ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 3 (514)

УДК 517.518

Г.А. АКИШЕВ

О ПОРЯДКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ ПОЛИНОМАМИ ПО ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЕ ХААРА

Пусть $\mathbb{R}^d$ — d-мерное вещественное евклидово пространство, $\overline{x} = (x_1, \dots, x_d)$, $I^d = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^d;\ 0 \leqslant x_j \leqslant 1;\ j = 1, \dots, d\}$.

Банахово пространство X измеримых по Лебегу на I^d функций называется симметричным, если

1. из того, что $|f(\overline{x})| \leqslant |g(\overline{x})|$ почти всюду на I^d и $g \in X$ следует, что $f \in X$ и $\|f\|_X = \|g\|_X$;
2. из $f \in X$ и равноизмеримости функций $|f(\overline{x})|$ и $|g(\overline{x})|$ следует $g \in X$ и $\|f\|_X = \|g\|_X$ (см. [1], с. 123).

Здесь и в дальнейшем $\|f\|_X$ означает норму элемента $f \in X$.

Пусть $\chi_e(t)$ — характеристическая функция множества $e \subset I^d$. Функция $\varphi(\mu e) = \|\chi_e\|_X$ называется фундаментальной функцией пространства X, где μe — мера Лебега измеримого множества e. Таким образом, фундаментальная функция симметричного пространства X есть функция $\varphi(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_X$, определенная на отрезке $[0, 1]$. Фундаментальную функцию $\varphi(t)$ симметричного пространства можно считать вогнутой, неубывающей, непрерывной на $[0, 1]$ функцией, причем $\varphi(0) = 0$ ([1], с. 137). Такие функции называются Φ-функциями. Далее $X(\varphi)$ означает симметричное пространство с фундаментальной функцией φ.

Ассоциированное к симметричному пространству $X(\varphi)$ пространство X^1 состоит из всех измеримых функций $g(t)$, для которых

$$\|g\|_{X^1} = \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|_X \leqslant 1}} \int_0^1 f(t) g(t) dt.$$

Известно, что сепарабельность симметричного пространства $X(\varphi)$ является необходимым и достаточным условием совпадения ассоциированного к нему пространства X^1 со всем сопряженным пространством $X'(\overline{\varphi})$ ([1], с. 138), при этом $\overline{\varphi}(t) = \frac{t}{\varphi(t)}$, $t \in (0, 1]$ и $\overline{\varphi}(0) = 0$.

Далее будем рассматривать сепарабельные симметричные пространства. Сепарабельными симметричными пространствами являются, например,

1. $L_q(I^d)$ — пространство Лебега с нормой

$$\|f\|_q = \left(\int_{I^d} |f(\overline{x})|^q d\overline{x} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 < q < +\infty;$$

2. пространство Марцинкевича $M_q(I^d)$ с нормой

$$\|f\|_{q,\infty} = \sup_{t \in (0,1]} t^{\frac{1}{q}-1} \int_0^t f^*(\tau) d\tau,$$

где $f^*(\tau)$ — невозрастающая перестановка функций $|f(\overline{x})|$ (см. [1], с. 83);

3. пространство Лоренца $L_{q\theta}(I^d)$ с нормой

$$\|f\|_{q\theta} = \left\{ \frac{\theta}{q} \int_0^1 \left(\int_0^t f^*(\tau) d\tau \right)^\theta t^{\theta(\frac{1}{q}-1)-1} dt \right\}^{\frac{1}{\theta}} < +\infty, \quad 1 \leqslant q < +\infty, \quad 1 < \theta < +\infty.$$

Для функции $\Psi(t)$, $t\in[0,1]$, положим

$$\alpha_\Psi=\varliminf_{t\to 0}\frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)},\quad \beta_\Psi=\varlimsup_{t\to 0}\frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)}.$$

Известно, что для любого симметричного пространства $X(\varphi)$ справедливы неравенства $1\leqslant\alpha_\varphi\leqslant\beta_\varphi\leqslant 2$.

Пусть

$$\Omega(f,\overline{t})_X\equiv\Omega(f,t_1,\dots,t_d)_X=\sup_{\substack{0\leqslant h_j\leqslant t_j\\ j=1,\dots,d}}\left\|\Delta_{\overline{h}}^{\overline{1}}f\prod_{j=1}^{d}\chi_{[0,1-h_j]}(x_j)\right\|_X$$

— смешанный модуль непрерывности функции $f\in X(\varphi)$, где $\Delta_{\overline{h}}^{\overline{1}}f(\overline{x})=\Delta_{h_1}^1(\dots\Delta_{h_d}^1f(x_1,\dots,x_d))$ — смешанная разность функции $f\in X(\varphi)$.

Рассмотрим функциональный класс

$$H_X^{\overline{r}}=\left\{f\in X(\varphi):\Omega(f,\overline{t})_{X(\varphi)}\leqslant\prod_{j=1}^{d}t_j^{r_j},\ \overline{t}\in I^d\right\},\quad 0<r_j\leqslant 1\ \text{ для всех }\ j=1,\dots,d.$$

В случае $r_1=\dots=r_d=r$ вместо $H_X^{\overline{r}}$ будем писать H_X^r.

Через $C(q,p,r,\dots)$ обозначим величины, зависящие от указанных параметров. Запись $A\asymp B$ означает, что существуют положительные постоянные c_1, c_2 такие, что $c_1A\leqslant B\leqslant c_2A$.

Рассмотрим обобщенную систему Хаара, определенную на отрезке $[0,1]$. Пусть дана последовательность $\{p_n\}$ натуральных чисел, $p_n\geqslant 2$ для всех $n=1,2,\dots$ Обобщенная система Хаара $\chi\{p_n\}=\{\chi_n(t)\}$ определяется следующим образом ([2], [3]): положим $\chi_1(t)\equiv 1$ на отрезке $[0,1]$. Заданное натуральное число $n\geqslant 2$ представляется в виде $n=m_k+r(p_{k+1}-1)+s$, где $m_k=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k$; $k=1,2,\dots$; $r=0,1,\dots,m_k-1$; $s=1,2,\dots,p_{k+1}-1$.

Через A обозначим множество точек вида $\frac{l}{m_k}$ на отрезке $[0,1]$, $l=0,1,\dots$ Тогда при $t\in B\equiv[0,1]\setminus A$ разложение $t=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(t)}{m_k}$, $\alpha_k(t)=0,1,\dots,p_k-1$, единственно. Далее, определим функцию $\chi_n(t)\equiv\chi_{k,r}^s(t)$ следующим образом:

$$\chi_n(t)=\chi_{k,r}^s(t)=\begin{cases}\sqrt{m_k}\exp\left\{\frac{2\pi is\alpha_{k+1}(t)}{p_{k+1}}\right\}, & t\in\left(\frac{r}{m_k},\frac{r+1}{m_k}\right)\cap B;\\ 0, & t\notin\left[\frac{r}{m_k},\frac{r+1}{m_k}\right].\end{cases}$$

Пользуясь тем, что множество B всюду плотно на $[0,1]$, функцию $\chi_n(t)$ по непрерывности продолжим на интервал $\left(\frac{r}{m_k},\frac{r+1}{m_k}\right)$. Затем в точках разрыва эту функцию положим равной полусумме ее предельных значений справа и слева, а на концах 0 и 1 — ее предельным значениям изнутри отрезка. Определенная таким образом система $\chi\{p_n\}$ ортонормирована и полна в пространстве L_1 ([2], [3]).

Пусть даны $\{p_{n_j}^{(j)}\}$ — последовательности натуральных чисел $p_{n_j}^{(j)}\geqslant 2$; $n_j=1,2,\dots$; $j=1,2,\dots,d$ и $m_{n_j}^{(j)}=p_1^{(j)}\cdot\ldots\cdot p_{n_j}^{(j)}$. Через $\{\chi_{\overline{n}}(\overline{x})\}=\left\{\prod\limits_{j=1}^{d}\chi_{n_j}(x_j)\right\}$ обозначим кратную обобщенную систему Хаара, $a_{\overline{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f\in L_1(I^d)$ по этой системе. Пусть также

$$T_{\overline{n}}(\overline{x})=\sum_{k_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{k_d=1}^{n_d}a_{k_1,\dots,k_d}\prod_{j=1}^{d}\chi_{k_j}(x_j)=\sum_{\overline{1}\leqslant\overline{k}\leqslant\overline{n}}a_{\overline{k}}\chi_{\overline{k}}(\overline{x})$$

— полином по обобщенной системе Хаара порядка n_j по переменной x_j. Здесь неравенство $\overline{k}\leqslant\overline{n}$ понимается в том смысле, что $k_j\leqslant n_j$ для всех $j=1,\dots,d$.

Положим

$$\delta_{\overline{\nu}}(f,\overline{x}) = \sum_{n_1=m^{(1)}_{\nu_1}}^{m^{(1)}_{\nu_1+1}-1} \cdots \sum_{n_d=m^{(d)}_{\nu_d}}^{m^{(1)}_{\nu_d+1}-1} a_{n_1,\ldots,n_d}(f) \prod_{j=1}^{d} \chi_{k_j}(x_j),$$

$$S_n^{\overline{\gamma}}(f,\overline{x}) = \sum_{\langle \overline{s},\overline{\gamma}\rangle \leqslant n} \delta_{\overline{s}}(f,\overline{x}),$$

где $\langle \overline{s},\overline{\gamma}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{d} s_j\gamma_j$. В случае $\overline{\gamma} = (1,\ldots,1)$ будем писать $S_n(f,\overline{x})$ и $\|\overline{s}\|$ соответственно вместо $S_n^{\overline{\gamma}}(f,\overline{x})$ и $\langle \overline{s},\overline{\gamma}\rangle$.

Порядки приближения классов H^r_θ по норме пространства Лебега $L_q(I^d)$ полиномами по кратной системе Хаара с гармониками из гиперболических крестов исследованы в [4], а оценки N-членных приближений — в [5]–[7].

В данной статье изучаются порядки приближения функциональных классов H^r_X полиномами по обобщенной системе Хаара по норме пространства Марцинкевича.

Лемма А ([8], лемма 4). *Пусть даны Φ-функции $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$, $x \in (0,1]$, и $\beta_{\phi_1} < \alpha_{\phi_2}$. Тогда для функции*

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{\phi_2(x)}{\phi_1(x)}, & x \in (0,1]; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

существует Φ-функция $\theta_1(x)$, для которой $\alpha_{\theta_1} > 1$ и $\theta_1(x) \asymp \theta(x)$, $x \in [0,1]$.

Лемма Б. *Для любых чисел $p > 1$, $\alpha > 0$ имеет место соотношение*

$$\sum_{\langle \overline{s},\overline{\gamma}\rangle > n} p^{-\alpha\langle \overline{s},\overline{\gamma}\rangle} \asymp p^{-\alpha n} \cdot n^{d-1}.$$

Лемма В. *Пусть $\overline{\gamma} = (\gamma_1,\ldots,\gamma_d)$ такие, что $1 = \gamma_j$, $j = 1,\ldots,l$; $1 < \gamma_j$, $j = l+1,\ldots,d$. Тогда для любых чисел $p > 1$, $\alpha > 0$ имеет место неравенство*

$$\sum_{\langle \overline{s},\overline{\gamma}\rangle \leqslant n} p^{\alpha\langle \overline{s},\overline{\gamma}\rangle} \leqslant C(\alpha,p) \cdot p^{\alpha n} \cdot n^{d-1}.$$

Леммы Б, В доказываются так же, как в случае $p = 2$ ([9], с. 11).

Теперь докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Для любой функции $f \in X(\varphi)$ имеет место неравенство*

$$\|\delta_{\overline{\nu}}(f)\|_X \leqslant C(d) \|\Delta^{\overline{1}}_{m^{-1}_{\nu_1+1},\ldots,m^{-1}_{\nu_d+1}} f\|_X \cdot \prod_{j=1}^{d} p^{(j)}_{\nu_j+1} \ln p^{(j)}_{\nu_j+1}.$$

Доказательство проведем для случая $d = 2$. Учитывая определение функций обобщенной системы Хаара и применяя преобразование Абеля, получим

$$a_{n_1n_2}(f) = \sqrt{m^{(1)}_{\nu_1} \cdot m^{(2)}_{\nu_2}} \sum_{k_1=1}^{p^{(1)}_{\nu_1+1}-1} \sum_{k_2=1}^{p^{(2)}_{\nu_2+1}-1} \int_{\rho_{\nu_1 r_1 k_1}} \int_{\rho_{\nu_2 r_2 k_2}} \Delta^{11}_{m^{-1}_{\nu_1+1} m^{-1}_{\nu_2+1}} f(x_1,x_2) dx_1 dx_2 \times$$

$$\times \frac{1 - \exp\{-2\pi i \frac{k_1}{p^{(1)}_{\nu_1+1}}\}}{1 - \exp\{-2\pi i \frac{s_1}{p^{(1)}_{\nu_1+1}}\}} \cdot \frac{1 - \exp\{-2\pi i \frac{k_2}{p^{(2)}_{\nu_2+1}}\}}{1 - \exp\{-2\pi i \frac{s_2}{p^{(2)}_{\nu_2+1}}\}}, \qquad (1)$$

где

$$\rho_{\nu r k} = \left(\frac{r}{m_\nu} + \frac{k-1}{m_{\nu+1}}, \frac{r}{m_\nu} + \frac{k}{m_{\nu+1}}\right).$$

Положим
$$I(\overline{r})=\Big[\frac{r_1}{m_{\nu_1}},\frac{r_1+1}{m_{\nu_1}}\Big]\times\Big[\frac{r_2}{m_{\nu_2}},\frac{r_2+1}{m_{\nu_2}}\Big].$$

В силу равенства (1), определения функций $\chi^{(s)}_{\nu,r}$ и свойства интеграла для любой функции $g\in X'(\varphi)$, $\|g\|_{X'}\leqslant 1$, имеем

$$\Big|\int_0^1\int_0^1\delta_{\overline{\nu}}(f,\overline{t})g(\overline{t})dt_1dt_2\Big|=\Big|\int_0^1\int_0^1\sum_{r_1=0}^{m^{(1)}_{\nu_1}-1}\sum_{r_2=0}^{m^{(2)}_{\nu_2}-1}\sum_{s_1=1}^{p^{(1)}_{\nu_1+1}-1}\sum_{s_2=1}^{p^{(2)}_{\nu_2+1}-1}a^{(\overline{s})}_{\overline{\nu},\overline{r}}(f)\prod_{j=1}^{2}\chi^{(s_j)}_{\nu_j,r_j}(t_j)g(\overline{t})dt_1dt_2\Big|\leqslant$$
$$\leqslant 4m^{(1)}_{\nu_1}\cdot m^{(2)}_{\nu_2}\int_0^1\int_0^1\sum_{r_1=0}^{m^{(1)}_{\nu_1}-1}\sum_{r_2=0}^{m^{(2)}_{\nu_2}-1}\sum_{s_1=1}^{p^{(1)}_{\nu_1+1}-1}\sum_{s_2=1}^{p^{(2)}_{\nu_2+1}-1}\prod_{j=1}^{2}\Big|1-\exp\{-2\pi i\frac{s_j}{p^{(j)}_{\nu_j+1}}\}\Big|^{-1}\times$$
$$\times\Big[\sum_{k_1=1}^{p^{(1)}_{\nu_1+1}-1}\sum_{k_2=1}^{p^{(2)}_{\nu_2+1}-1}\int_{\rho_{\nu_1r_1k_1}}\int_{\rho_{\nu_2r_2k_2}}|\Delta^{11}_{(m^{(1)}_{\nu_1+1})^{-1}(m^{(2)}_{\nu_2+1})^{-1}}f(x_1,x_2)|dx_1dx_2\Big]\chi_{I(\overline{r})}(\overline{t})g(\overline{t})dt_1dt_2. \quad (2)$$

Далее, учитывая неравенство ([3], с. 307)
$$\sum_{s=1}^{p_{\nu+1}-1}\Big|1-\exp\Big\{-2\pi i\frac{s}{p_{\nu+1}}\Big\}\Big|^{-1}\leqslant C\cdot p_{\nu+1}\ln p_{\nu+1},$$
из (2) получим

$$\Big|\int_0^1\int_0^1\delta_{\overline{\nu}}(f,\overline{t})g(\overline{t})dt_1dt_2\Big|\leqslant\sum_{r_1=0}^{m^{(1)}_{\nu_1}-1}\sum_{r_2=0}^{m^{(2)}_{\nu_2}-1}\int_{I(\overline{r})}\Big[\sup_{\overline{t}\in I}\frac{1}{|I|}\int_I|\Delta^{11}_{(m^{(1)}_{\nu_1+1})^{-1}(m^{(1)}_{\nu_2+1})^{-1}}f(x_1,x_2)|\times$$
$$\times\chi_{\rho^-_{\nu_1r_1}\rho^-_{\nu_2r_2}}(x_1,x_2)dx_1dx_2\Big]\cdot|g(\overline{t})|dt_1dt_2=4\prod_{j=1}^{2}p^{(j)}_{\nu_j+1}\ln p^{(j)}_{\nu_j+1}\int_0^1\int_0^1\Big[\sup_{\overline{t}\in I}\frac{1}{|I|}\times$$
$$\times\int_I|\Delta^{11}_{(m^{(1)}_{\nu_1+1})^{-1}(m^{(1)}_{\nu_2+1})^{-1}}f(x_1,x_2)|\chi_{\rho^-_{\nu_1r_1}\rho^-_{\nu_2r_2}}(x_1,x_2)dx_1dx_2\Big]\cdot|g(\overline{t})|dt_1dt_2$$

(где $\rho_{\nu r}=[\frac{r}{m_\nu},\frac{r+1}{m_\nu}-\frac{1}{m_{\nu+1}}]$) для любой функции $g\in X'(\overline{\varphi})$, $\|g\|_{X'}\leqslant 1$.

Следовательно, в силу ограниченности максимального оператора Харди в симметричном пространстве ([1], с. 187) будем иметь
$$\|\delta_{\overline{\nu}}(f)\|_X\leqslant 4\prod_{j=1}^{2}p^{(j)}_{\nu_j+1}\ln p^{(j)}_{\nu_j+1}\cdot\big\|\Delta^{11}_{m^{-1}_{\nu_1+1},m^{-1}_{\nu_2+1}}f\cdot\chi_\rho\big\|_X. \quad \square$$

Замечание. Из доказанной леммы в случае $X(\varphi)=L_q(I^d)$, $1\leqslant q<+\infty$, и $p^{(j)}_{n_j}=2\quad\forall n_j=1,2,\ldots;\ j=1,\ldots,d$ (т. е. $\chi_n\{p_n\}$ — система Хаара), следует лемма 1 [4].

Лемма 2. *Пусть $X(\varphi)$ — симметричное пространство, $1<\alpha_\varphi,\beta_\varphi\leqslant 2$. Тогда для любого полинома $T_{\overline{m}_n}(\overline{x})$ по обобщенной системе Хаара имеет место неравенство*
$$\|T_{\overline{m}_n}\|_\infty\leqslant C(\varphi)\cdot\frac{1}{\varphi\Big[\Big(\prod\limits_{j=1}^{d}m^{(j)}_{n_j}\Big)^{-1}\Big]}\cdot\|T_{\overline{m}_n}\|_X.$$

Доказательство. Известно, что ([10])
$$T_{\overline{m}_n}(\overline{y})=\int_{I^d}T_{\overline{m}_n}(\overline{x})\cdot\prod_{j=1}^{d}D_{m^{(j)}_{n_j}}(x_j,y_j)d\overline{x},$$

где $D_n(u,t)=\sum\limits_{l=1}^{n}\chi_l(u)\overline{\chi}_l(t)$ — ядро Дирихле по обобщенной системе Хаара, и ([3], с. 300)

$$D_{m_n}(u,t)=\begin{cases} m_n, & \text{если}\quad u,t\in\left(\frac{r}{m_n},\frac{r+1}{m_n}\right);\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Из этих равенств и определения максимального пространства следует утверждение леммы.

Отметим, что лемма 2 в одномерном случае доказана в [11], а в случае $X(\varphi)=L_p(I^d)$ (пространство Лебега), $1\leqslant p<+\infty$, $d\geqslant 1$, доказана в [10].

Лемма 3. *Пусть $X(\varphi)$ — симметричное пространство, $1<\alpha_\varphi,\beta_\varphi\leqslant 2$, и кратная обобщенная система Хаара определена ограниченными последовательностями $\{p_n^{(j)}\}, p_n^{(j)}\leqslant p^{(j)}$, $j=1,\dots,d$, $p=\max\limits_j p^{(j)}$. Тогда для любой функции $f\in X(\varphi)$ имеет место неравенство*

$$\frac{1}{x}\int_0^x f^*(t)dt\leqslant C(\varphi,p)\left\{\frac{1}{\varphi(x)}\cdot\|f-S_n^{(\overline{\gamma})}(f)\|_X+\sum_{\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle\leqslant n}\left[\varphi\left(\left[\prod_{j=1}^{d}m_{s_j}^{(j)}\right]^{-1}\right)\right]^{-1}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_X\right\}$$

для каждого $x\in(p^{-n},p^{-n+1}]$, $n=1,2,\dots$

Доказательство. Воспользуемся известным равенством ([1], с. 89)

$$\frac{1}{x}\int_0^x f^*(t)dt=\frac{1}{x}\sup_{\substack{A\subset I^d\\ \mu A=x}}\int_A|f(\overline{x})|d\overline{x},\quad x\in(0,1].$$

Тогда

$$\frac{1}{x}\int_0^x f^*(t)dt\leqslant\frac{1}{x}\left\{\sup_{\substack{A\subset I^d\\ \mu A=x}}\int_A|f(\overline{x})-S_n^{(\overline{\gamma})}(f,\overline{x})|d\overline{x}+\sup_{\substack{A\subset I^d\\ \mu A=x}}\int_A|S_n^{(\overline{\gamma})}(f,\overline{x})|d\overline{x}\right\}.\tag{3}$$

Применяя неравенство Гёльдера (см. определение максимального симметричного пространства), получим

$$\int_A|f(\overline{x})-S_n^{(\overline{\gamma})}(f,\overline{x})|d\overline{x}\leqslant\frac{\mu A}{\overline{\phi}(\mu A)}\cdot\|f-S_n^{(\overline{\gamma})}(f)\|_X\tag{4}$$

для любого измеримого множества $A\subset I^d$. Далее, пользуясь неравенством разных метрик (см. лемму 2), будем иметь

$$\int_A|S_n^{(\overline{\gamma})}(f,\overline{x})|d\overline{x}\leqslant\sum_{l=1}^{n}\sum_{l-1<\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle\leqslant l}\int_A|\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})|d\overline{x}\leqslant$$
$$\leqslant C(\varphi,d)\sum_{l=1}^{n}\sum_{l-1<\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle\leqslant l}\mu A\left[\varphi\left(\left[\prod_{j=1}^{d}m_{s_j}^{(j)}\right]^{-1}\right)\right]^{-1}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_X.\tag{5}$$

Из неравенств (3)–(5) следует утверждение леммы. □

Лемма 4. *Пусть $0<r<\log_2\alpha_\varphi<1$. Тогда функция одной переменной*

$$f_0(t)=\sum_{k=1}^{\infty}m_k^{-(r+\frac{1}{2})}\cdot\frac{1}{\varphi(m_k^{-1})}\chi_{m_k+p_{k+1}}(t),\quad t\in[0,1],$$

принадлежит классу H_X^r.

Доказательство. Так как $\|\chi_{m_k+p_{k+1}}\|_X = \sqrt{m_k}\cdot\varphi(m_k^{-1})$, то

$$\|f_0\|_X \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{m_k^{-(r+\frac{1}{2})}}{\varphi(m_k^{-1})}\|\chi_{m_k+p_{k+1}}\|_X = \sum_{k=1}^{\infty} m_k^{-r} < +\infty,$$

т. е. $f_0 \in X(\varphi)$.

Докажем, что $C_0\cdot f_0 \in H_X^r$, где C_0 — некоторое положительное число. Пусть $h\in(0,1]$ и натуральное число ν такое, что $h\in(m_{\nu+1}^{-1}, m_\nu^{-1}]$. Тогда по свойству нормы имеем

$$\|[f(\cdot+h)-f(\cdot)]\chi_{[0,1-h]}\|_X \leqslant \sum_{k=1}^{\nu}\frac{m_k^{-(r+\frac{1}{2})}}{\varphi(m_k^{-1})}\|[\chi_{m_k+p_{k+1}}(\cdot+h)-\chi_{m_k+p_{k+1}}]\chi_{[0,1-h]}\|_X + \\ + 2\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\frac{m_k^{-(r+\frac{1}{2})}}{\varphi(m_k^{-1})}\|\chi_{m_k+p_{k+1}}\|_X. \quad (6)$$

Так как $h\in(m_{\nu+1}^{-1}, m_\nu^{-1}]$, то $1-h\geqslant 1-\frac{1}{m_\nu} > 1-\frac{1}{p_1} > \frac{2}{p_1}$ при $p_1\geqslant 3$. Следовательно, по определению функции $\chi_n(t)$ имеем $\chi_{m_k+p_{k+1}}(t)=\chi_{m_k+p_{k+1}}(t+h)=0$ для $t\in(\frac{2}{p_1}, 1-h]$. Поэтому для чисел $k=1,2,\ldots,\nu$ имеют место равенства

$$\int_0^{1-h}[\chi_{m_k+p_{k+1}}(t+h)-\chi_{m_k+p_{k+1}}(t)]g(t)dt = \int_0^{2/p_1}[\chi_{m_k+p_{k+1}}(t+h)-\chi_{m_k+p_{k+1}}(t)]g(t)dt = \\ = \sum_{j=0}^{p_{k+1}-1}\int_{\frac{1}{m_k}+\frac{j}{m_{k+1}}}^{\frac{1}{m_k}+\frac{j+1}{m_{k+1}}}[\chi_{m_k+p_{k+1}}(t+h)-\chi_{m_k+p_{k+1}}(t)]g(t)dt. \quad (7)$$

По выбору $h\leqslant\frac{1}{m_\nu}\leqslant\frac{1}{m_{k+1}}$, $k=1,\ldots,\nu-1$. Поэтому если $t\in\left(\frac{1}{m_k}+\frac{j+1}{m_{k+1}}-h, \frac{1}{m_k}+\frac{j+1}{m_{k+1}}\right)$, то $t+h\in\left(\frac{1}{m_k}+\frac{j+1}{m_{k+1}}, \frac{1}{m_k}+\frac{j+2}{m_{k+1}}\right)$. Следовательно, по определению функций $\chi_{m_k+p_{k+1}}(t)$ имеем

$$\int_{\frac{1}{m_k}+\frac{j}{m_{k+1}}}^{\frac{1}{m_k}+\frac{j+1}{m_{k+1}}}[\chi_{m_k+p_{k+1}}(t+h)-\chi_{m_k+p_{k+1}}(t)]g(t)dt = \\ = \sqrt{m_k}\int_{\frac{1}{m_k}+\frac{j+1}{m_{k+1}}-h}^{\frac{1}{m_k}+\frac{j+1}{m_{k+1}}}\left[\exp\left\{\frac{2\pi i(j+1)}{p_{k+1}}\right\}-\exp\left\{\frac{2\pi i}{p_{k+1}}\right\}\right]g(t)dt \quad (8)$$

для любой функции $g\in X'(\overline{\varphi})$, $\|g\|_{X'}\leqslant 1$. Из (7), (8) следует

$$\sum_{k=1}^{\nu}\frac{m_k^{-(r+\frac{1}{2})}}{\varphi(m_k^{-1})}\|[\chi_{m_k+p_{k+1}}(\cdot+h)-\chi_{m_k+p_{k+1}}]\chi_{[0,1-h]}\|_X \leqslant C\cdot\varphi(h)\cdot\sum_{k=1}^{\nu}\frac{m_k^{-r}}{\varphi(m_k^{-1})}. \quad (9)$$

По условию леммы $2^r<\alpha_\varphi$. Тогда $\exists\varepsilon>0 : 2^r<2^{r+\varepsilon}<\alpha_\varphi$. Поэтому в силу леммы A для функции

$$\theta(t)=\begin{cases}\frac{\varphi(t)}{t^{r+\varepsilon}}, & t\in(0,1];\\ 0, & t=0,\end{cases}$$

существует Ф-функция $\theta_1(t)$ такая, что $\theta(t)\asymp\theta_1(t)$. Значит, функция $\theta_1(t)=\frac{\varphi(t)}{t^{r+\varepsilon}}$ возрастает на $(0,1]$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\nu}\frac{m_k^{-r}}{\varphi(m_k^{-1})}\leqslant C\cdot\frac{m_\nu^{-r}}{\varphi(m_\nu^{-1})}.$$

Тогда, учитывая $h \in (m_{\nu+1}^{-1}, m_\nu^{-1}]$ и свойства функции φ, из неравенства (9) получим

$$\sum_{k=1}^{\nu} \frac{m_k^{-(r+\frac{1}{2})}}{\varphi(m_k^{-1})} \|[\chi_{m_k+p_{k+1}}(\cdot+h) - \chi_{m_k+p_{k+1}}]\chi_{[0,1-h]}\|_X \leqslant C\varphi(h) \cdot \frac{m_\nu^{-r}}{\varphi(m_\nu^{-1})} \leqslant C \cdot m_\nu^{-r} \leqslant C \cdot h^r. \quad (10)$$

Далее, т. к. ([10]) $\|\chi_n\|_X \asymp \varphi(m_k^{-1}) m_k^{\frac{1}{2}}$ для $n = m_k+1, \ldots, m_{k+1}$, то

$$\sum_{k=\nu+1}^{\infty} \frac{m_k^{-(r+\frac{1}{2})}}{\varphi(m_k^{-1})} \|\chi_{m_k+p_{k+1}}\|_X \leqslant C \cdot \sum_{k=\nu+1}^{\infty} m_k^{-r} \leqslant C \cdot m_{\nu+1}^{-r} C \cdot h^r. \quad (11)$$

Из неравенств (6), (10), (11) следует

$$\|[f_0(\cdot+h) - f_0(\cdot)]\chi_{[0,1-h]}\|_X \leqslant C \cdot h^r.$$

Таким образом, $\frac{1}{C} f_0 \in H_X^r$. $\square$

Далее положим $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $j = 1, \ldots, d$.

Теорема 1. *Пусть обобщенная система Хаара определена ограниченными последовательностями* $\{p_n^{(j)}\}$, $p_n^j \leqslant p^{(j)}$, $j = 1, \ldots, d$, $p = \overline{\max} p^{(j)}$; $X(\varphi)$ *— симметричное пространство с фундаментальной функцией* φ *и* $\frac{1}{q} < \log_2 \alpha_\varphi$, $\log_2 \beta_\varphi < \frac{1}{q} + r_1$, $1 \leqslant q < +\infty$, $0 < r_1 < 1$, $0 < r_1 = \cdots = r_l < r_{l+1} \leqslant \cdots \leqslant r_d$. *Если*

$$\sup_{n>0} \left\{ \frac{p^{-\frac{n}{q}}}{\varphi(p^{-n})} \sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle > n} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_X + p^{-\frac{n}{q}} \sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \leqslant n} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\overline{s}\|})} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_X \right\} < +\infty, \quad (12)$$

то $f \in M_q(I^d)$ *и имеет место оценка*

$$\sup_{f \in H_X^{\overline{r}}} \|f - S_n^{(\overline{\gamma})}(f)\|_{q,\infty} \leqslant C \cdot \frac{p^{-n(r_1+\frac{1}{q})}}{\varphi(p^{-n})} \cdot n^{d-1}.$$

Доказательство. Пользуясь леммой 3, для любого $x \in (p^{-n}, p^{-n+1}]$ получим

$$x^{\frac{1}{q}-1} \int_0^x f^*(t)dt \leqslant C(p,d,\varphi) \sup_{n>0} \left\{ \frac{p^{-\frac{n}{q}}}{\varphi\left(\frac{1}{p^n}\right)} \|f - S_n^{(\overline{\gamma})}(f)\|_X + p^{-\frac{n}{q}} \sum_{0<\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \leqslant n} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\overline{s}\|})} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_X \right\}.$$

Следовательно, в силу условия (12) $f \in M_q(I^d)$ и

$$\|f\|_{q,\infty} \leqslant C(p,d,\varphi) \sup_{n>0} \left\{ \frac{p^{-\frac{n}{q}}}{\varphi(p^{-n})} \sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle > n} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_X + p^{-\frac{n}{q}} \sum_{0<\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \leqslant n} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\overline{s}\|})} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_X \right\}. \quad (13)$$

Применяя неравенство (13) к функции $f - S_n^{(\overline{\gamma})}(f) \in M_q(I^d)$, будем иметь

$$\|f - S_n^{(\overline{\gamma})}(f)\|_{q,\infty} \leqslant C(p,d,\varphi) \sup_{\nu>0} \left\{ \frac{p^{-\frac{\nu}{q}}}{\varphi(p^{-\nu})} \sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle > \nu} \|\delta_{\overline{s}}(f - S_n^{(\overline{\gamma})}(f))\|_X + \right.$$

$$\left. + p^{-\frac{1}{q}} \sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \leqslant \nu} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\overline{s}\|})} \|\delta_{\overline{s}}(f - S_n^{(\overline{\gamma})}(f))\|_X \right\}. \quad (14)$$

Если $\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \leqslant n$, то $\delta_{\overline{s}}(f - S_n^{(\overline{\gamma})}(f))(x) = 0$. Если же $\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle > n$, то $\delta_{\overline{s}}(f - S_n^{\overline{\gamma}}(f))(\overline{x}) = \delta_{\overline{s}}(f, \overline{x})$. Учитывая эти равенства, получим

$$\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \leqslant \nu} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\overline{s}\|})} \|\delta_{\overline{s}}(f - S_n^{(\gamma)}(f))\|_X = 0,$$

$$\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle > \nu} \|\delta_{\overline{s}}(f - S_n^{(\overline{\gamma})}(f))\|_X = \sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \geqslant n} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_X \quad (15)$$

для всех $\nu = 1, \dots, n$.

Пусть $\nu > n$, тогда

$$\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \leqslant \nu} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\overline{s}\|})} \|\delta_{\overline{s}}(f - S_n^{\overline{(\gamma)}}(f))\|_X = \sum_{n < \langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \leqslant \nu} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\overline{s}\|})} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_X, \tag{16}$$

$$\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle > \nu} \|\delta_{\overline{s}}(f - S_n^{(\overline{\gamma})})\|_X = \sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle > \nu} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_X. \tag{17}$$

Из соотношений (14)–(17) следует

$$\sigma_\nu(f) = \frac{p^{-\nu/q}}{\varphi(p^{-\nu})} \sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle > \nu} \|\delta_{\overline{s}}(f - S_n^{(\overline{\gamma})})\|_X + p^{-\nu/q} \sum_{0 < \langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \leqslant \nu} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\overline{s}\|})} \|\delta_{\overline{s}}(f - S_n^{(\overline{\gamma})})\|_X \leqslant$$

$$\leqslant C \begin{cases} \frac{p^{-\nu/q}}{\varphi(p^{-\nu})} \sum\limits_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle > n} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_X & \text{при} \quad \nu \leqslant n, \\ \frac{p^{-\nu/q}}{\varphi(p^{-\nu})} \sum\limits_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle > \nu} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_X + p^{-\nu/q} \sum\limits_{n < \langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \leqslant \nu} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\overline{s}\|})} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_X & \text{при} \quad \nu > n. \end{cases} \tag{18}$$

По условию теоремы $0 < r_1 < \log_2 \alpha_\varphi$. Поэтому существует Ф-функция $\theta_1(t)$ такая, что $\theta_1(t) \asymp \frac{\varphi(t)}{t^{r_1+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$ (см. лемму А). Следовательно, учитывая, что $\theta_1(t) \uparrow$ и пользуясь леммой В, получим

$$\sum_{n < \langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \leqslant \nu} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\overline{s}\|})} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_X \leqslant C \sum_{n < \langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \leqslant \nu} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\overline{s}\|})} p^{-\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle} =$$

$$= C \sum_{n < \langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \leqslant \nu} \frac{1}{\varphi(p^{-\|\overline{s}\|})} p^{-r_1 \langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle} \leqslant C \sum_{n < \langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \leqslant \nu} \frac{1}{\varphi(p^{-\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle})} p^{-r_1 \langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{n < \langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \leqslant \nu} \theta_1^{-1}(p^{-\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle}) \leqslant C \frac{1}{\theta_1(p^\nu)} \sum_{n < \langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle \leqslant \nu} p^{\varepsilon \langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle} \leqslant C \frac{1}{\theta_1(p^{-\nu})} p^{\nu\varepsilon} \nu^{d-1} \leqslant C \frac{p^{-\nu r_1}}{\varphi(p^{-\nu})} \nu^{d-1} \tag{19}$$

для любой функции f из $H_X^{\overline{r}}$. Далее, по лемме Б имеем

$$\sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle > \nu} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_X \leqslant C \sum_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle > \nu} p^{-\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle} \leqslant C p^{-\nu r_1} \nu^{d-1}. \tag{20}$$

Из неравенств (18)–(20) для любой функций $f \in H_X^{\overline{r}}$ получим

$$\sigma_\nu(f) \leqslant C \begin{cases} \frac{p^{-\nu/q}}{\varphi(p^{-\nu})} p^{-n r_1} \nu^{d-1} & \text{при} \quad \nu \leqslant n, \\ \frac{p^{-\nu(r_1 + \frac{1}{q})}}{\varphi(p^{-\nu})} \nu^{d-1} & \text{при} \quad \nu > n. \end{cases} \tag{21}$$

По условию теоремы $\frac{1}{q} < \log_2 \varphi$. Следовательно, по лемме А существует Ф-функция $\theta_1(t)$ такая, что $\frac{\varphi(t)}{t^{\frac{1}{q}}} \asymp \theta_1(t) \uparrow$. Поэтому

$$\frac{p^{-\nu/q}}{\varphi(p^{-\nu})} \leqslant C \frac{p^{-n/q}}{\varphi(p^{-n})}, \quad \nu \leqslant n. \tag{22}$$

Так как $\beta_\varphi < 2^{\frac{1}{q}+r_1}$ по условию теоремы, то существует число $\varepsilon \in (0, r_1 + \frac{1}{q})$ такое, что $\beta_\varphi < 2^{\frac{1}{q}+r_1-\varepsilon} < 2^{\frac{1}{q}+r_1}$. Полагая $\gamma(t) = t^{r_1+\frac{1}{q}-\varepsilon}$ в лемме А, легко убеждаемся в существовании Ф-функции $\theta_1(t)$ такой, что $\frac{t^{\frac{1}{q}+r_1-\varepsilon}}{\varphi(t)} \asymp \theta_1(t) \uparrow$. Следовательно,

$$\frac{p^{\nu(r_1+\frac{1}{q})} \nu^{d-1}}{\varphi(p^{-\nu})} \leqslant C \theta_1(p^{-\nu}) \nu^{d-1} \leqslant C \theta_1(p^{-n}) \frac{n^{d-1}}{p^{n\varepsilon}} \leqslant C \frac{p^{-n(\frac{1}{q}+r_1)}}{\varphi(p^{-n})} n^{d-1} \tag{23}$$

для $\nu > n$. Из соотношений (21)–(23) следует

$$\sup_{\nu>0} \sigma_\nu(f) \leqslant C \frac{p^{-n(\frac{1}{q}+r_1)}}{\varphi(p^{-n})} n^{d-1}$$

для любой из функций $f \in H_X^{\overline{r}}$. Таким образом (см. (14)),

$$\sup_{f \in H_X^{\overline{r}}} \|f - S_n^{(\overline{\gamma})}(f)\|_{q,\infty} \leqslant C(d,p) \frac{p^{-n(\frac{1}{q}+r_1)}}{\varphi(p^{-n})} n^{d-1}.$$

Теорема 2. *Пусть обобщенные системы Хаара $\chi\{p_n^{(j)}\}$, $j = 1, \dots, d$, определены одним натуральным числом $p_n^{(j)} = p \geqslant 2$, $n = 1, 2, \dots$; $j = 1, \dots, d$, и выполняются неравенства $\max\left\{\frac{1}{q}, r\right\} < \frac{1}{q_1} < \frac{1}{q} + r$. Тогда имеет место соотношение*

$$E_{Q_n}(H_{L_{q_1}}^r)_{q,\infty} \equiv \sup_{f \in H_{L_{q_1}}^r} \|f - S_n(f)\|_{q,\infty} \asymp p^{-n(r+\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1})} \cdot n^{d-1}.$$

Доказательство. Оценка сверху величины $E_{Q_n}(H_{L_{q_1}}^r)_{q,\infty}$ следует из теоремы 1.

Для оценки снизу рассмотрим произведение $f_0(\overline{x}) = \prod_{j=1}^{d} f_j^0(x_j)$ функций $f_j^0(x_j)$, построенных в лемме 4, в случае пространства Лебега $X(\varphi) = L_{q_1}[0,1]$, т. е. $\varphi(t) = t^{\frac{1}{q_1}}$. Согласно этой лемме $f_0 \in H_{L_{q_1}}^r$. По определению точной верхней грани для всех $\overline{l} = (l_1, \dots, l_d)$ таких, что $\|\overline{l}\| = n$, имеет место неравенство

$$\|f_0 - S_n(f_0)\|_{q,\infty} \geqslant p^{(1-\frac{1}{q})\|\overline{l}\|} \int_0^{p^{-l_1}} \cdots \int_0^{p^{-l_d}} |f_0(\overline{x}) - S_n(f_0, \overline{x})| d\overline{x} =$$
$$= p^{n(1-\frac{1}{q})} \sum_{\nu=n}^{\infty} \sum_{\nu < \|\overline{s}\| \leqslant \nu+1} \int_{p^{-s_1-1}}^{p^{-s_1}} \cdots \int_{p^{-s_d-1}}^{p^{-s_d}} |f_0(\overline{x}) - S_n(f_0, \overline{x})| d\overline{x}. \quad (24)$$

Так как носители функций $\chi_{p^{k_j}+p}(x_j)$, $j = 1, \dots, d$, не пересекаются, то

$$\int_{p^{-s_1-1}}^{p^{-s_1}} \cdots \int_{p^{-s_d-1}}^{p^{-s_d}} |f_0(\overline{x}) - S_n(f_0, \overline{x})| d\overline{x} = p^{-(r+1)\|\overline{s}\|} \cdot p^{\frac{\|\overline{s}\|}{q_1}}.$$

Поэтому из неравенства (24) следует

$$\|f_0 - S_n(f_0)\|_{q,\infty} \geqslant p^{n(1-\frac{1}{q})} \sum_{\nu=n}^{\infty} \sum_{\nu < \|\overline{s}\| \leqslant \nu+1} p^{-(r+1)\|\overline{s}\|} \cdot p^{\frac{\|\overline{s}\|}{q_1}}. \quad (25)$$

Пользуясь леммой Б, получим

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \sum_{\nu < \|\overline{s}\| \leqslant \nu+1} p^{-(r+1-\frac{1}{q_1})\|\overline{s}\|} \geqslant C(r) \cdot p^{-n(r+1-\frac{1}{q_1})} \cdot n^{d-1}. \quad (26)$$

Из неравенств (25), (26) вытекает, что $\sup_{f \in H_{L_{q_1}}^r} \|f - S_n(f)\|_{q,\infty} \geqslant p^{-n(r+\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1})} \cdot n^{d-1}$. $\square$

Литература

1. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. Виленкин Н.Я. *Об одном классе полных ортонормированных систем* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1947. – Т. 11. – С. 363–400.
3. Голубов Б.И. *Об одном классе полных ортогональных систем* // Сиб. матем. журн. – 1968. – Т. 9. – С. 297–314.
4. Андрианов А.В. *Приближение функций из классов* MH_q^r *полиномами Хаара* // Матем. заметки. – 1999. – Т. 66. – С. 323–335.
5. Кашин Б.С. *О нижних оценках для* n*-членных приближений* // Матем. заметки. – 2001. – Т. 70. – С. 636–638.
6. Temlyakov V.N. *Nonlinear* m*-term approximation with regard to the multivariate Haar system* // East J. Approx. – 1998. – V. 4. – P. 87–106.
7. Освальд П. *Об* N*-членных приближениях по системе Хаара в* H^s*-нормах* // Метрич. теория функ. и смежные вопр. анал. – М., 1999. – С. 137–163.
8. Лапин С.В. *Некоторые теоремы вложения для произведений функций* // Деп. в ВИНИТИ, 1980, № 1036-80. – 31 с.
9. Темляков В.Н. *Приближение функций с ограниченной смешанной производной* // Тр. МИАН. – 1986. – Т. 178. – 112 с.
10. Борисова Е.А. *О вложении классов функций, заданных последовательностями наилучших приближений по системам типа Хаара* // Деп. в ВИНИТИ, 1986, № 6333-86. – 52 с.
11. Акишев Г.А., Коспанова Р.К. *Теоремы вложения в симметричные пространства и обобщенная система Хаара* // Деп. в КазНИИНТИ, 1991, № 3618. – 50 с.

Карагандинский государственный университет

Поступили
первый вариант 28.10.2002
окончательный вариант 11.08.2003