Известия вузов. Математика
2016, №5, с. 80–85

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

С.К. ЗУБКОВА, В.В. ШУРЫГИН

ТРАНСВЕРСАЛЬНЫЕ ДЖЕТЫ ЛИ И ГОЛОМОРФНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ НА ТРАНСВЕРСАЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ

Аннотация. В работе в терминах трансверсальных джетов Ли устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых голоморфное поле геометрических объектов на трансверсальном расслоении Вейля может быть переведено голоморфным диффеоморфизмом, проектирующимся в тождественное преобразование базы, в поле, являющееся продолжением проектируемого поля слоеных геометрических объектов, заданного на базе. В качестве примера рассматривается голоморфная линейная связность на трансверсальном расслоении.

Ключевые слова: алгебра Вейля, геометрический объект, джет Ли, расслоение Вейля, трансверсальное расслоение.

УДК: 514.76

1. Трансверсальное расслоение Вейля

Проекция $p : \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \ni \{x^i, y^\alpha\} \mapsto \{x^i\} \in \mathbb{R}^n$, где индексы $i, j, \dots$ пробегают значения от 1 до n, а индексы $\alpha, \beta, \dots$ — от $n+1$ до $n+m$, определяет на $\mathbb{R}^{n+m}$ стандартное слоение $\mathcal{F}_{st}$ коразмерности n. Локальный диффеоморфизм $\varphi : U \ni \{x^i, y^\alpha\} \mapsto \{\varphi^j(x^i, y^\alpha), \varphi^\beta(x^i, y^\alpha)\} \in U^*$ между открытыми подмножествами U и U^* в $\mathbb{R}^{n+m}$ называется локальным автоморфизмом стандартного слоения $\mathcal{F}_{st}$, если $\partial\varphi^j/\partial y^\alpha = 0$. Слоение $\mathcal{F}$ коразмерности n на $(n+m)$-мерном многообразии M задается атласом $\Phi_{n,m}$ с преобразованиями координат, принадлежащими псевдогруппе локальных автоморфизмов слоения $\mathcal{F}_{st}$ [1]. Карты из атласа $\Phi_{n,m}$ будем называть *картами слоения*. Многообразие со слоением будем обозначать $(M, \mathcal{F})$ и называть также *слоеным многообразием*. Карту слоения (U, h) называем простой, если индуцированное слоение на U порождается субмерсией $p_U : U \to \overline{U}$ со связными слоями [1]. Гладкое отображение $\varphi : M \to M'$ между слоеными многообразиями $(M, \mathcal{F})$ и $(M', \mathcal{F}')$ является морфизмом слоений, если φ в картах слоений задается уравнениями

$$x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i, y^\alpha), \quad y^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^i, y^\alpha), \quad \partial\varphi^{i'}/\partial y^\alpha = 0. \tag{1}$$

Пусть $\mathbb{A}$ — алгебра Вейля ширины N и высоты (порядка) q ([2]–[4]). *Трансверсальной $\mathbb{A}$-скоростью* в точке $x \in M$ ростка $f : (\mathbb{R}^N, 0) \to (M_n, x)$ называется [5] класс эквивалентности $j^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}} f = j^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}x} f$ ростков $(\mathbb{R}^N, 0) \to (M_n, x)$ по отношению эквивалентности: $f \sim g$, если для некоторой простой карты слоения ростки $p_U \circ h \circ f$ и $p_U \circ h \circ g$ имеют одинаковые $\mathbb{A}$-скорости.

Поступила 15.12.2015

Множество всех трансверсальных $\mathbb{A}$-скоростей на слоеном многообразии M обозначается символом $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M = \bigcup_{x\in M} T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}\,x}M$. Символом $\pi_{\mathrm{tr}} : T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M \to M$ обозначаем отображение, относящее трансверсальной $\mathbb{A}$-скорости $j^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}\,x}$ точку $x \in M$.

В том случае, когда слоение $\mathcal{F}$ на многообразии M порождено субмерсией $p : M \to \overline{M}$, множество $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M$ может рассматриваться как обратный образ $p^{-1}T^{\mathbb{A}}\overline{M}$ расслоения $\mathbb{A}$-скоростей $T^{\mathbb{A}}\overline{M}$ относительно p. Геометрия расслоений такого типа изучалась В.В. Вишневским [6]. Трансверсальный функтор Вейля на слоеном многообразии в рамках подхода А. Вейля [2] изучался З. Погодой [7].

На многообразии $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}\mathbb{R}^{n+m}$ индуцируется структура $\mathbb{A}$-модуля, естественно изоморфного $\mathbb{A}$-модулю $\mathbb{A}^n\oplus\mathbb{R}^m$, где действие $\mathbb{A}$ на $\mathbb{A}^n\oplus\mathbb{R}^m$ определяется соотношением $\sigma(u\oplus v) = \sigma u\oplus 0$ при $\sigma \in \mathfrak{m}(\mathbb{A})$, где $\mathfrak{m}(\mathbb{A})$ — максимальный идеал в $\mathbb{A}$. Морфизм $\varphi : M \to M'$ слоеных многообразий индуцирует отображение $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}\varphi : T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M \ni j^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}f \mapsto j^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}(\varphi\circ f) \in T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M'$. Для карты слоения (U,h) на многообразии M положим $\widetilde{U} = (\pi_{\mathrm{tr}})^{-1}(U) = T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}U$, $h^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}} = T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}h$. Карта $(\widetilde{U}, h^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}})$ относит точке $X \in T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M$ координаты $\{X^i, y^\alpha\}$, $X^i = x^i + \overset{\circ}{X}{}^i \in \mathbb{A}$, $i = 1,\dots,n$, $y^\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1,\dots,m$. Преобразование координат (1) индуцирует преобразование координат

$$X^{i'} = \varphi^{i'} + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!}\frac{D^p\varphi^{i'}}{Dx^p}\overset{\circ}{X}{}^p, \quad y^{u'} = \varphi^{u'}(x^i, y^u) \tag{2}$$

на $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M$. Преобразования (2) являются $\mathbb{A}$-гладкими [4]. Для описания произвольных $\mathbb{A}$-гладких отображений между областями $\mathbb{A}$-модулей вида $\mathbb{A}^n\oplus\mathbb{R}^m$ введем в $\mathbb{A}$ базис специального вида $\{e_a\} = \{e_0 = 1, e_{\overline{a}}, e_{\widehat{a}}\}$, где $\{e_{\overline{a}}, e_{\widehat{a}}\}$ — базис в $\mathfrak{m}(\mathbb{A})$, а $\{e_{\widehat{a}}\}$ — базис идеала $\mathrm{Ann}(\mathfrak{m}(\mathbb{A}))$, аннулирующего идеал $\mathfrak{m}(\mathbb{A})$.

Если $W \subset \mathbb{A}^n\oplus\mathbb{R}^m$ — открытый координатный параллелепипед в $\mathbb{A}^n\oplus\mathbb{R}^m$, то произвольное $\mathbb{A}$-гладкое отображение $\Phi : W \to \mathbb{A}^{n'}\oplus\mathbb{R}^{m'}$ имеет [4] вид

$$X^{i'} = \varphi^{i'} + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!}\frac{D^p\varphi^{i'}}{Dx^p}\overset{\circ}{X}{}^p, \quad y^{u'} = \varphi^{u'}(x^i, y^u), \tag{3}$$

где $\varphi^{i'}$ являются $\mathbb{A}$-значными функциями вида $\varphi^{i'} = \varphi^{i'0}(x^i) + \varphi^{i'\overline{a}}(x^i)e_{\overline{a}} + \varphi^{i'\widehat{a}}(x^i, y^u)e_{\widehat{a}}$.

Из (2) следует, что $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M$ несет на себе каноническое слоение $\mathcal{F}^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}$, слои которого задаются локально уравнениями $X^i = X^i_0 = \mathrm{const}$, $i = 1,\dots,n$. Слоение $\mathcal{F}^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}$ называется [1] *поднятым слоением*. Отображение π_{tr} является морфизмом слоений. Слоение $\widehat{\mathcal{F}}^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}$, соответствующее подмодулю, порождаемому идеалом $\mathrm{Ann}(\mathfrak{m}(\mathbb{A}))$, будем называть *расширенным поднятым слоением*. Слои этого слоения задаются уравнениями $x^{i0} = x^{i0}_0$, $x^{i\overline{a}} = x^{i\overline{a}}_0$.

Расслоения трансверсальных $\mathbb{A}$-скоростей будем рассматривать как объекты категории, морфизмами которой являются произвольные $\mathbb{A}$-гладкие отображения $\Phi : T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M \to T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M'$. Из уравнений (3) следует, что всякое $\mathbb{A}$-гладкое отображение $\Phi : T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M \to T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M'$ однозначно определяется своим ограничением на нулевое сечение $\varphi = \Phi\circ i_0 : M \to T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M'$. Отображение Φ будем называть *продолжением* отображения φ и обозначать $\varphi^{\mathbb{A}}$. $\mathbb{A}$-гладкое отображение Φ определяет также отображение $\overline{\varphi} = \pi\circ\Phi\circ i_0 : M \to M'$. Указанные отображения образуют коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M & \xrightarrow{\Phi=\varphi^{\mathbb{A}}} & T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M' \\ {\scriptstyle\pi_{\mathrm{tr}}}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle\varphi} & \downarrow{\scriptstyle\pi'_{\mathrm{tr}}} \\ M & \xrightarrow[\overline{\varphi}]{} & M'. \end{array} \tag{4}$$

2. Дифференциально-геометрические объекты на $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M$

Пусть $T^r_{k,\ell}M$ — расслоение r-джетов ростков морфизмов слоений $f : (\mathbb{R}^{k+\ell}, 0) \to M$. Карта слоения на M индуцирует карту $(x^i, y^\alpha; x^i_p, y^\alpha_s)$, $0 \leqslant |p|, |s| \leqslant r$, на $T^r_{k,\ell}M$. Подрасслоение $P^r_{\mathrm{fol}}M$ в $T^r_{n,m}M$, образованное джетами ростков изоморфизмов слоений, называется расслоением *слоеных r-реперов* многообразия M.

Структурной группой этого расслоения является группа Ли $G^r_{n,m}$, образованная r-джетами ростков автоморфизмов стандартного слоения $\sigma : (\mathbb{R}^{n+m}, 0) \to (\mathbb{R}^{n+m}, 0)$. Многообразия $T^r_{n,m}M$ и $P^r_{\mathrm{fol}}M$ несут на себе слоение $\mathcal{F}^r_{n,m}$ с базовыми координатами x^i, x^i_p. Пусть $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}T^r_{n,m}M$ — расслоение трансверсальных $\mathbb{A}$-скоростей по отношению к этому слоению. На $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}T^r_{n,m}M$ индуцируется карта $(x^i, y^\alpha; x^i_p, y^\alpha_s; \overset{\circ}{X}{}^i, \overset{\circ}{X}{}^i_p)$, $0 \leqslant |p|, |s| \leqslant r$. Многообразие $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}T^r_{m,n}M$ несет на себе структуру многообразия над алгеброй $\mathbb{A}$ и слоение $\mathcal{F}^{\mathbb{A},r}_{\mathrm{tr}\,(n,m)}$ с базовыми координатами X^i, X^i_p. Рассмотрим также расслоение $T^r_{n,m}T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M$ по отношению к слоению слоение $\mathcal{F}^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}$ на $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M$.

Предложение 1. *Функторы $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}} \circ T^r_{n,m}$ и $T^r_{n,m} \circ T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}$, рассматриваемые как функторы, действующие из категории слоений в категорию слоеных расслоенных многообразий или в категорию многообразий над локальной алгеброй, $\mathbb{A}$ естественно эквивалентны.*

Пусть $T^r_{m,n}(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M$ — расслоение r-джетов $\mathbb{A}$-гладких ростков $F : (\mathbb{A}^n \oplus \mathbb{R}^m, 0) \to T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M$. Карта слоения (x^i, y^α) на M индуцирует локальную карту $(X^i, X^i_p; y^\alpha; x^{i\widehat{a}}_{s'}, y^\alpha_q)$ на $T^r_{n,m}(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M$, где $0 \leqslant |p|, |q| \leqslant r$, $1 \leqslant |s'| \leqslant r$, $s'_{n+1} + \cdots + s'_{n+m} > 0$.

Предложение 2. *Расслоение $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}T^r_{n,m}M$ естественно эквивалентно (как расслоение и как многообразие над алгеброй $\mathbb{A}$) подрасслоению в $T^r_{n,m}(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M$, образованному r-джетами $\mathbb{A}$-продолжений ростков морфизмов слоений $f : (\mathbb{R}^{m+n}, 0) \to T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M$, где $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M$ рассматривается как слоеное многообразие для поднятого слоения.*

Подрасслоение $P^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M$ в $T^r_{m,n}(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M$, образованное r-джетами ростков $\mathbb{A}$-диффеоморфизмов, назовем расслоением голоморфных r-реперов на $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M$. Это главное расслоение, структурной группой которого является группа $G^r_{n,m}(\mathbb{A})$, образованная r-джетами ростков $\mathbb{A}$-диффеоморфизмов $F : (\mathbb{A}^n \oplus \mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{A}^n \oplus \mathbb{R}^m, 0)$.

Сечение $\alpha : M \to T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M$, являющееся морфизмом слоений по отношению к расширенному слоению $\widehat{\mathcal{F}}^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}$, индуцирует следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
P^r_{\mathrm{fol}}M & & \xrightarrow{\quad T^r_{n,m}\alpha \quad} & & P^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M \\
\Big\downarrow{\scriptstyle R_g} & \searrow^{\pi_M} & & \swarrow_{\pi} & \Big\downarrow{\scriptstyle T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}R_g} \\
 & M & \xrightarrow{\alpha} & T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M & \\
\Big\downarrow{\scriptstyle R_g} & \nearrow_{\pi_M} & & \nwarrow_{\pi} & \Big\downarrow{\scriptstyle T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}R_g} \\
P^r_{\mathrm{fol}}M & & \xrightarrow{\quad T^r_{n,m}\alpha \quad} & & P^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M.
\end{array} \tag{5}$$

Пусть G^r_n — дифференциальная группа порядка r, $P^r_{\mathrm{tr}}M$ — расслоение трансверсальных реперов на M, $p : G^r_{n,m} \to G^r_n$ и $p : P^r_{\mathrm{fol}}M \to P^r_{\mathrm{tr}}M$ — естественные проекции, а $\overline{F}$ — многообразие, на котором задано правое действие $\overline{\beta} : G^r_n \times \overline{F} \to \overline{F}$. Полем трансверсального геометрического объекта типа $(\overline{F}, \overline{\beta})$ будем называть эквивариантное отображение $\overline{\lambda} : P^r_{\mathrm{tr}}M \to \overline{F}$.

Пусть, далее, $q : F \to \overline{F}$ — локально тривиальное расслоение такое, что на F задано правое действие $\beta : G^r_{n,m} \times F \to F$, согласованное с действием $\overline{\beta}$. Полем слоеных геометрических объектов на M типа (F, β) будем называть эквивариантное отображение $\lambda : P^r_{\text{fol}}M \to F$, проектирующееся в поле трансверсальных геометрических объектов $\overline{\lambda} : P^r_{\text{tr}}M \to \overline{F}$ типа $(\overline{F}, \overline{\beta})$. Многообразие $\overline{F}$ будем рассматривать как слоение с одномерными слоями, а многообразие F как многообразие со слоением, порождаемым субмерсией q. Поле трансверсальных геометрических объектов $\overline{\lambda}$ будем называть проектируемым, если $\overline{\lambda}$ является морфизмом слоений. Поле слоеных геометрических объектов λ будем называть проектируемым, если соответствующее поле $\overline{\lambda}$ является проектируемым.

Применяя функтор $T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}$ к действию β и проектируемому полю слоеных объектов λ, получим действие $T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}\beta : T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}G^r_{n,m} \times T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}F \to T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}F$ и $\mathbb{A}$-гладкое поле объектов $T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}\lambda : T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}P^r_{\text{fol}}M \to T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}F$ типа $(T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}F, T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}\beta)$ на $T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}M$. Будем предполагать, что действие $T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}\beta$ продолжается до $\mathbb{A}$-гладкого действия $B : G^r_{n,m}(\mathbb{A}) \times T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}F \to T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}F$. $\mathbb{A}$-гладким полем геометрических объектов типа $(T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}F, B)$ на $T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}M$ будем называть $\mathbb{A}$-гладкое эквивариантное отображение

$$\Lambda : P^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}M \to T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}F. \tag{6}$$

Поле Λ проектируется в некоторое поле слоеных объектов $\lambda : P^r_{\text{fol}}M \to F$. Примером $\mathbb{A}$-гладкого поля геометрических объектов типа $(T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}F, B)$ на $T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}M$ может служить продолжение $T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}\lambda$ поля слоеных геометрических объектов λ.

Теорема 1. *Пусть на слоеном многообразии M заданы поле слоеных геометрических объектов $\lambda : P^r_{\text{fol}}M \to F$ типа (F, β) и сечение $\alpha : M \to T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}M$ расслоения трансверсальных $\mathbb{A}$-скоростей, являющееся морфизмом слоений. Тогда композиция*

$$\mathcal{L}_\alpha\lambda = T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}\lambda \circ T^r_{n,m}\alpha : P^r_{\text{fol}}M \to T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}F \tag{7}$$

является полем слоеных геометрических объектов на M типа $(T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}F, \beta^{\mathbb{A}}_{\text{tr}})$.

Схема доказательства. Эквивариантность отображения (7) следует из диаграммы (5):

$$T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}\lambda \circ T^r_{n,m}\alpha \circ R_g = T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}\lambda \circ T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}R_g \circ T^r_{n,m}\alpha = T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}R_g \circ T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}\lambda \circ T^r_{n,m}\alpha.$$

Определение 1. Поле $\mathcal{L}_\alpha\lambda$ слоеных геометрических объектов на M типа $(T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}F, \beta^{\mathbb{A}}_{\text{tr}})$, определенное формулой (7), будем называть джетом Ли поля слоеных геометрических объектов λ по отношению к сечению (полю трансверсальных джетов) $\alpha : M \to T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}M$.

Определение 2. Два $\mathbb{A}$-гладких поля Λ_1 и Λ_2 (6) геометрических объектов типа $(T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}F, B)$ на расслоении $T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}M$ назовем эквивалентными, если существует $\mathbb{A}$-гладкий диффеоморфизм $A : T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}M \to T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}M$, индуцирующий тождественное отображение $\text{id} : M \to M$, при котором Λ_1 переходит в Λ_2.

Теорема 2. *$\mathbb{A}$-гладкое поле Λ геометрических объектов типа $(T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}F, B)$ на расслоении $T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}M$ эквивалентно $\mathbb{A}$-продолжению $T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}\lambda$ поля слоеных геометрических объектов λ типа (F, β), определяемого полем Λ, тогда и только тогда, когда $\Lambda|P^r_{\text{fol}}M = \mathcal{L}_\alpha\lambda$ для некоторого сечения $\alpha : M \to T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}M$.*

Схема доказательства. $\mathbb{A}$-гладкий диффеоморфизм $A : T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}M \to T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}M$, проектирующийся в тождественное преобразование базы, определяется сечением $\alpha : M \to T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}M$ и совпадает с продолжением $\alpha^{\mathbb{A}}$ из диаграммы (4), в которой нижняя строка является тождественным отображением $\text{id} : M \to M$. Переходя в диаграмме (5) к $\mathbb{A}$-продолжению сечения α, получим диаграмму, в которой верхняя и нижняя строки $T^r_{n,m}(\mathbb{A})\alpha^{\mathbb{A}} : P^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}M \to P^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}_{\text{tr}}M$

являются $\mathbb{A}$-гладкими диффеоморфизмами, индуцированными $\mathbb{A}$-гладким диффеоморфизмом $\alpha^{\mathbb{A}}$. Пусть Λ — поле (6) геометрических объектов типа $(T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}F, B)$ на $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}M$, а λ — определяемое им поле объекта типа (F, β) на M. Диффеоморфизм $\alpha^{\mathbb{A}}$ переводит поле объектов $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}\lambda$ в поле объектов $T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}\lambda \circ T^r_{n,m}(\mathbb{A})\,\alpha^{\mathbb{A}}$, которое совпадает с Λ тогда и только тогда, когда совпадают их ограничения на $P^r_{\mathrm{fol}}M$:

$$\Lambda|P^r_{\mathrm{fol}}M = T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}\lambda \circ T^r_{n,m}(\mathbb{A})\,\alpha^{\mathbb{A}}|P^r_{\mathrm{fol}}M = T^{\mathbb{A}}_{\mathrm{tr}}\lambda \circ T^r_{n,m}\alpha = \mathcal{L}_\alpha\lambda.$$

3. Линейные связности на трансверсальном расслоении

Трансверсальное расслоение $T_{\mathrm{tr}}M$ эквивалентно расслоению $T^{\mathbb{D}}_{\mathrm{tr}}M$ для алгебры дуальных чисел. Карта слоения индуцирует на $T_{\mathrm{tr}}M$ карту $(X^i = x^i + \varepsilon\dot{x}^i, y^\alpha)$.

Линейная связность на M является полем геометрического объекта второго порядка, соответствующим следующему представлению группы G^2_{n+m} на пространстве $\mathbb{R}^{(n+m)^3}$:

$$G^2_{n+m} \times \mathbb{R}^{(n+m)^3} \to \mathbb{R}^{(n+m)^3}, \quad \Gamma^a_{bc} = z^a_{a'}z^{a'}_{bc} + \Gamma^{a'}_{b'c'}z^{b'}_b\, z^{c'}_c\, z^a_{a'},$$

где координаты элемента из $\{\Gamma^a_{bc}\}$ — частные производные ростка $z^{a'} = z^{a'}(z^a)$ диффеоморфизма в нуле.

Подгруппа $G^2_{n,m} \subset G^2_{n+m}$ действует на подмногообразии $F \subset \mathbb{R}^{(n+m)^3}$, определяемом уравнениями $\Gamma^i_{j\beta} = \Gamma^i_{\alpha k} = \Gamma^i_{\alpha\beta} = 0$. Многообразие F расслоено над многообразием $\overline{F} = \mathbb{R}^{n^3}$ с координатами Γ^i_{jk}, на котором действует группа G^2_n.

Проектируемая линейная связность на многообразии M представляет собой эквивариантный гладкий морфизм слоений $\nabla : P^2_{\mathrm{fol}}M \to F$. Для существования такой связности на многообразии M необходимо и достаточно, чтобы обращался в нуль класс Атьи многообразия M [1]. В простой карте слоения связность ∇ задается уравнениями

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^\ell), \quad \Gamma^\alpha_{\beta k} = \Gamma^\alpha_{\beta k}(x^\ell, y^\sigma),$$
$$\Gamma^\alpha_{j\gamma} = \Gamma^\alpha_{j\gamma}(x^\ell, y^\sigma), \quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x^\ell, y^\sigma), \quad \Gamma^\alpha_{jk} = \Gamma^\alpha_{jk}(x^\ell, y^\sigma).$$

$\mathbb{D}$-гладкая $\mathbb{D}$-линейная связность на $T_{\mathrm{tr}}M$ является $\mathbb{D}$-гладким эквивариантным отображением $\widetilde{\nabla} : P^2(\mathbb{D})T^{\mathbb{D}}_{\mathrm{tr}} \to T^{\mathbb{D}}F$. В индуцированной локальной карте $\widetilde{\nabla}$ задается уравнениями

$$\widetilde{\Gamma}^i_{jk}(X^p) = \Gamma^i_{jk}(x^p) + \varepsilon\left(\dot{x}^\ell\partial_\ell\Gamma^i_{jk} + T^i_{jk}(x^p, y^\sigma)\right), \quad \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta k} = \Gamma^\alpha_{\beta k}(x^\ell, y^\sigma), \tag{8}$$

$$\widetilde{\Gamma}^\alpha_{j\gamma} = \Gamma^\alpha_{j\gamma}(x^\ell, y^\sigma), \quad \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x^\ell, y^\sigma), \quad \widetilde{\Gamma}^\alpha_{jk} = \Gamma^\alpha_{jk}(x^\ell, y^\sigma). \tag{9}$$

Предложение 3. *$\mathbb{D}$-гладкая $\mathbb{D}$-линейная связность $\widetilde{\nabla}$ на $T_{\mathrm{tr}}M$ с коэффициентами* (8), (9) *эквивалентна $\mathbb{D}$-продолжению проектируемой линейной связности ∇ тогда и только тогда, когда для некоторого сечения $\dot{x}^i = u^i(x^k, y^\alpha)$ расслоения $T_{\mathrm{tr}}M$ выполняется*

$$T^i_{jk} = u^\ell\partial_\ell\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{\ell k}\partial_j u^\ell + \Gamma^i_{j\ell}\partial_k u^\ell - \Gamma^\ell_{jk}\partial_\ell u^i - \Gamma^\alpha_{jk}\partial_\alpha u^i + \partial^2_{jk}u^i.$$

Литература

[1] Molino P. *Riemannian foliations* (Birkhäuser, Boston, 1988).

[2] Weil A. *Théorie des points proches sur les variététes différentiables*, Colloque internat. centre nat. rech. sci. **52** (Strasbourg, 1953), 111–117 (1953).

[3] Kolář I., Michor P.W., and Slovák J. *Natural operations in differential geometry* (Springer-Verlag, Berlin, 1993).

[4] Shurygin V.V. *Smooth manifolds over local algebras and Weil bundles*, J. Math. Sci. **108** (2), 249–294 (2002).

[5] Шурыгин В.В. *Многообразия над алгебрами и их применение в геометрии расслоений струй*, УМН **48** (2), 75–106 (1993).

[6] Вишневский В.В. *Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации*, Итоги науки и техн. Современ. матем. и ее прилож. (ВИНИТИ, М., 2002) **73**, 5–64.
[7] Pogoda Z. *Horizontal lifts and foliations*. Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. 2 **38**, suppl. №21, 279–289 (1989).

С.К. Зубкова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: kuzmina_s@list.ru

В.В. Шурыгин

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Vadim.Shurygin@kpfu.ru

S.K. Zubkova and V.V. Shurygin

Transversal Lie jets and holomorphic geometric objects on transverse bundles

Abstract. Two holomorphic fields of geometric objects on a transverse Weil bundle are called equivalent if there exists a holomorphic diffeomorphism of this bundle onto itself which induces the identity transformation of the base manifold and maps one of these fields into the other. In terms of transverse Lie jets, we establish necessary and sufficient conditions for a holomorphic field of geometric objects on a transverse Weil bundle to be equivalent to the prolongation of a field of foliated geometric objects given on the base manifold. As an example, we consider a holomorphic linear connection on a transverse bundle.

Keywords: Weil algebra, geometric object, Lie jet, Weil bundle, transverse bundle.

S.K. Zubkova

Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: kuzmina_s@list.ru

V.V. Shurygin

Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Vadim.Shurygin@kpfu.ru