ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 3 (514)

УДК 517.52

Ю.Ф. КОРОБЕЙНИК

О НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ, БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ В ОТКРЫТОМ МНОЖЕСТВЕ ИЗ $\mathbf{R}^p$

1. Основные пространства. Пусть $p \geqslant 1$, $G \subseteq \mathbf{R}^p$ и G — открытое множество в $\mathbf{R}^p$; $C^\infty(G)$ — совокупность всех комплекснозначных функций от p вещественных переменных, бесконечно дифференцируемых в G. Для любого множества Q из $\mathbf{R}^p$ положим $Q^0 := \operatorname{int} Q$. Как известно, для произвольного открытого множества G в $\mathbf{R}^p$ найдется такая последовательность его компактов $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$, что $\forall n \geqslant 0 \quad Q_n \subset Q_{n+1}^0 \subset Q_{n+1} \subset G = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} Q_m$. Топология в $C^\infty(G)$ вводится набором преднорм $p_n(y) = \max\{|y^{(\alpha)}(x)| : x \in Q_n,\ |\alpha|_p \leqslant n\}$, $n = 0, 1, \dots$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in N_0^p$; $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$; $|\alpha|_p = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_p|$. В этой топологии $C^\infty(G)$ — пространство Фреше.

Обозначим символом $B^\infty(G)$ подпространство $C^\infty(G)$, состоящее из всех функций, равномерно ограниченных в G вместе с любой своей частной производной. Определим топологию в $B^\infty(G)$ счетным набором норм $p_n^1(y) := \sup\{|y^{(\alpha)}(X)| : X \in G,\ |\alpha|_p \leqslant n\}$, $n = 0, 1, \dots$ В этой топологии $B^\infty(G)$ — отделимое локально выпуклое пространство, причем $B^\infty(G) \subset C^\infty(G)$. Стандартными рассуждениями показываем, что любая последовательность Коши в $B^\infty(G)$ является сходящейся в $B^\infty(G)$. Следовательно, это пространство полно, и $B^\infty(G)$ — пространство Фреше.

Рассмотрим его подпространство $BC^\infty(G)$, состоящее из всех функций, равномерно непрерывных в G вместе с любой своей частной производной. Применяя примерно те же рассуждения, как и в случае пространства $B^\infty(G)$, убеждаемся в том, что $BC^\infty(G)$ — замкнутое подпространство $B^\infty(G)$ (в топологии, индуцированной из $B^\infty(G)$) и потому — также пространство Фреше. При этом каждую функцию из $BC^\infty(G)$, как и любую ее частную производную, можно доопределить до функции, непрерывной во всех (конечных) граничных точках G, и, в частности, до функции, равномерно непрерывной на $\overline{G}$, если G — ограниченное открытое множество.

Пусть еще $C_0^\infty(G)$, как в [1], — пространство всех функций из $C^\infty(G)$ с компактными носителями, лежащими в G. Как известно [1], если $G \neq \emptyset$, то $C_0^\infty(G) \neq \emptyset$. Очевидно, $C_0^\infty(G) \subseteq BC^\infty(G) \subseteq B^\infty(G) \subseteq C^\infty(G)$, и для любого непустого открытого множества G все эти четыре пространства непусты и неквазианалитичны.

В данной работе находятся условия, при которых $BC^\infty(G)$ совпадает с $B^\infty(G)$ или же является его собственным подпространством, а также устанавливаются функциональные критерии продолжимости любой функции из $BC^\infty(G)$ до функции из $BC^\infty(\mathbf{R}^p)$.

2. Связь между $BC^\infty(G)$ и $B^\infty(G)$. Пусть $p \geqslant 1$, G — открытое множество в $\mathbf{R}^p$ и $G = \bigcup\limits_{k\in\Omega} G_k$ — его стандартное представление в виде объединения конечного или счетного множества попарно непересекающихся связных компонент — областей G_k. Положим $\forall k \in \Omega$ $d_k := \rho(\Gamma_k, \Gamma_k')$, $b(G) := \inf\{d_k : k \in \Omega\}$, где $\Gamma_k := \partial G_k$, $\Gamma_k' := \bigcup\limits_{\substack{m\in\Omega\\ m\neq k}} \Gamma_m$.

Теорема 1. *Если $b(G) = 0$, то $BC^\infty(G)$ — собственное подмножество $B^\infty(G)$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-00372).

Доказательство. Если множество Ω конечно, то $\exists k_0 \in \Omega : d_{k_0} = 0$, и существуют номер $m \in \Omega \setminus k_0$ и точка X_0 из Γ_{k_0} такие, что $X_0 \in \Gamma_m$. Положим $f(X) = 1$, $X \in G_{k_0}$, и $f(X) = 0$, $X \in G \setminus G_{k_0}$. Тогда $f \in B^\infty(G)$. В то же время найдутся последовательности точек $(X_k)_{k=1}^\infty$ из G_{k_0} и $(Y_k)_{k=1}^\infty$ из G_m, для которых $X_0 = \lim\limits_{k\to+\infty} Y_k = \lim\limits_{k\to\infty} X_k$. Отсюда $\rho(X_k, Y_k) \to 0$ при $k \to \infty$. С другой стороны, $|f(X_k) - f(Y_k)| = 1 \quad \forall k \geqslant 1$, и функция f не будет равномерно непрерывной в G. Следовательно, $f \notin BC^\infty(G)$, и последнее пространство — собственное подмножество $B^\infty(G)$.

Пусть теперь $\Omega = \{1, 2, \dots\}$ — счетное множество. Так как $b(G) = 0$, то $\forall k \geqslant 1\ \exists n_k : n_k \uparrow +\infty$, $d_{n_k} \downarrow 0$. Но тогда для любого $k \geqslant 1$ найдутся номер $n_k^1 \neq n_k$ и точки $X_k \in \Gamma_{n_k}$, $Y_k \in \Gamma_{n_k^1}$ такие, что $\rho(X_k, Y_k) \to 0$. Отсюда следует, что $\forall k \geqslant 1\ \exists V_k \in G_{n_k}$, $\exists W_k \in G_{n_k^1} : \rho(W_k, V_k) \to 0$. Нужная функция f из $B^\infty(G) \setminus BC^\infty(G)$ теперь строится поэтапно.

На первом этапе полагаем $f(X) = 1$ на G_{n_1} и $f(X) = 0$ на $G_{n_1^1}$. Второй этап. Полагаем $f(X) = 1$ на $G_{n_2^1} = G_{n_1}$ и $f(X) = 0$ на G_{n_2}, если $n_2^1 = n_1$ (при этом $n_2 \neq n_2^1 = n_1$). Если $n_2^1 = n_1^1$, то $f(X) = 0$ на $G_{n_2^1} = G_{n_1^1}$ и $f(X) = 1$ на G_{n_2}. При этом $n_2 \neq n_2^1 = n_1^1$ и $n_2 > n_1$. Наконец, если $n_2^1 \neq n_1^1$ и $n_2^1 \neq n_1$, то $f(X) = 1$ на G_{n_2} и $f(X) = 0$ на $G_{n_2^1}$. Третий этап. Если $n_3^1 = n_1$, то $f(X) = 1$ на $G_{n_3^1} = G_{n_1}$ и $f(X) = 0$ на G_{n_3} $(n_3 > n_2 > n_1)$. Если $n_3^1 = n_2$ и c_2 ($c_2 = 0$ или 1) — определенное на втором этапе значение f на G_{n_2}, то $f(X) = c_2$ на $G_{n_3^1}$ и $f(X) = 1 - c_2$ на G_{n_3}. Далее, если $n_3^1 = n_1^1$, то $f(X) = 0$ на $G_{n_3^1} = G_{n_1^1}$ и $f(X) = 1$ на G_{n_3}. Если $n_3^1 = n_2^1$ и d_2 — определенное на втором этапе значение f на $G_{n_2^1}$, то $f(X) = d_2$ на $G_{n_3^1}$ и $f(X) = 1 - d_2$ на G_{n_3}. Наконец, если $n_3^1 \neq n_j^1$ $n_3^1 \neq n_j$, $j = 1, 2$, то $f(X) = 1$ на G_{n_3} и $f(X) = 0$ на $G_{n_3^1}$. Продолжая этот процесс неограниченно, определим поэтапно функцию f на всех компонентах G_{n_k} и $G_{n_k^1}$, $k = 1, 2, \dots$ Если же останутся номера m из Ω такие, что $m \neq n_k$, $m \neq n_k^1$ $\forall k \geqslant 1$, то в этом случае полагаем $f(X) = 0$ на G_m.

Построенная таким способом функция f, очевидно, принадлежит $B^\infty(G)$. В то же время $|f(V_k) - f(W_k)| = 1$ $\forall k \geqslant 1$, хотя $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(V_k, W_k) = 0$. Поэтому $f \notin BC^\infty(G)$, и снова $BC^\infty(G)$ — собственное подмножество $B^\infty(G)$. $\square$

Следствие 1. Пусть $G = \bigcup\limits_{k\in\Omega} G_k$ — открытое множество в $\mathbf{R}^p$ и G_k — его связные компоненты с границей Γ_k $(k \in \Omega)$. Пусть, далее,

$$BC^\infty(G) = B^\infty(G). \tag{1}$$

Тогда

$$\exists \gamma > 0 : \forall k \in \Omega \quad \rho(\Gamma_k, \Gamma_k') \geqslant \gamma, \quad \Gamma_k' := \bigcup_{m\in\Omega\setminus k} \Gamma_m. \tag{2}$$

Следствие 2. Пусть G — открытое ограниченное множество в $\mathbf{R}^p$ и пусть справедливо равенство (1). Тогда G состоит из конечного числа связных компонент (областей) без общих граничных точек.

Последний результат позволяет охарактеризовать все ограниченные открытые множества в R^1 со свойством (1).

Теорема 2. *Пусть G — ограниченное открытое множество в R^1. Тогда следующие утверждения равносильны*: 1) $B^\infty(G) = BC^\infty(G)$; 2) G *состоит из конечного числа попарно непересекающихся интервалов без общих концов.*

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) справедлива по следствию 2 теоремы 1. С другой стороны, как легко проверить, для любого ограниченного интервала (α, β), $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, имеет место равенство $B^\infty(\alpha, \beta) = BC^\infty(\alpha, \beta)$, что и обеспечивает импликацию 2) $\Rightarrow$ 1). $\square$

Заметим также, что согласно следствию 1 теоремы 1, если G — открытое множество в $\mathbf{R}^p$, $p \geqslant 1$, и справедливо равенство (1), то найдется число β (в качестве которого можно взять, напр., $\beta = b(G)/4$) такое, что любые две точки X, Y из G, для которых $\rho(X,Y) < \beta$, находятся в одной и той же компоненте множества G. Непосредственно отсюда следует

Теорема 3. *Пусть $G = \bigcup\limits_{k\in\Omega} G_k$ — открытое множество в $\mathbf{R}^p$, $p \geqslant 1$. Пусть, далее, имеет место равенство* (1). *Тогда $BC^\infty(G_k) = B^\infty(G_k)$ $\forall k \in \Omega$.*

Следствие. Пусть G — ограниченное открытое множество в $\mathbf{R}^p$. Тогда равенство (1) справедливо в том и только том случае, когда выполняются условия

1) G состоит из конечного числа компонент G_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, не имеющих общих граничных точек;
2) $BC^\infty(G_k) = B^\infty(G_k)$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Таким образом, при поиске критерия выполнения равенства (1) для ограниченного открытого множества в $\mathbf{R}^p$, $p \geqslant 1$, можно без ограничения общности считать, что G – область в $\mathbf{R}^p$.

Следующий результат является в известной степени локальным аналогом теоремы 1. Положим $V_\delta(\beta) = \{X \in \mathbf{R}^p : \rho(X,\beta) < \delta\}$ $\forall \delta > 0$, $\forall \beta \in \mathbf{R}^p$.

Теорема 4. *Допустим, что пересечение $G_\beta^\delta := G \cap V_\delta(\beta)$ открытого множества G в $\mathbf{R}^p$ с шаром $V_\delta(\beta)$ несвязно при некоторых $\delta > 0$ и $\beta \in \mathbf{R}^p$. Пусть, далее, имеется хотя бы одна граничная точка γ множества G_β^δ, которая является общей граничной точкой по крайней мере для двух компонент G_β^δ и принадлежит $V_\delta(\beta)$. Тогда $BC^\infty(G) \neq B^\infty(G)$.*

Доказательство. Пусть γ — общая граничная точка двух компонент $G_1(\beta)$ и $G_2(\beta)$ множества G_β^δ и пусть $\gamma \in V_\delta(\beta)$. Положим

$$f(X) = \exp\left\{-\frac{1}{\left[\delta^2 - \sum\limits_{k=1}^{p}(x_k - \beta_k)^2\right]}\right\},$$

где $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$, а $X = (x_1, \ldots, x_p) \in G_1(\beta)$. Далее, положим функцию $f(X)$ равной нулю в $G_2(\beta)$ и остальных компонентах множества G_β^δ (если они имеются), а также во всех точках множества $G \cap \{X : \rho(X,\beta) \geqslant \delta\}$. Нетрудно проверить, что $f \in B^\infty(G)$. В то же время найдутся две последовательности точек $\{X_{k,j}\}_{k=1}^\infty$ $(j = 1, 2)$ таких, что $\forall k \geqslant 1$ $X_{k,j} \in G_j(\beta)$ и $\lim\limits_{k\to\infty} X_{k,j} = \gamma$, $j = 1, 2$. При этом

$$|f(X_{k,1}) - f(X_{k,2})| = \exp\left[-\frac{1}{\delta^2 - \sum\limits_{l=1}^{p}(x_{k,1}^l - \beta_l)^2}\right] \ \ \forall k \geqslant 1,$$

где $X_{k,1} = (x_{k,1}^1, \ldots, x_{k,1}^p)$, и

$$\lim_{k\to\infty} |f(X_{k,1}) - f(X_{k,2})| = \exp\left[-\frac{1}{\delta^2 - \rho^2(\gamma,\beta)}\right] > 0. \quad \square$$

Теорема 4 применима, в частности, при $p = 2$ к единичному кругу $x^2 + y^2 < 1$ с разрезом по диаметру $\{x = 0,\ c \leqslant y \leqslant 1\}$, где c — произвольно зафиксированное число из $(-1, 1)$.

Перейдем теперь к условиям, обеспечивающим равенство (1). Пусть по-прежнему $G \subseteq \mathbf{R}^p$, $p \geqslant 1$, G открыто в $\mathbf{R}^p$ и $G = \bigcup\limits_{k\in\Omega} G_k$, где G_k — попарно непересекающиеся компоненты G, а множество Ω натуральных чисел конечно или бесконечно (счетно). Будем также считать выполненным соотношение (2), необходимое для равенства (1). Как отмечено перед доказательством теоремы 3, в этом случае $\exists \beta > 0$: если $X, Y \in G \times G$ и $\rho(X,Y) < \beta$, то точки X и Y лежат в одной и той же компоненте множества G. Если G состоит из одной компоненты, то в качестве β можно взять любое конечное число. Положим $A_\beta(G) := \{(X,Y) \in G \times G : \rho(X,Y) < \beta\}$. Для любой точки (X,Y) из $A_\beta(G)\subseteq G\times G$ определено и конечно число $\varphi(X,Y)$, равное инфимуму длин всех спрямляемых кривых, лежащих в G, с концами в X и Y.

Теорема 5. *Если $\varphi(X,Y)\to 0$ при $\rho(X,Y)\to 0$ равномерно на $A_\beta(G)$, то справедливо равенство* (1).

Доказательство. Пусть f — произвольная функция из $B^\infty(G)$. Зададим какое-либо $\varepsilon_0>0$ и выберем $\mu\in(0,\beta)$ так, чтобы $\varphi(X,Y)<\varepsilon_0$, как только $(X,Y)\in A_\beta(G)$ и $\rho(X,Y)<\mu$. Заметим, что такие точки X и Y лежат в одной и той же компоненте G_{k_0} множества G. Поэтому их можно соединить в G_{k_0} спрямляемой кривой L длины $l(L)<2\varepsilon_0$. Тогда

$$|f(X)-f(Y)|=\left|(L)\int_X^Y\sum_{k=1}^p\frac{\partial f}{\partial v_k}dv_k\right|\leqslant l(L)p_1^1(f)<2\varepsilon_0p_1^1(f),$$

где $p_1^1(f)=\sup\{|\frac{\partial f(v)}{\partial v_m}|:v(v_1,\dots,v_p)\in G,m=1,2,\dots,p\}$. Следовательно, функция f равномерно непрерывна в G. Такими же рассуждениями устанавливаем равномерную непрерывность в G любой частной производной $f^{(\alpha)}$, $\alpha\in N_0^p$. Отсюда $f\in BC^\infty(G)$ и окончательно $BC^\infty(G)=B^\infty(G)$. $\square$

Предположения теоремы 5 не выполнены в примере, приведенном после доказательства теоремы 4, согласно которой в этом примере $BC^\infty(G)\neq B^\infty(G)$. Поэтому можно считать, что предположения теоремы 5 существенны для выполнения равенства (1). Отметим еще, что теорема 5 применима, в частности, к выпуклым областям в $\mathbf{R}^p$.

3. Абсолютная сходимость рядов экспонент с мнимыми показателями в основных пространствах. Пусть $p\geqslant 1$. Рассмотрим функцию

$$e_\mu(X):=\exp i\langle\mu,X\rangle,$$

где $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_p)\in\mathbf{R}^p$, $X=(x_1,\dots,x_p)\in\mathbf{R}^p$, $\langle\mu,X\rangle=\sum\limits_{k=1}^p\mu_kx_k$.

Так как $\forall x\in\mathbf{R}^p$, $\forall\mu\in\mathbf{R}^p$ $\;|e_\mu(X)|=1$, то $e_\mu\notin C_0^\infty(\mathbf{R}^p)$, но $e_\mu\in B^\infty(\mathbf{R}^p)$. Покажем, что $e_\mu\in BC^\infty(\mathbf{R}^p)$ $\forall\mu\in\mathbf{R}^p$. Имеем

$$|e_\mu(X)-e_\mu(Y)|=|\exp i\langle\mu,X\rangle|\,|\exp i\langle\mu,X-Y\rangle-1|\quad\forall(X,Y)\in\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^p.$$

При этом $|\langle\mu,X-Y\rangle|\leqslant\Big[\sum\limits_{k=1}^p(\mu_k)^2\Big]^{\frac12}\rho(X,Y)$. Отсюда следует, что $\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0:$ если $(X,Y)\in\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^p$ и $\rho(X,Y)<\delta$, то $|e_\mu(X)-e_\mu(Y)|<\varepsilon$. Таким образом, $e_\mu(X)$ равномерно непрерывна в $\mathbf{R}^p$. Аналогичными рассуждениями показываем, что любая частная производная функции $e_\mu(X)$ также равномерно непрерывна в $\mathbf{R}^p$. Следовательно, $e_\mu\in BC^\infty(\mathbf{R}^p)$.

Пусть $\{\mu_k\}_{|k|_p=0}^\infty$ — произвольная последовательность попарно различных точек из $\mathbf{R}^p$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{|k|_p=0}^\infty c_ke_{\mu_k}(X),\quad c_k\in C. \tag{3}$$

Ряд, полученный почленным дифференцированием ряда (3) α_j раз по переменной x_j, т. е. ряд вида

$$\sum_{|k|_p=0}^\infty c_k(\mu_k)^\alpha e_{\mu_k}(X), \tag{4}$$

где $(\mu_k)^\alpha=(\mu_{k_1})^{\alpha_1}\dots(\mu_{k_p})^{\alpha_p}$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in N_0^p$, назовем α-ассоциированным с рядом (1).

Лемма 1. *Следующие утверждения равносильны*:

1) *ряд* (3) *и все α-ассоциированные с ним абсолютно сходятся в некоторой точке X_1 из $\mathbf{R}^p$,*

2) *ряд* (3) *и все α-ассоциированные с ним абсолютно сходятся в любой точке X из $\mathbf{R}^p$,*
3) *для некоторого открытого множества G_1 из $\mathbf{R}^p$ ряд* (3) *сходится абсолютно в $C^\infty(G)$,*
4) *для любого открытого множества $G \subseteq \mathbf{R}^p$ ряд* (3) *сходится абсолютно в $C^\infty(G)$,*
5) *для некоторого открытого множества $G_2 \subseteq \mathbf{R}^p$ ряд* (3) *сходится абсолютно в $B^\infty(G)$ (или, что все равно, в $BC^\infty(G)$),*
6) *для любого открытого множества $G \subseteq \mathbf{R}^p$ ряд* (3) *сходится абсолютно в $B^\infty(G)$ (или, что все равно, в $BC^\infty(G)$),*
7) $\sum\limits_{|k|_p=0}^{\infty} |c_k|\,|(\mu_k)^\alpha| < \infty \ \forall \alpha \in N_0^p$.

Доказательство следует из очевидных импликаций 6) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1), 6) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 7) $\Rightarrow$ 6). $\square$

4. Классификация абсолютно представляющих систем. Напомним некоторые определения из [2] [3], которые понадобятся далее. Пусть H — полное отделимое локально выпуклое пространство над полем скаляров ($\Phi = C$ или $\Phi = R$), Ω — некоторое счетное множество индексов и $V_\Omega = (V_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ — какая-либо совокупность ненулевых элементов из H. Она называется абсолютно-представляющей системой (АПС) в H, если любой элемент g из H можно представить в виде ряда

$$g = \sum_{\alpha\in\Omega} g_\alpha V_\alpha, \tag{5}$$

абсолютно сходящегося в H. При этом АПС V_Ω в H называется эффективной (ЭАПС), если для любого g из H можно конструктивно определить коэффициенты g_α хотя бы одного ряда вида (5), сумма которого равна g. Совершенно так же даются определения абсолютного базиса (АБ) и эффективного абсолютного базиса (ЭАБ). Например, V_Ω — ЭАБ в H, если любой элемент g из H можно представить как сумму абсолютно сходящегося в H ряда вида (5), коэффициенты которого определяются конструктивно. При этом представление g в виде ряда (5) единственно в классе всех сходящихся в H рядов такого вида. Составим по произвольной системе ненулевых элементов V_Ω пространство $A_2(V_\Omega, H)$ числовых семейств, являющихся коэффициентами абсолютно сходящихся в H рядов по системе V_Ω. Иными словами, если $Q = \{q\}$ — набор преднорм, определяющий топологию в H, то $A_2(V_\Omega, H) = \Big\{c = (c_\alpha)_{\alpha\in\Omega} \mid c_\alpha \in \Phi \ \forall\alpha \in \Omega,$ $t_q(c) := \sum\limits_{\alpha\in\Omega} |c_\alpha| q(v_\alpha) < \infty \ \forall q \in Q\Big\}$. Легко проверить, что $A_2(V_\Omega, H)$ — полное отделимое ЛВП с определяющим топологию набором преднорм $\{t_q\}_{q\in Q}$, и что оператор L_2 (называемый оператором представления (ОП)):

$$L_2 : A_2(V_\Omega, H) \to H \ \ \forall c = (c_\alpha)_{\alpha\in\Omega} \in A_2(V_\Omega, H) \to L_2 c = \sum_{\alpha\in\Omega} c_\alpha v_\alpha \in H,$$

является линейным непрерывным оператором из $A_2(V_\Omega, H)$ в H. При этом [2] V_Ω — АПС в H тогда и только тогда, когда L_2 — эпиморфизм $A_2(V_\Omega, H)$ на H; V_Ω – ЭАПС в H тогда и только тогда, когда оператор L_2 сюрьективен и имеет конструктивно определяемый правый обратный (необязательно линейный и непрерывный) оператор. Система V_Ω называется правильной АПС (ПАПС) в H, если ОП L_2 сюрьективен и имеет линейный непрерывный правый обратный (ЛНПО) $(L_2)^{-1}_{np} : H \to A_2(V_\Omega, H)$. Далее, V_Ω — эффективно правильная АПС (ЭПАПС) в H, если L_2 сюрьективен и имеет конструктивно определяемый ЛНПО $(L_2)^{-1}_{np}$. Аналогично даются определения правильного АБ (ПАБ) и эффективно правильного АБ (ЭПАБ). Именно, система V_Ω называется ПАБ в H, если ОП L_2 является топологическим изоморфизмом $A_2(V_\Omega, H)$ на H. Если также линейный непрерывный обратный L_2^{-1} можно определить конструктивно, то V_Ω — ЭПАБ в H.

5. Базисы из экспонент с мнимыми показателями. Результаты о неполноте. Приведем важный для дальнейшего пример базисной системы экспонент специального вида. Пусть $a(a_1 \dots a_p) \in \mathbf{R}^p$, $b(b_1 \dots b_p) \in \mathbf{R}^p$; при $k = 1, \dots, p$ $-\infty < a_k < b_k < +\infty$; $T^p_{a,b}$ — открытый прямоугольный параллелепипед в $\mathbf{R}^p$: $a_k < x_k < b_k$, $k = 1, 2, \dots, p$.

Каждая функция $v(X)$ из $BC^\infty(T^p_{a,b})$ и любая ее частная производная $v^{(\alpha)}(X)$ непрерывно продолжаются на замкнутый параллелепипед $\overline{T}^p_{a,b}$. Эти "продолженные" функции условимся обозначать теми же символами (v и $v^{(\alpha)}$). Положим $B_{a,b} := \{(X, Y) : X \neq Y,\ X \in \overline{T}^p_{a,b},\ Y \in \overline{T}^p_{a,b},$ $x_k - y_k = 0$ или $x_k - y_k = \pm(b_k - a_k)$, $k = 1, 2, \dots, p\}$; $\mathcal{E}_0(T^p_{a,b}) = \{y \in BC^\infty(T^p_{a,b}) : y^{(\alpha)}(X_1) = y^{(\alpha)}(X_2)$ $\forall \alpha \in N^p_0$, $\forall (X_1, X_2) \in B_{a,b}\}$. Заметим, что $\mathcal{E}_0(T^p_{a,b})$ — замкнутое подпространство $BC^\infty(T^p_{a,b})$ в индуцированной из $BC^\infty(T^p_{a,b})$ топологии.

Пусть, далее,

$$\mathcal{E}^T_p := \left\{ \exp 2\pi i \Big\langle k, \frac{X}{b-a} \Big\rangle \right\}^\infty_{|k|_p = 0}, \qquad \frac{X}{b-a} := \frac{x_1}{b_1 - a_1}, \dots, \frac{x_p}{b_p - a_p}.$$

Теорема 6. *$\mathcal{E}^T_p$ — ЭПАБ в $\mathcal{E}_0(T^p_{a,b})$.*

Доказательство. Пусть V — любая функция из $E := \mathcal{E}_0(T^p_{a,b})$. Поставим ей в соответствие ее ряд Фурье по системе $\mathcal{E}^T_p$:

$$V(X) \sim \sum_{|k|_p = 0}^{\infty} V_k h_k(X), \tag{6}$$

где $h_k(X) := \exp 2\pi i \langle k, \frac{X}{b-a} \rangle$ $\forall k \in N^p_0$,

$$\prod_{j=1}^{p} (b_j - a_j) V_k = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_p}^{b_p} V(X) \exp\Big(-2\pi \Big\langle k, \frac{X}{b-a} \Big\rangle \Big) dX. \tag{7}$$

Интегрируя по частям равенство (7) при любом фиксированном $k \in N^p_0$ и принимая во внимание, что $V^{(\alpha)}(X_1) = V^{(\alpha)}(X_2)$, если $\alpha \in N^p_0$, а $(X_1, X_2) \in B_{a,b}$, приходим к неравенству

$$\prod_{j=1}^{p} (b_j - a_j) |V_k| \leqslant \frac{(b-a)^\beta}{(2\pi)^{|\beta|} p |k|^\beta} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_p}^{b_p} |V_1^{(\beta)}(X)| dX, \quad \beta \in N^p_0,$$

где $(b-a)^\beta := \prod\limits_{j=1}^{p} (b_j - a_j)^{\beta_j}$; $|k|^\beta := |k_1|^{\beta_1} \dots |k_p|^{\beta_p}$; $(o)^{\beta_j} = 1$, $1 \leqslant j \leqslant p$. Отсюда

$$(2\pi)^{|\beta|_p} |V_k| \leqslant \frac{(b-a)^\beta}{|k|^\beta} \sup\{|V_1^{(\beta)}(X)| : X \in T^p_{a,b}\}$$

и

$$|V_k| p^1_n(h_k) \leqslant |V_k| (2\pi)^n \max\left\{|k|^\gamma (b-a)^{-\gamma} : |\gamma|_p \leqslant n\right\} = (2\pi)^n \max\left\{|V_k|\, |k|^\gamma (b-a)^{-\gamma} : |\gamma|_p \leqslant n\right\} \leqslant$$
$$\leqslant (2\pi)^n \max\left\{ \frac{(b-a)^\beta |k|^\gamma}{|k|^\beta (2\pi)^{|\beta|} p (b-a)^\gamma} \sup\left[|V_1^{(\beta)}(X)| : X \in T^p_{a,b}\right] : |\gamma|_p \leqslant n \right\} \quad \forall n \geqslant 0.$$

Для каждого γ из N^p_0 такого, что $|\gamma|_p \leqslant n$ и для $j = 1, 2, \dots, p$ положим $\beta_j = \gamma_j + 2p$. Тогда $|\beta|_p \leqslant n + 2p^2$, отсюда

$$|V_k| p^1_n(h_k) \leqslant \frac{(2\pi)^n (b-a)^{2p}}{|k|^{2p}} p^1_{n+2p^2}(V) = A_n |k|^{-2p} p^1_{n+2p^2}(V).$$

Из этих оценок следует, что ряд (6) абсолютно сходится в E. Единственность разложения $V(X)$ в сходящийся по топологии $BC^\infty(T^p_{a,b})$ ряд по системе $\mathcal{E}^T_p$ вытекает из ортогональности этой системы в $L_2(\overline{T}^p_{a,b})$. Итак, $\mathcal{E}^T_p$ — АБ в пространстве Фреше E и потому — базис Шаудера.

Как известно (напр., [4], [5]), в этом случае ОП L_2 является топологическим изоморфизмом пространства Фреше

$$A_2(\mathcal{E}_p^T) = \Big\{ c = (c_\alpha)_{\alpha \in N_0^p} \,\Big|\, \forall n \geqslant 1 \quad \sum_{|k|_p=0}^{\infty} |c_k| p_n^1(h_k) =: q_n^1(c) < \infty \Big\}$$

с набором преднорм $(q_n^1)_{n=1}^{\infty}$ на пространство Фреше E. Поэтому обратный оператор L_2^{-1} линеен и непрерывен. Следовательно, $\mathcal{E}_p^T$ — ПАБ в E. Более того, L_2^{-1} определяется явно по формуле

$$\forall V \in E \to L_2^{-1}V = \left\{ \frac{1}{(b-a)} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_p}^{b_p} V(X) \exp\Big(-2\pi i \Big\langle k, \frac{X}{b-a} \Big\rangle \Big) dX \right\}_{|k|_p=0}^{\infty} \in A_2(\mathcal{E}_p^T, E)$$

(здесь $(b-a) = \prod\limits_{j=1}^{p} (b_j - a_j)$). Коэффициенты разложения (5) можно записать в следующем виде: $V_k = (L_2^{-1}V)_k \; \forall k \in N_0^p$. Окончательно $\mathcal{E}_p^T$ — ЭПАБ в E. $\square$

Пусть $a \in \mathbf{R}^p$, $b \in \mathbf{R}^p$, $p \geqslant 1$, $\infty < a_j < b_j < +\infty$, $j = 1, 2, \ldots, p$. Введем подпространство $BC^\infty(\mathbf{R}^p) : E_1 := \mathcal{E}_0(\mathbf{R}_{a,b}^p) := \{ y(X) \in BC^\infty(\mathbf{R}^p) : y^{(\alpha)}(X_1) = y^{(\alpha)}(X_2) \; \forall \alpha \in N_0^p, \forall (X_1, X_2) \in B_{a,b}^p \}$, где $B_{a,b}^p = \{ (X, Y) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p : x_j - y_j = \pm k_j (b_j - a_j), \, k_j \in N_0, \, j = 1, \ldots, p; \; X \neq Y \}$. Ясно, что $B_{a,p} \subset B_{a,b}^p \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p$. Как легко проверить, E_1 — замкнутое подпространство пространства Фреше $BC^\infty(\mathbf{R}^p)$ (в индуцированной из него топологии) и потому E_1 — также пространство Фреше.

Теорема 7. *$\mathcal{E}_p^T$ — ЭПАБ в $\mathcal{E}_0(\mathbf{R}_{a,b}^p)$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{E}_0(\mathbf{R}_{a,b}^p)$ и $V = f|_{T_{a,b}^p}$. Ясно, что $V \in \mathcal{E}_0(T_{a,b}^p)$ и по теореме 6 $V(X)$ разлагается в абсолютно сходящийся в $\mathcal{E}_0(T_{a,b}^p)$ ряд по системе $\mathcal{E}_p^T$:

$$V(X) = \sum_{|k|_p=0}^{\infty} V_k h_k(X). \tag{8}$$

При этом коэффициенты V_k определяются явно из соотношений (7). По лемме 1 ряд справа в (8) сходится абсолютно в топологии $BC^\infty(\mathbf{R}^p)$. Так как $h_k(X) \in \mathcal{E}_0(R_{a,b}^p)$ $\forall k \in N_0^p$, то сумма ряда $F(X)$ принадлежит $\mathcal{E}_0(\mathbf{R}_{a,b}^p)$. Тогда $\varphi(X) := f(X) - F(X) \in \mathcal{E}_0(\mathbf{R}_{a,b}^p)$, причем $\varphi(X) = 0$ на $T_{a,b}^p$. Но тогда в силу определения пространства $\mathcal{E}_0(\mathbf{R}_{a,b}^p)$ $\varphi(X) \equiv 0$ в $\mathbf{R}^p$, и всюду в $\mathbf{R}^p$ справедливо равенство $f(X) = \sum\limits_{|k|_p=0}^{\infty} V_k h_k(X)$, причем ряд сходится абсолютно в $BC^\infty(\mathbf{R}^p)$ и его коэффициенты определяются эффективно по функции f (а именно, по ее сужению V на $T_{a,b}^p$). Далее, если ряд $\sum\limits_{|k|_p=0}^{\infty} t_k h_k(X)$ сходится в $\mathcal{E}_0(R_{a,b}^p)$ и его сумма равна нулю, то он сходится (к той же сумме) и в $\mathcal{E}_0(T_{a,b}^p)$. По теореме 6 $h_k = 0 \; \forall k \in N_0^p$. Таким образом, $\mathcal{E}_p^T$ — ЭАБ в $\mathcal{E}_0(\mathbf{R}_{a,b}^p)$. Так же, как при доказательстве теоремы 6, устанавливаем, что ОП L_2 является топологическим изоморфизмом $A_2(\mathcal{E}_p^T, \mathcal{E}_0(\mathbf{R}_{a,b}^p))$ на $\mathcal{E}_0(\mathbf{R}_{a,b}^p)$, причем обратный оператор L_2^{-1} линеен, непрерывен и определяется конструктивно.

Результат, который сейчас будет установлен, по своему характеру противоположен теоремам 6–7. Пусть G — любое открытое множество в $\mathbf{R}^p$ и $BC^0(G)$ — пространство всех комплекснозначных функций, равномерно непрерывных и ограниченных в G, с обычной sup-нормой $\|y\|_0 = \sup\{ |y(X)| : X \in G \}$. Каждая функция из $BC^0(G)$ допускает непрерывное продолжение в любую конечную граничную точку G. Очевидно, $BC^\infty(G) \hookrightarrow BC^0(G)$. При этом каждая функция из $BC^0(G)$ равномерно непрерывна на любом множестве $\overline{G} \cap B_d$, где $B_d = \{ X \in \mathbf{R}^p : |x|_p \leqslant d < \infty \}$.

Теорема 8. *Если $(\overline{G} \times \overline{G}) \cap B_{a,b}^p \neq \emptyset$, то система $\mathcal{E}_p^T$ неполна в $BC^0(G)$.*

Доказательство. Допустим, что $X^0 \in \overline{G}$, $Y^0 \in \overline{G}$ и $(X^0, Y^0) \in B^p_{a,b}$, т. е. $X^0 \neq Y^0$, и $x^0_j - y^0_j = l_j(b_j - a_j)$ при $j = 1, 2, \ldots, p$, $l_j \in N_0$. Среди номеров $1 \leqslant j \leqslant p$, найдется хотя бы один j_0 такой, что $l_{j_0} \neq 0$. Рассмотрим функцию $f_0(X) = \sin \alpha x_{j_0}$, где число α из R^1 выбрано так, чтобы $\alpha l_{j_0}(b_{j_0} - a_{j_0}) \neq 2k\pi$, $k \in N_0$, $2\alpha y^0_{j_0} + l_{j_0}(b_{j_0} - a_{j_0})\alpha \neq (2l+1)\pi$, $l \in N_0$. Ясно, что $f_0(X) \in BC^0(\mathbf{R}^p) \hookrightarrow BC^0(G)$. При этом $\gamma := f_0(X^0) - f_0(Y^0) = \sin \alpha x^0_{j_0} - \sin \alpha y^0_{j_0} \neq 0$. Рассуждая от противного, допустим, что система $\mathcal{E}^T_p$ полна в $BC^0(G)$. Тогда найдется последовательность функций $\{g_n(X)\}^\infty_{n=1} : g_n(X) = \sum\limits_{(n)} a_{j,n} \exp 2\pi i \langle k_j, \frac{X}{b-a} \rangle$ (суммирование ведется по $j = 1, 2, \ldots, n$, $0 \leqslant |k_j|_p \leqslant m_n$, $0 < m_n \uparrow \infty$) такая, что для любой конечной точки X из $\overline{G}$ $f_0(X) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(X)$. Отсюда $f_0(X^0) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(X_0) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(Y^0) = f_0(Y^0)$ и $f_0(X^0) = f_0(Y^0)$, что невозможно. $\square$

Следствие 1. Если G — открытое множество в $\mathbf{R}^p$ и $(\overline{G} \times \overline{G}) \cap B^p_{a,b} \neq \emptyset$, то система $\mathcal{E}^T_p$ неполна в $BC^\infty(G)$.

Следствие 2. Если G — открытое множество в $\mathbf{R}^p$ и $(\overline{G} \times \overline{G}) \cap B_{a,b} \neq \emptyset$, то система $\mathcal{E}^T_p$ неполна в $BC^\infty(G)$.

6. Продолжимость функций из $BC^\infty(G)$ в $\mathbf{R}^p$. Пусть при $p \geqslant 1$ и $j = 1, 2$ $Q_j \subseteq \mathbf{R}^p$; H_j — полные отделимые ЛВП функций, определенных на Q_j; $Q_1 \supset Q_2$; $H_1 \hookrightarrow H_2$. Будем говорить, что

1) существует оператор продолжения $(O\Pi_p)$ T из H_2 в H_1, если $\forall y \in H_2$ $\exists y_1 = Ty \in H_1 : y_1|_{Q_2} = y$;

2)–4) существует непрерывный (соответственно линейный или линейный непрерывный) $O\Pi_p$ из H_2 в H_1, если оператор T из 1) непрерывен (соответственно линеен или линеен и непрерывен);

5)–8) существует эффективный $O\Pi_p$ (соответственно эффективный непрерывный, линейный, линейный непрерывный $O\Pi_p$) из H_2 в H_1, если оператор T из 1)–4) можно определить конструктивно.

Пусть Π — оператор "сужения" функций из H_1 на Q_2: $\forall y \in H_1$ $\Pi y = y|_{Q_2}$. Допустим, что он непрерывно действует из H_1 в H_2. Этот оператор сюрьективен тогда и только тогда, когда существует правый обратный M к Π: $\forall y \in H_2$ $\Pi M y = y$, $M : H_2 \to H_1$. При этом $My|_{Q_2} = y$ $\forall y \in Q_2$. Таким образом, правый обратный к Π существует тогда и только тогда, когда имеется $O\Pi_p$ из H_2 в H_1, причем правый обратный к Π совпадает с $O\Pi_p$ из H_2 в H_1.

Приведем некоторые результаты из [3], предполагая, что H_1, H_2 — пространства Фреше и ограничившись одной специальной ситуацией, которая только и понадобится в дальнейшем.

Пусть $X = (X_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ (Ω — счетное множество) — совокупность каких-либо ненулевых элементов из H_1. Введем два вспомогательных пространства, предполагая всюду далее, что оператор сужения Π непрерывен из H_1 в H_2

$$A_2(X, H_1) = \Big\{ c = (c_\alpha)_{\alpha\in\Omega} : \ \forall p \in P_1 \ \ q^1_p(c) := \sum_{\alpha\in\Omega} |c_\alpha| p(X_\alpha) < \infty \Big\},$$

$$A_2(\Pi X, H_2) = \Big\{ d = (d_\alpha)_{\alpha\in\Omega} : \ \forall p^2 \in P_2 \ \ q^2_p(d) := \sum_{\alpha\in\Omega} |d_\alpha| p^2(\Pi X_\alpha) < \infty \Big\}$$

(здесь P_j — набор преднорм, определяющий топологию в H_j, $j = 1, 2$). Система X называется Π-абсолютно инвариантной относительно пары (H_1, H_2) [3], если пространства $A_2(X, H_1)$ и $A_2(\Pi X, H_2)$ с наборами преднорм $\{q^j_p\}_{p\in P_j}$, $j = 1, 2$, топологически изоморфны. Непосредственно из результатов п. 3, § 2, а также п. 1, § 3 статьи [3] вытекают два предложения.

Предложение 1. *Пусть* $\forall \alpha \in \Omega$ $x_\alpha \neq 0$, $x_\alpha \in H_1$; *система* $X = (x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ Π-*абсолютно инвариантна относительно пары* (H_1, H_2) *и оператор* Π *сужения на* Q_2 *непрерывен из* H_1 *в* H_2. *Тогда*

1) *если* ΠX — *АПС в* H_2, *то существует непрерывный оператор* T *продолжения из* H_1 *в* H_2,
2) *если* ΠX — *ЭАПС в* H_2, *то оператор* T *можно определить конструктивно*,
3) *если* ΠX — *ПАПС в* H_2, *то существует линейный непрерывный оператор продолжения из* H_2 *в* H_1,
4) *если* ΠX — *ЭПАПС в* H_2, *то оператор продолжения из* H_2 *в* H_1 *линеен, непрерывен и определяется эффективно.*

Предложение 2. *Пусть выполнены исходные предположения предложения* 1, *и, кроме того,* X — *ЭПАПС в* H_1. *Тогда в каждой из нижеследующих пар утверждений оба они равносильны*:

a$_1$) ΠX — *АПС в* H_2; a$_2$) *существует непрерывный оператор* T *продолжения из* H_2 *в* H_1;
b$_1$) ΠX — *ЭАПС в* H_2; b$_2$) *оператор* T *из* a$_2$) *определяется эффективно*;
c$_1$) ΠX — *ПАПС в* H_2; c$_2$) *существует линейный непрерывный оператор* T *продолжения из* H_2 *в* H_1;
d$_1$) ΠX — *ЭПАПС в* H_2; d$_2$) *оператор* T *из* c$_2$) *определяется конструктивно.*

Пусть теперь $p \geqslant 1$ и G — открытое множество в $\mathbf{R}^p$. Положим $H_1 = BC^\infty(\mathbf{R}^p)$, $H_2 = BC^\infty(G)$. По лемме 1 любая система $\mathcal{E}_\mu$ П-абсолютно инвариантна относительно пары (H_1, H_2). Кроме того, Π — линейный непрерывный оператор из H_1 в H_2 ($Q_1 = \mathbf{R}^p$, $Q_2 = G$). Наконец, $\Pi\mathcal{E}_\mu = \mathcal{E}_\mu$. Из предложения 1 вытекает

Теорема 9. 1) *Если в* $BC^\infty(G)$ *имеется АПС* $\mathcal{E}_\mu$, *то существует непрерывный оператор продолжения из* $BC^\infty(G)$ *в* $BC^\infty(\mathbf{R}^p)$.

2) *Если в* $BC^\infty(G)$ *имеется хотя бы одна ЭАПС* $\mathcal{E}_\mu$, *то существует и конструктивно определяется непрерывный оператор продолжения из* $BC^\infty(G)$ *в* $BC^\infty(\mathbf{R}^p)$.

3) *Если в* $BC^\infty(G)$ *существует ПАПС* $\mathcal{E}_\mu$, *то существует линейный непрерывный оператор продолжения из* $BC^\infty(G)$ *в* $BC^\infty(\mathbf{R}^p)$.

4) *Если в* $BC^\infty(G)$ *имеется ЭПАПС* $\mathcal{E}_\mu$, *то оператор продолжения из* $BC^\infty(G)$ *в* $BC^\infty(\mathbf{R}^p)$ *существует, линеен, непрерывен и определяется конструктивно.*

Положим теперь $H_1 = \mathcal{E}_0(\mathbf{R}^p_{a,b})$, $H_2 = BC^\infty(G)$, где $a < b$, $a, b \in \mathbf{R}^p$. По теореме 7 $\mathcal{E}^T_p$ — ЭПАБ в H_1. Из предложения 2 следует

Теорема 10. *Пусть* $\overline{G} \subset T^p_{a,b}$. *Тогда в каждой из четырех пар утверждений* a$_1$)–a$_2$), b$_1$)–b$_2$), c$_1$)–c$_2$), d$_1$)–d$_2$) *оба утверждения равносильны (при* $X = \mathcal{E}^T_p = \Pi X$, $H_1 = \mathcal{E}_0(\mathbf{R}^p_{a,b})$, $H_2 = BC^\infty(G)$).

Аналогично, если $T^p_{a,b}$ — прямоугольный параллелепипед, содержащий внутри себя открытое множество G, то теорема 10 справедлива при $H_1 = \mathcal{E}_0(T^p_{a,b})$, $H_2 = BC^\infty(G)$, $X = \mathcal{E}^T_p$.

В случае, если открытое множество G ограничено, можно получить более общие результаты.

Теорема 11. *Пусть* $a, b \in \mathbf{R}^p$; $-\infty < a_j < b_j < +\infty$, $j = 1, 2, \dots, p$; G — *открытое множество в* $\mathbf{R}^p$ *и* $\overline{G} \subset T^p_{a,b}$. *Тогда в каждой из нижеперечисленных групп утверждений все эти утверждения равносильны*:

I. 1) *в* $BC^\infty(G)$ *имеется АПС экспонент* $\mathcal{E}_\mu$; 2) *существует (непрерывный) оператор продолжения из* $BC^\infty(G)$ *в* $\mathcal{E}_0(T^p_{a,b})$; 3) $\mathcal{E}^T_p$ — *АПС в* $BC^\infty(G)$; 4) *существует оператор продолжения из* $BC^\infty(G)$ *в* $\mathcal{E}_0(\mathbf{R}^p_{a,b})$; 5) *существует оператор продолжения из* $BC^\infty(G)$ *в* $BC^\infty(\mathbf{R}^p)$,

II. 1) –II. 5) — *точные аналоги* I. 1) –I. 5) *с заменой в формулировках последних "АПС" на "ЭАПС" и "оператор продолжения" на "эффективно определяемый оператор продолжения"*,

III. 1) –III. 5) — *то же, что в* I. 1) –I. 5) *с заменой "АПС" на "ПАПС" и "оператор продолжения" на "линейный непрерывный оператор продолжения"*,

IV. 1) –IV. 5) — *аналог* I. 1) –I. 5)*, получающийся заменой "АПС" на "ЭПАПС" и "оператор продолжения" на "конструктивно определяемый линейный непрерывный оператор продолжения".*

Так как доказательства всех четырех групп утверждений теоремы 11 совершенно аналогичны, ограничимся первым из них. Прежде всего, очевидны импликации I. 3) $\Rightarrow$ I. 1) $\Rightarrow$ I. 5) (с учетом теоремы 9). Далее, по теореме 10 и ее аналогу (с $H_1 = \mathcal{E}_0(T^p_{a,b})$) I. 3) $\iff$ I. 4); I. 3) $\iff$ I. 2). Следовательно, I. 2) $\iff$ I. 4) $\iff$ I. 3) $\Rightarrow$ I. 1) $\Rightarrow$ I. 5). Пусть справедливо утверждение I. 5) и пусть $d = \rho(\overline{G}, \partial T^p_{a,b})$. Зафиксируем какую-либо функцию f из $BC^\infty(G)$ и обозначим символом F ее продолжение в $BC^\infty(\mathbf{R}^p)$. Согласно теореме 1.4.1 из [1] найдется $\varphi \in BC^\infty(\mathbf{R}^p) : \varphi(X) \equiv 1$ на $\overline{G}$, $0 \leqslant \varphi(X) \leqslant 1$, и $\operatorname{supp}\varphi \subset (\overline{G})_{\frac{d}{3}} := \{X \in \mathbf{R}^p : \rho(X, \overline{G}) \leqslant \frac{d}{3}\}$. Тогда, если $v(X) := \varphi(X)F(X)$, то $v \in \mathcal{E}_0(T^p_{a,b})$. По теореме 6 $\mathcal{E}^T_p$ — ЭПАБ в $\mathcal{E}_0(T^p_{a,b})$, и найдется абсолютно сходящийся в $BC^\infty(T^p_{a,b})$ ряд (8), сумма которого в $T^p_{a,b}$ равна $v(X)$. При этом $\forall x \in G$ $v(X) = f(X)$, и ряд (8) осуществляет продолжение f до функции из $\mathcal{E}_0(T^p_{a,b})$. Следовательно, I. 5) $\Rightarrow$ I. 4), и все утверждения из первой группы равносильны.

Переходя к пространству $B^\infty(G)$, такими же рассуждениями получим результаты точно такого же характера, как теорема 10 и ее аналог (при $X = \mathcal{E}^T_p$, $H_2 = B^\infty(G)$, $H_1 = \mathcal{E}_0(\mathbf{R}^p_{a,b})$ или $H_1 = \mathcal{E}_0(T^p_{a,b})$) и теорема 11 (с заменой $BC^\infty(G)$ на $B^\infty(G)$). При этом каждое из полученных таким путем 8 утверждений (в видоизмененной теореме 10 и ее аналоге) и 20 утверждений (в новой теореме 11) влечет за собой равенство $B^\infty(G) = BC^\infty(G)$. Достаточные условия, обеспечивающие последнее равенство, получены выше.

7. **Заключительные замечания**. Пространство $BC^\infty(G)$ для частного случая, когда G — ограниченная область в $\mathbf{R}^p$, рассматривалось ранее с различных позиций в работах многих российских и зарубежных математиков (напр., [6]–[11]). В этих статьях пространство $BC^\infty(G)$ обозначалось, как правило, символом $C^\infty(\overline{G})$.

В частности, изучался и вопрос о продолжимости функций из $C^\infty(\overline{G})$ в $BC^\infty(\mathbf{R}^p)$, но иными методами, чем в данной статье. Наличие двойственной связи между возможностью продолжения любой функции из данного пространства и наличием в нем АПС экспонент с чисто мнимыми показателями обнаружено впервые, по-видимому, в работах [3], [12], [13]. В этих статьях вопрос о продолжимости исследовался, в основном, для пространства $BC^\infty(\operatorname{int} Q)$, где Q — толстый компакт в $\mathbf{R}^p$, т. е. компакт, совпадающий с замыканием своей непустой внутренности. Это пространство обозначалось символом $C^\infty[Q]$ в [3], [13] и $C^\infty(Q)$ — в [12]. Следует заметить, что существуют ограниченные открытые множества, которые не могут быть внутренностью толстого компакта. Например, таким будет множество, приведенное после доказательства теоремы 4, а также любая выпуклая ограниченная область в $\mathbf{R}^p$ с одной выколотой точкой. Тем более, не является внутренностью толстого компакта любое неограниченное открытое множество в $\mathbf{R}^p$. Поэтому теоремы 9–11 — более общие, чем соответствующие результаты о "двойственной" связи из [3], [12], [13].

Литература

1. Хермандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.* Т. 1. *Теория распределений и анализ Фурье.* – М.: Мир, 1986. – 462 с.
2. Коробейник Ю.Ф. *Представляющие системы* // УМН. – 1981. – Т. 36. – № 2. – С. 73–126.
3. Коробейник Ю.Ф. *О некоторых классах представляющих систем и их преобразованиях.* I // Тр. Матем. центра им. Лобачевского. – Казань: Казанское матем. о-во. – 2002. – Т. 14. – С. 171–185.
4. Эдвардс Р. *Функциональный анализ.* – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
5. Коробейник Ю.Ф. *Об одной двойственной задаче.* I. *Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше* // Матем. сб. – 1975. – Т. 97. – № 2. – С. 193–229.

6. Митягин Б.С. *Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах* // УМН. – 1961. – Т. 16. – № 4. – С. 63–132.
7. Зобин Н.М., Крейн С.Г. *Математический анализ гладких функций.* – Воронеж: Изд-во Воронежск. ун-та, 1978. – 143 с.
8. Pawlucki W., Plesniak W. *Extension of C^∞ functions from sets with polynom cusps* // Studia Math. – 1988. – V. 88. – P. 279–287.
9. Гончаров А.П., Захарюта В.П. *Линейные топологические инварианты и пространства бесконечно дифференцируемых функций* // Матем. анализ и его прилож. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. ун-та, 1985. – С. 18–27.
10. Tidten M. *Fortsetzungen von C^∞-Funktionen, welche auf einer abgeschlossen Menge im $\mathbf{R}^n$ definiert sind* // Manuscripta Math. – 1979. – V. 27. – P. 291–312.
11. Bonet J., Meise R.W., Taylor B.A. *Whitney's extension theorem for non-quasianalitic classes of ultradifferentiable functions* // Studia Math. – 1991. – V. 91. – № 2. – P. 155–184.
12. Korobeinik Yu.F. *On absolutely representing systems in spaces of infinitely differentiable functions* // Studia Math. – 2000. – V. 139. – № 2. – P. 175–188.
13. Korobeinik Yu.F. *Absolutely representing systems of exponentials in the spaces of infinitely-differentiable functions and extendability in the sense of Whitney* // Turkish J. Math. – 2001. – V. 25. – № 4. – P. 503–517.

Ростовский государственный университет

Поступила 03.02.2003