ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 12 (475)

УДК 517.977

В.А. ДЫХТА, Н.В. ДЕРЕНКО

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ОСНОВАННЫЕ НА ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА

1. Введение

В качественной теории оптимизации динамических систем с разрывными траекториями и импульсными управлениями достигнут заметный прогресс: получены вариационный принцип максимума и обобщенные условия стационарности для импульсных процессов с траекториями неограниченной вариации [1], [2], различные варианты принципа максимума для импульсных процессов с траекториями ограниченной вариации [3]–[5]. В то же время наметился определенный отрыв качественной теории от конструктивных численных методов решения задач нелинейного импульсного управления. Публикации в этой области единичны [6], [7], носят частный характер и слабо связаны с условиями оптимальности импульсных процессов того или иного класса (для процессов с траекториями ограниченной вариации авторам вообще неизвестны какие-либо работы по численным методам).

В данной статье предлагаются методы решения нелинейных задач импульсного управления с траекториями неограниченной вариации (класса L_∞), которые базируются на вариационном принципе максимума и обобщенном условии стационарности [1], [5]. Техника, развитая в [1], позволяет предложить численные методы, конструкции которых имеют естественный и компактный вид. Для построения методов градиентного типа она была применена в [8] в случае менее общей задачи, нежели рассматриваемая ниже.

2. Постановка задачи

Пусть $T = [t_0, t_1]$ — фиксированный отрезок времени, $\mathcal{W}$ — класс m-мерных измеримых ограниченных вектор-функций, постоянных при $t < t_0$ и $t > t_1$, $\mathcal{D}$ — оператор обобщенного дифференцирования.

Будем рассматривать задачу оптимального управления, содержащую так называемые ограничения на текущие значения импульса,

$$J(w) = l(x(t_1+), w(t_1+)) \to \inf, \tag{1}$$

$$\mathcal{D}x = f(t,x,w) + G(t,x,w)\mathcal{D}w, \tag{2}$$

$$x(t_0-) = x_0, \quad w(t_0-) = w_0, \tag{3}$$

$$w(t) \in W. \tag{4}$$

Здесь $l(x,w)$ — скалярная функция, $x(t) \in R^n$, $x(t\pm)$ — односторонние пределы функции x в точке t, уравнение (2) трактуется в смысле распределений [2], $W \subset R^m$ — заданное множество, управление $w \in \mathcal{W}$.

Предполагаются выполненными следующие условия:

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00869.

1) функция $l(x,w)$ непрерывно дифференцируема;
2) вектор-функция $f(t,x,w)$ и ее производные по x и w непрерывны;
3) матричная функция $G(t,x,w)$ дважды непрерывно дифференцируема;
4) выполнено условие Фробениуса для матрицы G по переменным (x,w)

$$G_{ix}(t,x,w)G_j(t,x,w)+G_{iw_j}(t,x,w)=G_{jx}(t,x,w)G_i(t,x,w)+G_{jw_i}(t,x,w),\quad i,j=1,2,\ldots,m,$$

где $G_1,\ldots,G_m$ — столбцы матрицы G, а также удовлетворяется условие роста $|G(t,x,w)|\le c(1+|x|+|w|)$ при некотором $c>0$.

Заметим, что предположение 4) необходимо для возможности корректного определения решения уравнения в распределениях (2) [2]. Это уравнение является расширением обычной системы уравнений

$$\dot{x}=f(t,x,w)+G(t,x,w)u,\quad \dot{w}=u \tag{5}$$

с управлением $u(\cdot)$ класса L_∞ и липшицевыми траекториями. При этом функции $x(\cdot)$, $w(\cdot)$, связанные уравнением в распределениях (2), являются пределом почти всюду сходящейся последовательности траекторий системы (5), равномерно ограниченной в C и обладающей свойством $u_n\to\mathcal{D}w$ в смысле обобщенных функций [4], [5]. Поэтому при выпуклом множестве W переход от системы (5) к уравнению (2) не ведет к уменьшению инфимума функционала J (это верно лишь для рассматриваемой базовой задачи со свободным правым концом). В задаче (1)–(4) управлением будем считать функции $w\in\mathcal{W}$ со значениями в W, которые порождают импульсные воздействия вида $u=\mathcal{D}w$.

3. Сведение задачи импульсного управления к обычной

В основе предлагаемых методов решения задачи импульсного управления (1)–(4) лежит возможность преобразования ее к классической задаче оптимального управления, к которой применимы известные методы, с последующим представлением этих методов непосредственно в терминах рассматриваемой задачи.

Сведение задачи импульсного управления к обычной задается заменой фазовых координат по формуле [1], [2], [5]

$$y(t)=\xi(t,x(t),w_0,w(t)), \tag{6}$$

где функция $\xi(t,y,w,w_0)$ — решение вполне интегрируемой (в силу предположения 4)) системы в частных производных

$$\frac{\partial\xi}{\partial w}=G(t,\xi,w),\quad \xi|_{w=w_0}=y, \tag{7}$$

а $x(\cdot)$ — траектория уравнения (2), соответствующая допустимому управлению $w(\cdot)\in\mathcal{W}$. Если для каждого такого управления положить $h=w(t_1+)$, то преобразованием (6) задача (1)–(4) редуцируется к следующей:

$$I(w,h)=\mathcal{L}(y(t_1),h)\to\inf, \tag{8}$$

$$\dot{y}=g(t,y,w),\quad y(t_0)=x_0, \tag{9}$$

$$w(t)\in W,\quad h\in W. \tag{10}$$

Здесь $\mathcal{L}(y,h)=l(\xi(t_1,y,h,w_0),h)$, $g(t,y,w)=\xi_t(t,x,w_0,w)+\xi_x(t,x,w_0,w)f(t,x,w)|_{x=\xi(t,y,w,w_0)}$; w — измеримое ограниченное управление, h — оптимизируемый параметр, y — липшицевая траектория, связанная с соответствующей траекторией уравнения (2) формулой обращения для (6)

$$\begin{gathered}x(t)=\xi(t,y(t),w(t),w_0),\quad t\in(t_0,t_1),\\ x(t_0-)=x_0,\quad x(t_1+)=\xi(t_1,y(t_1),h,w_0).\end{gathered} \tag{11}$$

Переход от исходной задачи (1)–(4) к редуцированной (8)–(10) в принципе можно использовать для анализа всевозможных свойств задачи импульсного управления и, в частности, для ее непосредственного решения. Однако мы будем исходить из предположения, что практически решить в аналитическом виде систему (7) невозможно, так что описанная редукция лишь теоретически возможна, а конструктивные результаты для исходной задачи должны получаться расшифровкой соответствующих аналогов для задачи (8)–(10).

4. Основная формула приращения функционала и вариационный принцип максимума

Введем сопряженные переменные ψ, ψ_w, отвечающие переменным x, w соответственно, а также сопряженную систему в распределениях для исходной задачи

$$\begin{gathered} \mathcal{D}\psi = -H_x(t,x,w,\psi,\mathcal{D}w), \quad \mathcal{D}\psi_w = -H_w(t,x,w,\psi,\mathcal{D}w), \\ \psi(t_1+) = -l_x(x(t_1+),w(t_1+)), \quad \psi_w(t_1+) = -l_w(x(t_1+),w(t_1+)). \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь $H(t,x,w,\psi,u) = \langle \psi, f(t,x,w) + G(t,x,w)u\rangle$ — функция Понтрягина исходной задачи.

Пусть $w(\cdot)$ — некоторое допустимое управление, $x(\cdot)$ — соответствующая траектория уравнения (2), $\psi(\cdot)$, $\psi_w(\cdot)$ — решение системы (12) и $\omega(\cdot)$ — другое допустимое управление в исходной задаче. Для $\tau \in [0,1]$ положим

$$\mathrm{w}_\omega(t,\tau) = w(t) + \tau(\omega(t) - w(t)), \quad t \in T,$$

и введем так называемые предельные дифференциальные системы для уравнений (2), (12) вдоль импульсного процесса $(x(\cdot), w(\cdot))$

$$\begin{gathered} z'(\tau) = G(t,z(\tau),\mathrm{w}_\omega(t,\tau))(\omega(t)-w(t)), \quad q'(\tau) = -H_{xu}(t,z(\tau),\mathrm{w}_\omega(t,\tau),q(\tau))(\omega(t)-w(t)), \\ z(0) = x(t), \quad q(0) = \psi(t), \end{gathered} \tag{13}$$

где штрих означает дифференцирование по τ.

В формулу приращения функционала J войдет некоторая функция от ω и решений $z(\tau)$, $q(\tau)$ системы (13), а точнее — зависящий от $t \in T$, как параметра, функционал. Чтобы определить его, положим

$$P(t,x,w,\psi) = H_w(t,x,w,\psi) - \frac{d}{dt}H_u(t,x,w,\psi), \tag{14}$$

где полная производная по t вычисляется по обычному правилу в силу уравнений (2), (12) и связи $\dot{w} = u$ (от вектора u эта производная не будет зависеть из-за предположения 4)). Пусть

$$\mathcal{P}(\omega(t),w(t),t) = \Big\langle \int_0^1 P(t,z(\tau),\mathrm{w}_\omega(t,\tau),q(\tau))d\tau, \omega(t)-w(t)\Big\rangle, \tag{15}$$

где $z(\tau)$, $q(\tau)$ — зависящие от $\omega(t)$ решения системы (13).

Для построения методов важной является

Теорема 1. *Приращение функционала $J(w)$ может быть представлено в виде*

$$\begin{aligned} \Delta_\omega J(w) := J(\omega) - J(w) = -\int_T \mathcal{P}(\omega(t),w(t),t)dt - \\ - \langle H_u(t_1,x(t_1+),w(t_1+),\psi(t_1+)) + \psi_w(t_1+), \omega(t_1+) - w(t_1+)\rangle + \\ + o(\|\omega - w\|_1 + |\omega(t_1+) - w(t_1+)|), \end{aligned} \tag{16}$$

где интегрант $\mathcal{P}$ определен равенством (15)*, а символ $\|\cdot\|_1$ означает норму в пространстве L_1.*

Доказательство. В редуцированной задаче (8)–(10) справедливо известное разложение функционала

$$\Delta_{\omega,\gamma} I(w,h) := I(\omega,\gamma) - I(w,h) =$$
$$= -\int_T \Delta_\omega \mathcal{H}(t, y(t), p(t), w(t))dt + \langle \mathcal{L}_h(y(t_1), h), \gamma - h\rangle + o(\|\omega - w\|_1 + |\gamma - h|). \quad (17)$$

Здесь $\mathcal{H}(t,y,p,w) = \langle p, g(t,y,w)\rangle$ — функция Понтрягина задачи (8)–(10), $\Delta_\omega \mathcal{H}$ — ее частное приращение по управлению, $y(\cdot)$ — траектория задачи (8)–(10), соответствующая фиксированному управлению $w \in L_\infty(T,W)$, $p(\cdot)$ — решение сопряженной системы редуцированной задачи, т. е.

$$\dot{p} = -\mathcal{H}_y(t,y,p,w), \quad p(t_1) = -\mathcal{L}_y(y(t_1), h),$$

$\gamma = \omega(t_1+)$, $h = w(t_1+)$ — сравниваемые значения параметров.

Используя подходящую модификацию рассуждений из ([1], леммы 3, 5), нетрудно убедиться, что

$$\Delta_\omega \mathcal{H}(t, y(t), p(t), w(t)) = \mathcal{P}(\omega(t), w(t), t),$$

так что интегранты в (16) и (17) совпадают. Равенство вторых слагаемых в этих разложениях следует из определения функции $\mathcal{L}$, равенств (11) и условий трансверсальности (см. (12)). Поскольку функционалы J и I на соответствующих процессах совпадают, то тождественность разложений (16), (17) установлена. $\square$

Из разложения (17) с учетом произвольности выбора управления $\omega \in L_\infty(T,W)$ вытекает следующее необходимое условие оптимальности для задачи импульсного управления – вариационный принцип максимума (ВПМ) в интегральной форме.

Следствие (ВПМ). Если допустимое управление $w(t)$ оптимально, то выполняется неравенство

$$\delta_\omega J(w) := -\int_T \mathcal{P}(\omega(t), w(t), t)dt \geq 0 \quad \forall\, \omega \in L_\infty(T,W). \quad (18)$$

Кроме того, если предел $w(t_1-)$ существует, то оптимальное значение $\overline{h} = w(t_1+)$ является решением экстремальной задачи

$$\begin{gathered} l(z(1), h) \to \min, \quad z' = G(t_1, z, w(t_1-) + \tau(h - w(t_1-)))(h - w(t_1-)), \\ z(0) = x(t_1-), \quad h \in W. \end{gathered} \quad (19)$$

Заметим, что экстремальное условие (19), характеризующее оптимальность терминального импульса, следует из того, что параметр h входит лишь в функционал задачи (8)–(10), а множество всех фазовых точек, в которые можно попасть из положения $x(t_1-)$ за счет импульса управления в момент $t = t_1$, совпадает с множеством значений $z(1)$ траекторий системы (19). При выпуклом множестве W условие (19) может быть локализовано, т.е. ослаблено за счет рассмотрения значений h, близких к $w(t_1-)$. Понятно, что условие (18) является эквивалентом принципа максимума Понтрягина для редуцированной задачи (8)–(10).

5. Схема улучшения импульсного управления

Из условия оптимальности (18) следует, что проверка ВПМ для управления $w(\cdot)$ сводится к решению задачи

$$\delta_\omega J(w) \to \min, \quad \omega \in L_\infty(T,W). \quad (20)$$

Поскольку в ней допустимые функции $\omega(\cdot)$ разрывны, то эта интегральная задача равносильна поточечной максимизации функции $\omega \to \mathcal{P}(\omega, w(t), t)$ при $t \in T$ и $\omega \in W$. Формально ситуация выглядит аналогично имеющейся в методах, основанных на принципе максимума Понтрягина

[9]–[11] в обычных задачах управления, и любая из версий этих методов порождает соответствующий аналог для решения задачи импульсного управления. Однако отличительной особенностью рассматриваемой ситуации является, как следует из (15), неявная зависимость функции $\mathcal{P}$ от ω (аналогично обстоит дело и во вспомогательной терминальной задаче (19)). Из (13), (15) видно, что при фиксированном $t \in T$ максимизация функции $\mathcal{P}$ по $\omega \in W$ представляет собой задачу оптимизации параметра в гамильтоновой системе (13). Следовательно, нужно располагать достаточно эффективным методом решения вспомогательной задачи данного класса. Методы градиентного типа, обсуждаемые в следующем пункте, дают один из подходов к решению вспомогательной задачи. Необходимо заметить, что ситуация значительно упрощается в тех приложениях, в которых предельные системы (13) могут быть проинтегрированы аналитически.

Допустим теперь, что решение $\overline{w}(\cdot)$ задачи (20) известно, и рассмотрим возможную схему улучшения управления $w(\cdot)$, использующую, например, оптимальное игольчатое варьирование [9]. Заметим, что параллельно должна решаться и терминальная задача (19) улучшения параметра h.

Фиксируем параметр $\alpha \in [0,1]$, образуем множество варьирования T_α, $\operatorname{mes} T_\alpha = \alpha(t_1 - t_0)$ и рассмотрим проварьированное управление

$$w_\alpha(t) = w(t) + \chi_\alpha(t)(\overline{w}(t) - w(t)), \tag{21}$$

где $\chi_\alpha(t) = \chi_{T_\alpha}(t)$ – характеристическая функция множества T_α (т. е. $\chi_\alpha(t) = 1$ при $t \in T_\alpha$ и равна нулю в противном случае). Множество T_α выберем следующим образом. Пусть $m(t) = \mathcal{P}(\overline{w}(t), w(t), t) \geq 0$ — невязка выполнения ВПМ. Если $\operatorname{vrai\,sup} m(t) > 0$ (т. е. условие (18) не выполнено), то положим $T_\alpha = \{t \in T : m(t) \geq \lambda\}$, где число $\lambda = \lambda(\alpha)$ выбирается из условия $\int\limits_T \chi_\alpha(t)dt = \alpha(t_1 - t_0)$. Далее параметр варьирования α находится из условия уменьшения целевого функционала $J(w_\alpha) < J(w)$. При нарушении критерия оптимальности (18) такой выбор α всегда возможен, что следует из разложения (16).

Конечно, можно использовать и другие известные процедуры игольчатого варьирования управления, более простые в реализации. Все они порождают, вообще говоря, разрывные управления типа (21), а значит, импульсы в правой части уравнения (2) и разрывы соответствующей траектории.

Для иллюстрации работы с ВПМ приведем

Пример 1. В обычной постановке он содержит медленные фазовые переменные (x) и быстрые (y):

$$\dot{x} = \varphi(x,y), \quad \dot{y} = f(x,y) + u, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0,$$
$$|y| \leq 1, \quad J = \int_0^1 [d(x,y) + \langle c(y), u\rangle]dt \to \inf.$$

Здесь $x \in R^{n_1}$, $y \in R^{n_2}$, $u(\cdot) \in L_\infty$ — управление, φ, f, d, c — известные функции соответствующих размерностей.

Перейдем в этой модели к импульсной постановке, положив $w = y$, $u = \mathcal{D}w - f(x,w)$. Тогда получим задачу в форме (1)–(4), причем меньшей фазовой размерности и с ограничением на текущие значения импульса вместо исходных фазовых,

$$\dot{x} = \varphi(x,w), \quad x(0) = x_0,$$
$$\mathcal{D}\eta = d(x,w) - \langle c(w), f(x,w)\rangle + \langle c(w), \mathcal{D}w\rangle := F(x,w,\mathcal{D}w),$$
$$\eta(0-) = 0, \quad w(0-) = y_0,$$
$$|w| \leq 1, \quad J(w) = \eta(1+) \to \inf$$

(т. к. x — медленная переменная без разрывов, то для нее записано обыкновенное дифференциальное уравнение).

Пусть $(x(\cdot), \eta(\cdot), w(\cdot))$ — произвольный допустимый импульсный процесс. Тогда $\psi_\eta \equiv -1$, ψ_x — медленная сопряженная компонента, соответствующая x, и $z_x(\tau) = x(t)$, $q_x(\tau) = \psi_x(t)$, $q_\eta(\tau) \equiv -1$, поскольку предельные уравнения для них тривиальны. Далее,

$$P(t, x, \eta, w) = \varphi'_w(x, w)\psi_x + [d'_w(x, w) - f'_w(x, w)c(w) - c'_w(w)f(x, w)]\psi_\eta,$$

$$\frac{dz_\eta}{d\tau} = c(w + \tau(\omega - w))(\omega - w), \quad z_\eta(0) = \eta(t).$$

С учетом этих соотношений нетрудно получить

$$\mathcal{P}(\omega, w) = \int\limits_0^1 \frac{d}{d\tau}[\langle\psi_x(t), \varphi(x(t), \mathrm{w}_\omega(t, \tau))\rangle +$$

$$+ \langle c(\mathrm{w}_\omega(t, \tau)), f(x(t), \mathrm{w}_\omega(t, \tau)) - d(\mathrm{w}_\omega(t, \tau))\rangle]d\tau = \langle\psi_x, \varphi\rangle + \langle c, f\rangle - d|_{\tau=0}^{\tau=1}.$$

Поэтому экстремальное условие метода ВПМ (18) равносильно максимизации по $\omega \in [-1, 1]$ функции

$$Q(\omega, t) := \langle\psi_x(t), \varphi(x(t), \omega)\rangle + \langle c(\omega), f(x(t), \omega)\rangle - d(x(t), \omega).$$

Терминальная задача (19), как легко убедиться, сводится к следующей:

$$C(h) := \int_{y_0}^{h} c(w)dw \to \min, \quad |h| \le 1.$$

Ни в одном из известных методов решения задач оптимального управления подобные нелокальные экстремальные задачи по фазовым переменным не встречаются.

Итак, в данной модели импульсного управления возможно аналитическое определение функции $\mathcal{P}$, что снимает трудности реализации метода. Заметим, что в рамки этого примера укладывается задача управления двухзвенным манипулятором в постановке [2].

6. Алгоритмические аспекты реализации

В реализуемых версиях методов улучшения импульсного управления естественно ограничиться классом распределений, для элементов которого конструктивно могут вычисляться траектории исходного и сопряженного уравнений в распределениях. Для этой цели введем подмножество $\mathcal{W}_K \subset \mathcal{W}$, состоящее из функций $w(\cdot) \in \mathcal{W}$, ограничение которых на отрезок T представляет собой кусочно-непрерывную функцию, липшицевую на интервалах непрерывности. Тогда соответствующее распределение $\mathcal{D}w$ (импульсное управление) представляет собой векторную меру вида

$$\mathcal{D}w = u(t) + \sum_{i=1}^{r}[w(s_i)]\delta(t - s_i), \tag{22}$$

где $u(t) = \dot{w}(t)$, $s_i \in T$ — точки разрыва функции $w(\cdot)$, $[w(s_i)] = w(s_i+) - w(s_i-)$ — ее скачки, $\delta(t - s_i)$ — функция Дирака, сосредоточенная в точке s_i.

В случае распределений вида (22) интегрирование систем (2), (12) особенно просто [2], [5], [8]: на интервалах непрерывности $w(\cdot)$ функции x, ψ, ψ_w суть решения соответствующих обычных дифференциальных уравнений с управлением $\mathcal{D}w = u(t)$, а в точках разрыва $w(\cdot)$ скачки решений этих уравнений вычисляются с помощью предельных систем. А именно, если s_i — момент приложения импульса, то $x(s_i+) = \tilde{z}(1)$, $\psi(s_i+) = \tilde{q}(1)$, где $\tilde{z}$, $\tilde{q}$ — решения системы (13) при замене t, $\omega(t)$, $w(t)$, $x(t)$, $\psi(t)$ на s_i, $w(s_i+)$, $w(s_i-)$, $x(s_i-)$, $\psi(s_i-)$ соответственно (надо иметь в виду, что интегрирование сопряженных уравнений ведется в обратном времени).

Остановимся теперь на методах градиентного типа для решения вспомогательной задачи (20). Прежде всего заметим, что из разложения (16) следует, что градиент функционала $\omega(\cdot) \to \delta_\omega J(w)$ совпадает с градиентом функционала $w \to J(w)$. Рассматривая разложение (16) при малых $\|\omega - w\|_\infty$, или, что то же самое, первую вариацию функционала $\omega \to \mathcal{P}$ вида (15) при малой разности $|\omega(t) - w(t)|$, получим формулу для градиента функционала J в задаче импульсного управления

$$\nabla J(w) = -P(t, x(t), w(t), \psi(t)). \tag{23}$$

Здесь функция P определена равенством (14). Видим, что, во-первых, вычисление этого градиента связано только с интегрированием исходной и сопряженной систем и, во-вторых, формула (23) существенно отличается от градиента функционала в обычной задаче оптимального управления, которая соответствует замене обобщенной дифференциальной связи (2) обычной вида (5). Учитывая, что функционал J зависит не только от значений w при $t \in T$, но и от параметра $h = w(t_1+)$, нетрудно получить из (16) и градиент $\nabla_h J$ по этому параметру, равный, очевидно, коэффициенту при разности $(\omega(t_1+) - w(t_1+))$.

Любопытно, что обе составляющие градиентов $\nabla J(w)$ и $\nabla_h J(w)$ могут быть получены формальным образом из стандартной формулы первой вариации функционала для обычной задачи путем интегрирования по частям.

Итак, в случае выпуклого множества W задача импульсного управления (или вспомогательная задача ВПМ (20)) может решаться применением методов проекции градиента или условного градиента (при $W = R^m$ — скорейшего спуска) с использованием описанных конструкций ∇J и $\nabla_h J$, задающих направление спуска. Более трудоемкую процедуру игольчатого варьирования (21) целесообразно применять после серии итераций каким-либо из градиентных методов.

Пример 2 с разрывной оптимальной траекторией был предложен А.А. Милютиным в качестве тестовой задачи [10]:

$$J = \int_0^2 x^2(t)dt \to \inf, \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad x(2) = 0, \quad x(t) \geq 1 \ \text{ при } \ t \in [1/2, 3/2].$$

При переходе от этой задачи к импульсной постановке ($w = x$, $\mathcal{D}w = u$) получаем элементарную задачу

$$J = \int_0^2 w^2(t)dt \to \inf, \quad w(0-) = 0, \quad w(2+) = 0,$$
$$w(t) \geq 1, \quad t \in [1/2, 3/2].$$

Видим, что, во-первых, как и в примере 1, фазоограничения исходной задачи перешли в ограничение на текущие значения импульса и, во-вторых, выпуклое множество W в данном примере зависит от t (что принципиального значения не имеет).

Функция $\mathcal{P}$ при любом допустимом w без труда находится аналитически: $\mathcal{P}(\omega, w) = -\omega^2 + w^2$. Поэтому $\overline{\omega}(t) = \chi_{[1/2,3/2]}(t)$ и, очевидно, при варьировании методом (21) следует принять $\alpha = 1$, $T_\alpha = T_1 = T$ для любого начального приближения $w(t)$. Соответствующее проварьированное управление $w_1(t) = \overline{\omega}(t)$ сразу порождает оптимальное распределение $\mathcal{D}w_1 = \delta(t-1/2) - \delta(t-3/2)$.

При численном решении примера путем комбинации методов типа условного градиента при $t \in [1/2, 3/2]$ и скорейшего спуска при $t \notin [1/2, 3/2]$ нетрудно получить управление $\widetilde{w}$, отличающееся от оптимального в равномерной метрике не более, чем на 10^{-3}.

Ясно, что без учета импульсного характера оптимального решения в исходной задаче с фазоограничениями обычными методами подобные результаты вряд ли можно получить [10].

Пример 3 получен путем импульсного расширения задачи, примененной в [11] для тестирования одного из алгоритмов второго порядка,

$$J = x(1+) + w^2(1+) \to \inf,$$
$$\mathcal{D}x = (w+1)^2 + (t-1)w\mathcal{D}w, \quad x(0-) = 0, \quad w(0-) = 0.$$

Здесь, как и в примере 2, аналитически находится функция

$$\mathcal{P}(\omega, w) = \Big(-2 - w - \frac{\omega - w}{2} \Big)(\omega - w),$$

и оптимальное управление $w_1(t) \equiv -2$ находится на первой итерации метода. Ему соответствуют распределение $\mathcal{D}w_1 = -2\delta(t) + 2\delta(t-1)$ и траектория $x_1(t) = t - 2$, $t \in (0,1)$, $x_1(1+) = -1$.

Предложенный метод несравненно проще в реализации, чем метод из [11], в котором требуется аналитически решать систему дифференциальных уравнений в частных производных типа (7).

Применим теперь для решения данного примера метод градиентного типа.

Формулы для вычисления градиента функционала J имеют вид ($u = \mathcal{D}w$)

$$\nabla J(w) = \frac{d}{dt} H_u(t, x, w, \psi) - H_w(t, x, w, \psi) = w + 2,$$
$$\nabla_h J(w) = -H_u(1, x(1+), w(1+), \psi(1+)) + l_w(x(1+), w(1+)) = 2w(1+) = 2h.$$

Нулевому приближению $w^0(t) = 1$, $t \in (0,1)$, $h^0 = 1$ соответствует разрывная траектория $x^0(t) = 4t - 1/2$ и $\nabla J(w^0) = 3$, $\nabla_h J(w^0) = 2$. Проварьированному по методу скорейшего спуска управлению

$$w^0_\alpha(t) = w^0(t) - \alpha \nabla J(w^0) = 1 - 3\alpha, \quad h^0_\beta = h^0 - \beta \nabla_h J(w^0) = 1 - 2\beta, \quad \alpha, \beta > 0,$$

отвечает траектория $x^0_\alpha(t) = (2-3\alpha)^2 t - 0,5(3\alpha - 1)^2$, $t \in (0,1)$. Минимизация по β функционала $J(w^0_\alpha) = x^0_\alpha(1) + {h^0_\beta}^2$ (т. е. оптимизация терминального импульса) приводит к результату $\overline{\beta} = 1/2$, $\widetilde{h} = 0$. Далее, несложно найти, что $\min\limits_{\alpha \geq 0} J(w^0_\alpha) = -1$ при $\overline{\alpha} = 3/4$.

Таким образом, первая же итерация метода скорейшего спуска приводит к импульсному режиму

$$\widetilde{w}(t) = -2, \quad \widetilde{w}(0-) = 0, \quad \widetilde{w}(1+) = \widetilde{h} = 0,$$
$$\widetilde{x}(t) = t - 2, \quad t \in (0,1], \quad \widetilde{x}(0-) = 0,$$

который является стационарным, т. к. выполняются условия $\nabla J(\widetilde{w}) \equiv 0$, $\nabla_h J(\widetilde{w}) = 0$.

Рассмотренные примеры наглядно демонстрируют преимущества перехода к задачам в импульсной постановке и применения специальных методов улучшения управления, использующих теорию импульсного управления.

Литература

1. Дыхта В.А. *Вариационный принцип максимума и квадратичные условия оптимальности импульсных и особых процессов* // Сиб. матем. журн. – 1994. – Т. 35. – № 1. – С. 70–82.
2. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. *Импульсные процессы: модели и приложения.* – М.: Наука, 1991. – 256 с.
3. Миллер Б.М. *Метод разрывной замены времени в задачах оптимального управления импульсными и дискретно-непрерывными системами* // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 12. – С. 3–32.
4. Орлов Ю.В. *Теория оптимальных систем с обобщенными управлениями.* – М.: Наука, 1988. – 187 с.
5. Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. *Оптимальное импульсное управление с приложениями.* – М.: Физматлит, 2000. – 256 с.
6. Орлов Ю.В., Разумовский Д.Д. *Численные методы решения задач оптимального обобщенного управления* // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 5. – С. 44–51.
7. Батурин В.А., Урбанович Д.Е. *Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения.* – Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН. – 1997. – 175 с.

8. Дыхта В.А., Деренко Н.В. *Численные методы решения задач импульсного управления, основанные на обобщенном условии стационарности* // Сб. тр. Всероссийск. школы “Компьютерная логика, алгебра и интеллектное управление. Проблемы анализа устойчивости развития и стратегической стабильности”. – Иркутск: Изд-во ИрВЦ СО РАН, 1994. – Т. 2. – С. 59–70.
9. Срочко В.А. *Итерационные методы решения задач оптимального управления.* – М.: Физматлит, 2000. – 160 с.
10. Федоренко Р.П. *Приближенное решение задач оптимального управления.* – М.: Наука, 1978. – 488 с.
11. Гурман В.И., Батурин В.А., Москаленко А.И. и др. *Методы улучшения в вычислительном эксперименте.* – Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1988. – 184 с.

Иркутская государственная экономическая академия

Поступила 03.09.2001