial_{u^2}Q}{Q^2} - \frac{P}{Q}\right)\partial_{u^1}\rho. \tag{33.2}$$

Как следствие, преобразованная поверхность $\widehat{F}^2$ с радиус-вектором $\widehat{\rho}$ будет регулярной тогда и только тогда, когда $\partial_{u^2}Q - PQ$ не обращается в нуль. Более того, легко видеть, учитывая (17) и (19), что $\widehat{F}^2$ будет изотропной, координатные линии $u^1 = \mathrm{const}$ на $\widehat{F}^2$ являются изотропными кривыми, а метрика $\widehat{F}^2$ имеет вид $d\widehat{s}^2 = \widehat{g}_{11}(du^1)^2$, где $\widehat{g}_{11} = \langle\partial_{u^1u^1}\rho, \partial_{u^1u^1}\rho\rangle/Q^2$. Продифференцировав (33.2) по u^2, получим

$$\partial_{u^2u^2}\widehat{\rho} = \left(\partial_{u^2}\left(\frac{\partial_{u^2}Q}{Q^2} - \frac{P}{Q}\right) + P\left(\frac{\partial_{u^2}Q}{Q^2} - \frac{P}{Q}\right)\right)\partial_{u^1}\rho + \left(\frac{\partial_{u^2}Q}{Q} - P\right)\partial_{u^2}\rho.$$

Отсюда вытекает, что $\partial_{u^1}\widehat{\rho}$, $\partial_{u^2}\widehat{\rho}$ и $\partial_{u^2u^2}\widehat{\rho}$ линейно независимы, поскольку $\partial_{u^2}Q - PQ \neq 0$ в виду предположения о регулярности $\widehat{F}^2$. Наконец, продифференцировав (33.2) по u^1 и подставив в полученное равенство выражения для $\partial_{u^1}\rho$ и $\partial_{u^1u^1}\rho$ в терминах $\partial_{u^1}\widehat{\rho}$ и $\partial_{u^2}\widehat{\rho}$, имеем

$$\partial_{u^1u^2}\widehat{\rho} = \widehat{P}\partial_{u^1}\widehat{\rho} + \widehat{Q}\partial_{u^2}\widehat{\rho},$$

где

$$\widehat{P} = P - \frac{\partial_{u^2}Q}{Q}, \quad \widehat{Q} = \frac{Q^2\partial_{u^2}Q - \partial_{u^1}Q\partial_{u^2}Q - Q^3P + Q\partial_{u^1u^2}Q - Q^2\partial_{u^1}P}{Q(\partial_{u^2}Q - PQ)}.$$

Следовательно, преобразованная поверхность $\widehat{F}^2$ является сильно изотропной, а координаты u^1 и u^2 на $\widehat{F}^2$ будут лиувиллевыми.

Утверждение 7. *Регулярное преобразование Лапласа $L : F^2 \to \widehat{F}^2$ переводит сильно изотропную поверхность F^2, параметризованную лиувиллевыми координатами, в сильно изотропную поверхность $\widehat{F}^2$, также параметризованную лиувиллевыми координатами.*

Следует подчеркнуть, что если изотропными линиями на F^2 были кординатные кривые $u^2 = \mathrm{const}$, то на преобразованной поверхности $\widehat{F}^2$ изотропными линиями будут уже координатные кривые $u^1 = \mathrm{const}$.

Отметим, что рассмотренное преобразование Лапласа не является G-преобразованием, поскольку касательные плоскости в соответствующих точках на F^2 и $\widehat{F}^2$ не параллельны. Преобразование Лапласа не является также и конформным, поскольку изотропные линии $u^2 =$

const на F^2 переходят в неизотропные линии $u^2 = \mathrm{const}$ на $\widehat{F}^2$. Тем не менее, конформные G-преобразования и преобразование Лапласа связаны следующим коммутационным соотношением.

Утверждение 8. *Пусть F^2 — сильно изотропная поверхность в M^n. Рассмотрим конформное G-преобразование $\Phi : F^2 \to \widetilde{F}^2$, преобразования Лапласа $L : F^2 \to \widehat{F}^2$ и $\widetilde{L} : \widetilde{F}^2 \to \widehat{\widetilde{F}^2}$. Предположим, что отображения L и $\widetilde{L}$ являются регулярными. Тогда отображение $\widetilde{L}\circ\Phi\circ L^{-1} : \widehat{F} \to \widehat{\widetilde{F}^2}$ является конформным G-преобразованием сильно изотропных поверхностей.*

Доказательство. Воспользуемся рассмотренной параметризацией сильно изотропной поверхности F^2 лиувиллевыми координатами u^1, u^2. Радиус-вектор ρ поверхности F^2 удовлетворяет условию (27). При конформном G-преобразовании Φ получаем сильно изотропную поверхность $\widetilde{F}^2$, параметризованную лиувиллевыми координатами u^1, u^2: радиус-вектор $\widetilde{\rho}$ поверхности $\widetilde{F}^2$ связан с F^2 сотношениями (29), где функции A и D удовлетворяют (28). Преобразование Лапласа L задано формулой (32), тогда как $\widetilde{L}$ задается аналогичной формулой

$$\widehat{\widetilde{\rho}} = \widetilde{\rho} - \frac{1}{\widetilde{Q}}\partial_{u^1}\widetilde{\rho}.$$

По аналогии с (33) можем записать

$$\partial_{u^1}\widehat{\widetilde{\rho}} = \left(1 + \frac{\partial_{u^1}\widetilde{Q}}{\widetilde{Q}^2}\right)\partial_{u^1}\widetilde{\rho} - \frac{1}{\widetilde{Q}}\partial_{u^1u^1}\widetilde{\rho}, \quad \partial_{u^2}\widehat{\widetilde{\rho}} = \left(\frac{\partial_{u^2}\widetilde{Q}}{\widetilde{Q}^2} - \frac{\widetilde{P}}{\widetilde{Q}}\right)\partial_{u^1}\widetilde{\rho}.$$

Напомним, что $\widetilde{P} = P\frac{D}{A}$, $\widetilde{Q} = Q\frac{A}{D}$. Используя эти выражения и принимая во внимание (28), (29), получаем

$$\partial_{u^1}\widehat{\widetilde{\rho}} = D\left(1 + \frac{\partial_{u^1}Q}{Q^2}\right)\partial_{u^1}\rho - \frac{D}{Q}\partial_{u^1u^1}\rho, \quad \partial_{u^2}\widehat{\widetilde{\rho}} = \frac{(\partial_{u^2}Q - PQ)D - Q\partial_{u^2}D}{Q^2}\partial_{u^1}\rho.$$

Наконец, воспользовавшись формулами (33), после ряда вычислений приходим к следующим окончательным выражениям:

$$\begin{aligned} &\partial_{u^1}\widehat{\widetilde{\rho}} = D\partial_{u^1}\widehat{\rho}, \\ &\partial_{u^2}\widehat{\widetilde{\rho}} = \left(D - \partial_{u^2}D\frac{Q}{\partial_{u^2}Q - PQ}\right)\partial_{u^2}\widehat{\rho}. \end{aligned} \tag{34}$$

Как следствие, касательные плоскости поверхностей $\widehat{F}^2$ и $\widehat{\widetilde{F}^2}$ в соответствующих по равенству координат точках параллельны, т. е. отображение $\widetilde{L}\circ\Phi\circ L^{-1}$ является G-преобразованием поверхности $\widehat{F}$ в поверхность $\widehat{\widetilde{F}^2}$. Кроме того, из (34) следует, что изотропные координатные линии $u^1 = \mathrm{const}$ на $\widehat{F}^2$ переходят в изотропные координатные линии $u^1 = \mathrm{const}$ на $\widehat{\widetilde{F}^2}$, а значит, отображение $\widetilde{L}\circ\Phi\circ L^{-1}$ является конформным. □

7. Двумерные изотропные поверхности как каустики трехмерных изотропных поверхностей

Пусть $F^2 \subset M^n$ — изотропная поверхность, заданная радиус-вектором $x = \rho(u^1, u^2)$ так, что метрика F^2 имеет вид $ds^2 = g_{22}(du^2)^2$. Рассмотрим подмногообразие $N^3 \subset M^n$, образованное изотропными прямыми в M^n, касательными к изотропным координатным линиям $u^2 = \mathrm{const}$ на F^2. Подмногообразие N^3 задается радиус-вектором $x = \rho^*(u^1, u^2, u^3) = \rho(u^1, u^2) + u^3\partial_{u^1}\rho(u^1, u^2)$. Вычислим первые производные ρ^*: $\partial_{u^1}\rho^* = \partial_{u^1}\rho + u^3\partial_{u^1u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho^* = \partial_{u^2}\rho + u^3\partial_{u^1u^2}\rho$, $\partial_{u^3}\rho^* = \partial_{u^1}\rho$.

Если $\partial_{u^1u^1}\rho$ коллинеарен $\partial_{u^1}\rho$, т. е. если F^2 является нуль-линейчатой (*случай* A), то $\partial_{u^1}\rho^*$ коллинеарен $\partial_{u^3}\rho^*$, а значит, подмногообразие N^3 вырождается и будет представлять собой двумерную поверхность — как легко видеть, в данном случае N^3 просто совпадает с F^2.

Предположим теперь, что $\partial_{u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho$ и $\partial_{u^1u^1}\rho$ линейно независимы, а $\partial_{u^1u^2}\rho$ зависит от них и имеет место (26), т.е. будем предполагать, что F^2 является сильно изотропной (*случай* Б). Тогда легко видеть, что векторы $\partial_{u^1}\rho^*$, $\partial_{u^2}\rho^*$, $\partial_{u^3}\rho^*$ будут линейно независимыми всюду, за исключением тех точек, где либо $u^3 = 0$, либо $1 + u^3 Q = 0$. Иначе говоря, подмногообразие N^3 будет регулярным всюду за исключением точек исходной поверхности F^2, где $u^3 = 0$, и точек поверхности $\widehat{F}^2$, получающейся из F^2 преобразованием Лапласа, где $u^3 = -1/Q$. Таким образом, в рассматриваемом случае каустиками трехмерного нуль-линейчатого подмногообразия N^3 являются сильно изотропная поверхность F^2 и ее преобразование Лапласа $\widehat{F}^2$.

Наконец, если $\partial_{u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho$, $\partial_{u^1u^1}\rho$ и $\partial_{u^1u^2}\rho$ линейно независимы (*случай* В), то $\partial_{u^1}\rho^*$, $\partial_{u^2}\rho^*$, $\partial_{u^3}\rho^*$ будут линейно независимыми всюду, за исключением точек $u^3 = 0$. Иначе говоря, если изотропная поверхность F^2 не является ни сильно изотропной, ни нуль-линейчатой, то каустикой подмногообразия N^3 будет в точности сама начальная поверхность F^2.

Таким образом, видим, что поведение рассматриваемого нуль-линейчатого подмногообразия N^3, в частности — его регулярность и наличие каустик, существенно зависит от того, к какому классу принадлежит исходная изотропная поверхность F^2.

8. Примеры изотропных поверхностей

Пример 1. Рассмотрим двумерную поверхность вращения F^2 в M^4, заданную радиус-вектором $\rho(u^1,u^2) = (u^1, f(u^1)\cos u^2, f(u^1)\sin u^2, h(u^1))$, где функции $f(u^1)$ и $h(u^1)$ удовлетворяют $(f')^2 + (h')^2 = 1$, $f \neq 0$. Легко проверить, что если $f''h' - h''f' \neq 0$, то рассматриваемая поверхность вращения F^2 в M^4 будет сильно изотропной.

Пример 2. Рассмотрим двумерную поверхность F^2 в M^5, заданную радиус-вектором $\rho(u^1,u^2) = (u^1, a\cos u^1, a\sin u^1, b\cos u^2, b\sin u^2)$, где a и b — константы, удовлетворяющие $a^2+b^2=1$. Легко убедиться, что представленная F^2 в M^5 является сильно изотропной поверхностью.

Пример 3. Рассмотрим картанову поверхность N^2 в евклидовом пространстве E^{n-1}, $n > 4$: по определению, на такой поверхности имеется однозначно определенная сеть, образованная сопряженными относительно вторых фундаментальных форм кривыми ([9], с. 163). Введем на N^2 соответствующую параметризацию $r(u^1,u^2) = (f^1(u^1,u^2), \dots, f^{n-1}(u^1,u^2))$ — сопряженность координатных линий означает, что $\partial_{u^1u^2}r$ является линейной комбинацией $\partial_{u^1}r$ и $\partial_{u^2}r$. Дополнительно предположим, что координаты u^1, u^2 на N^2 являются полугеодезическими, т.е. метрика N^2 имеет вид $d\sigma^2 = (du^1)^2 + G(du^2)^2$. Рассмотрим поверхность F^2 в M^n, заданную параметрически в виде $\rho(u^1,u^2) = (u^1, f^1(u^1,u^2), \dots, f^{n-1}(u^1,u^2))$. Легко проверить, что эта поверхность будет изотропной. При этом если исходная поверхность N^2 не является линейчатой, то F^2 будет сильно изотропной.

Пример 4. Рассмотрим двумерную поверхность вращения F^2 в M^5, заданную радиус-вектором

$$\rho = (u^1, f(u^1)\cos u^2, f(u^1)\sin u^2, h(u^1)\cos u^2, h(u^1)\sin u^2),$$

где $f(u^1)$ и $h(u^1)$ — функции, удовлетворяющие $(f')^2+(h')^2 = 1$. Легко проверить, что указанная поверхность F^2 в M^5 является изотропной. При этом если $((f'')^2 + (h'')^2)(fh' - hf')$ не обращается в нуль, то F^2 принадлежит классу В, т.е. не является ни нуль-линейчатой, ни сильно изотропной.

Пример 5. Для полноты изложения приведем пример нетривиальной конформной G-деформации нуль-линейчатой поверхности. Зафиксируем изотропный вектор $\xi = (1, 1, 0, \dots, 0)$ и рассмотрим регулярную кривую γ с радиус-вектором $\eta(t) = (0, 0, \eta^2(t), \dots, \eta^{n-1}(t))$ в $n-2$-мерном подпространстве $x^0 = 0$, $x^1 = 0$. Построим цилиндрическую поверхность F^2 в M^n с радиус-вектором $\rho(u^1,u^2) = \xi u^1 + \eta(u^2)$. Кривая γ является направляющей цилиндра F^2, а образующие F^2 направлены вдоль вектора ξ. Касательная плоскость цилиндра F^2 натянута на изотропный вектор ξ и неизотропный вектор η', касательный к γ. Цилиндр F^2 представляет собой пример нуль-линейчатой изотропной поверхности (см. п. 5.1).

Чтобы построить нетривиальную конформную G-деформацию цилиндра F^2, возьмем в подпространстве $x^0 = 0$, $x^1 = 0$ непрерывное семейство неконгруентных и негомотетичных кривых $\widetilde{\gamma}_\varepsilon$, удовлетворяющих следующему требованию: при каждом ε между кривыми $\widetilde{\gamma}_\varepsilon$ и $\widetilde{\gamma}_0 = \gamma$ можно установить соответствие по параллельности касательных прямых. Рассмотрим цилиндры $\widetilde{F}_\varepsilon$ с образующими, направленными вдоль вектора ξ, и с направляющими кривыми $\widetilde{\gamma}_\varepsilon$. Упомянутое выше соответствие между кривыми $\widetilde{\gamma}_\varepsilon$ и γ естественным образом порождает соответствие между $\widetilde{F}_\varepsilon$ и $\widetilde{F}_0 = F$, при котором изотропные образующие $\widetilde{F}_\varepsilon$ переходят в изотропные образующие F, а касательные плоскости к $\widetilde{F}_\varepsilon$ и F параллельны. Таким образом, рассматриваемая деформация $\widetilde{\gamma}_\varepsilon$ кривой γ порождает конформную G-деформацию $\widetilde{F}_\varepsilon$ цилиндра F. Заметим, что с аналитической точки зрения описанная деформация соответствует решению $A = 1$, $C = 0$, $D = D(u^2)$ уравнения (25).

Литература

1. Gorkavyy V. *Deformations of two-dimensional surfaces that preserve the Gauss image* // Syber. advanc. in math. – 2000. – V. 13. – № 4. – P. 20–45.
2. Duggal K.L., Bejancu A. *Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications.* – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. – 300 p.
3. Ilyenko K., Zheltukhin A.A. *Tensionless string in the notoph background* // Class. Quantum Grav. – 1999. – V. 16. – P. 383–393.
4. Ilyenko K. *Twistor description of null strings.* – Ph. D Thesis, University of Oxford, United Kingdom, 1999. – 184 p.
5. Ilyenko K. *Twistor representation of null two-surfaces* // J. Math. Phys. – 2002. – V. 43. – № 10. – P. 4770–4789.
6. Hughston L.P., Shaw W.T. *Twistor and strings* // London Math. Society Lect. Notes Ser. – V. 156. – Cambridge University Press, Cambridge, 1990. – P. 218–245.
7. Schild A. *Classical null strings* // Phys. Rev. D. – 1977. – V. 16. – P. 1722–1726.
8. Stachel J. *Thickening the string* // Phys. Rev. D. – 1980. – V. 21. – P. 2171–2184.
9. Tenenblat K. *Transformations of manifolds and applications to differential equations.* – Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, New York: Wiley, 1998. – V. 93. – 209 p.

Физико-технический институт
низких температур им. Б.И. Веркина
Национальной академии наук Украины

Поступили
первый вариант 24.11.2004
окончательный вариант 16.09.2005