ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 5 (528)

УДК 517.929

Б.Г. ГРЕБЕНЩИКОВ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Рассматривается следующая система нестационарных линейных уравнений с последействием:

$$dx(t)/dt = A(t)x(t) + B_1(t)x(t-\tau) + B_2(t)x(\mu t), \quad t \geq t_0 > 0,$$
$$\tau = \text{const}, \quad \tau > 0, \quad \mu = \text{const}, \quad 0 < \mu < 1; \quad x(\eta) = \phi(\eta) : \eta < t_0. \tag{1}$$

Здесь $A(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$ — матрицы размерности $m \times m$, равномерно ограниченные, $\|A(t)\| \leq a$, $\|B_i(t)\| \leq b_i$, $a = \text{const}$, $a > 0$, $b_i = \text{const}$, $b_i > 0$, $i = 1, 2$, $t \geq 0$, достаточное число $(k+1)$ раз дифференцируемые, $x(t)$ — m-мерная вектор-функция времени аргумента t. Система имеет два запаздывания: $\gamma_1 = \tau$ постоянное и $\gamma_2(t) = (1-\mu)t$ линейное.

Полагаем, что производные матриц $A(t)$, $B_j(t)$, $j = 1, 2$, достаточно малы по норме, т. е. при $t \geq 0$ справедливы неравенства

$$\|A^{(i)}(t)\| \leq \delta, \quad \|B_j^{(i)}(t)\| \leq \delta, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, k \tag{2}$$

(δ — достаточно малое положительное число, величиной которого распорядимся позднее). Под нормой матрицы $D = \{d_{ij}\}$ понимается выражение

$$\|D\| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{m} |d_{ij}|.$$

Наряду с системой (1) будем рассматривать систему с “замороженными” коэффициентами

$$dy(t)/dt = A(s)y(t) + B_1(s)y(t-\tau) + B_2(s)y(\mu t), \quad s = \text{const}, \quad 0 < s < \infty, \quad t \geq t_0, \quad t_0 > 0,$$
$$y(\eta) = \phi(\eta), \quad \eta \leq t_0, \tag{3}$$

а также “укороченную” систему (3) без членов с линейным запаздыванием в правой части вида

$$dz(t)/dt = A(s)z(t) + B_1(s)z(t-\tau), \quad t \geq t_0. \tag{4}$$

Полагаем, что корни $\lambda(s)$ характеристического уравнения $|A(s) + B_1(s)e^{-\lambda\tau} - \lambda E| = 0$, $0 < s < \infty$, удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}\lambda(s) < -\beta, \quad \beta = \text{const}, \quad \beta > 0. \tag{5}$$

Пусть $Z_s(t, r) = Z_s(t-\tau)$, $t_0 < r \leq t$, — фундаментальная матрица решений “укороченной” системы с “замороженными” коэффициентами. Отметим теперь следующий факт: ввиду равномерной ограниченности матриц $A(s)$ и $B_1(s)$, а также неравенства (5) для матрицы $Z_s(t, r)$ справедлива оценка ([1], с. 209; [2])

$$\|Z_s(t, r)\| \leq C_1 e^{-\beta_1(t-r)}, \quad C_1 = \text{const}, \quad C_1 \geq 1, \quad \beta_1 = \beta - \varepsilon, \quad t_0 < r \leq t, \tag{6}$$

ε — малое положительное число, константа C_1 не зависит от s.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации, грант № E00-1.0-88.

Лемма 1. *При условиях, сформулированных выше, невозмущенной, т. е. линейной* ([1], с. 366) *без достаточно малых линейных возмущающих членов, для системы* (1) *является система с "замороженными" коэффициентами вида*

$$d\widehat{y}(t)/dt = A(s)\widehat{y}(t) + B_1(s)\widehat{y}(t-\tau) + B_2(s)\widehat{y}(\mu t), \quad t \geq t_0, \quad t_0 \leq s < \infty. \tag{7}$$

Доказательство. Без ограничения общности полагаем t_0 настолько большим, что $t_0(1-\mu)>\tau$. Запишем теперь исходную систему (1) в следующем виде:

$$dx(t)/dt = A(s)x(t) + B_1(s)x(t-\tau) + B_2(s)x(\mu t) + \\ + (A(t) - A(s))x(t) + (B_1(t) - B_1(s))x(t-\tau) + (B_2(t) - B_2(s))x(\mu t). \tag{8}$$

Данную систему можно рассматривать как "возмущенную" ([1], с. 387; [3]), считая "невозмущенной" систему (3). Запишем теперь решение системы (8) в форме Коши ([4], с. 6), считая однородной системой "укороченную" систему (4):

$$x(t) = Z_s(t,t_0)\phi(t_0) + \int_{-\tau}^{0} Z_s(t,t_0+\tau+\zeta)B_1(s)\phi(t_0+\zeta)d\zeta + \int_{t_0}^{t} Z_s(t,r)B_2(s)x(\mu r)dr + \\ + \int_{t_0}^{t} Z_s(t,r)[(A(r)-A(s))x(r) + (B_1(r)-B_1(s))x(r-\tau)]dr + \\ + \int_{t_0}^{t} Z_s(t,r)(B_2(r)-B_2(s))x(\mu r)dr. \tag{9}$$

Пусть теперь в равенстве (9) $s = t$. Покажем, что "возмущающие" члены достаточно малы. Для наперед заданных малого числа $\varepsilon > 0$ и достаточно большого числа $T > 0 : |t-r| < T$ можно всегда указать в неравенстве (2) достаточно малое $\delta > 0$, что при $|t-r| < T$ справедливы неравенства

$$\|A(r) - A(t)\| < \varepsilon, \quad \|B_i(r) - B_i(t)\| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \tag{10}$$

$$e^{-\beta_1 T} < \varepsilon. \tag{11}$$

Пусть $t > t_0 + T$. Рассмотрим, например, последний интеграл в правой части равенства (9). Представим его в следующем виде:

$$\int_{t_0}^{t} Z_t(t,r)(B_2(r)-B_2(t))x(\mu r)dr = \int_{t_0}^{t-T} Z_t(t,r)(B_2(r)-B_2(t))x(\mu r)dr + \\ + \int_{t-T}^{t} Z_t(t,r)(B_2(r)-B_2(t))x(\mu r)dr. \tag{12}$$

Вследствие соотношения (6) для первого интеграла в правой части равенства (12) имеем оценку

$$\left\| \int_{t_0}^{t-T} Z_t(t,r)(B_2(r)-B_2(t))x(\mu r)dr \right\| \leq \frac{2b_2C_1}{\beta_1} e^{-\beta_1 T} \sup_r \|x(\mu r)\|, \quad t_0 \leq r \leq t-T.$$

Для второго же интеграла в правой части равенства (12) вследствие соотношений (6), (10) получаем оценку

$$\left\| \int_{t-T}^{t} Z_t(t,r)(B_2(r)-B_2(t))x(\mu r)dr \right\| \leq \frac{\varepsilon}{\beta_1} C_1 \sup_r \|x(\mu r)\|, \quad t-T \leq r \leq t. \tag{13}$$

Ввиду неравенства (11) последний интеграл в правой части равенства (9) есть величина $O(\varepsilon)\sup_r \|x(\mu r)\|$. Далее, при $t < t_0 + T$ для данного интеграла справедлива оценка (13), т. е. снова получаем достаточную малость. Поскольку для остальных возмущающих членов в правой части равенства (9) можно таким же образом получить асимптотические оценки вида

$$O(\varepsilon)\sup_r \|x(r)\|, \; O(\varepsilon)\sup_r \|x(r-\tau)\| : t_0 \leq r \leq t,$$

окончательно показываем, что решение интегрального уравнения

$$\widehat{y}(t) = Z_t(t,t_0)\phi(t_0) + \int_{-\tau}^{0} Z_t(t,t_0+\tau+\zeta)B_1(t)\phi(t_0+\zeta)d\zeta + \int_{t_0}^{t} Z_t(t,r)B_2(t)\widehat{y}(\mu r)dr$$

является решением интегрального соотношения (9) без "возмущенных" членов. $\square$

Подобным образом можно показать, что первым приближением фундаментальной матрицы $\overline{Z}(t,r)$ "укороченной" системы вида

$$d\overline{z}(t)/dt = A(t)\overline{z}(t) + B_1(t)\overline{z}(t-\tau)$$

является матрица $Z_t(t-r) : t_0 \le r \le t$ (подобный результат другим методом доказан, напр., в [2]).

Для того чтобы эффективно изучить асимптотическое поведение системы (1), исследуем также поведение производных решения $x^{(j)}(t)$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Известно ([1], с. 63), что при достаточно больших $t \ge \mu h : h = \text{const},\ h > 0$, производные данного порядка существуют и непрерывны. Дифференцируем обе части системы (1) по t. Имеем

$$x''(t) = x^{(2)}(t) = A(t)x'(t) + B_1(t)x'(t-\tau) + \mu B_2(t)x'(\mu t) + \\ + A'(t)x(t) + B_1'(t)x(t-\tau) + B_2'(t)x(\mu t), \quad t \ge h. \quad (14)$$

Рассмотрим полученную систему (14). Последние три члена в правой части можно рассматривать как линейные "возмущения", имеющие асимптотические оценки $O(\varepsilon)\|x(t)\|$, $O(\varepsilon)\|x(t-\tau)\|$, $O(\varepsilon)\|x(\mu t)\|$. Так как однородная система

$$x^{(2)}(t) = A(t)x'(t) + B_1(t)x'(t-\tau) + \mu B_2(t)x'(\mu t) \quad (15)$$

имеет асимптотические свойства, аналогичные исходной системе (1), то, используя оценки (2), методами, аналогичными примененным при доказательстве леммы 1, можем показать, что невозмущенной системой для (14) является система (15), именно, система (14) без "возмущающих" членов. Возмущенные члены имеют асимптотические оценки $O(\varepsilon)\|x(t)\|$, $O(\varepsilon)\|x(t-\tau)\|$, $O(\varepsilon)\|x(\mu t)\|$ и $O(\varepsilon)\|x'(t)\|$, $O(\varepsilon)\|x'(t-\tau)\|$, $O(\varepsilon)\|x'(\mu t)\|$.

Далее, дифференцируя систему (14) по t и действуя методами, аналогичными приведенным выше, получим, что невозмущенной системой будет соотношение вида

$$x^{(3)}(t) = A(t)x^{(2)}(t) + B_1(t)x^{(2)}(t-\tau) + \mu^2 B_2(t)x^{(2)}(\mu t).$$

(Возмущениями теперь будут величины $O(\varepsilon)\|x^j(t)\|$, $O(\varepsilon)\|x^j(t-\tau)\|$, $O(\varepsilon)\|x^j(\mu t)\|$, где $j = 0, 1, 2$.) Продолжая рассуждать подобным образом, через конечное число шагов получим, что невозмущенной системой, определяющей поведение величины $x^{(k)}(t)$, является соотношение

$$x^{(k+1)}(t) = A(t)x^{(k)}(t) + B_1(t)x^{(k)}(t-\tau) + \mu^k B_2(t)x^{(k)}(\mu t), \quad t \ge h. \quad (16)$$

(Здесь же возмущения имеют следующую асимптотическую оценку: $O(\varepsilon)\|x^j(t)\|$, $O(\varepsilon)\|x^j(t-\tau)\|$, $O(\varepsilon)\|x^j(\mu t)\|$, $j = 0, 1, \ldots, k$.)

Рассмотрим асимптотическое поведение данной системы. Вследствие неравенств (6), (10) "укороченная" система $d\widehat{z}(t)/dt = A(t)\widehat{z}(t) + B_1(t)\widehat{z}(t-\tau)$, $t \ge h$, экспоненциально устойчива [2], следовательно, справедлива оценка $\|\widehat{z}(t)\| \le C_2 e^{-\beta_2(t-h)} \sup\limits_{h-\tau \le s \le h} \|\widehat{z}(s)\|$, $C_2 = \text{const}$, $C_2 \ge 1$, $\beta_2 = \text{const}$, $\beta_2 > 0$. При достаточно большом k

$$C_2 \mu^k b_2 (\beta_2)^{-1} \le p < 1, \quad (17)$$

из результатов работы [3] следует, что невозмущенная система (16) асимптотически устойчива. Для ее решения справедлива оценка

$$\|x^{(k)}(t)\| \le C_3 \left(\frac{t}{h}\right)^{-\beta_3} \max_{\mu h \le t \le h} \|x^{(k)}(t)\|, \quad C_3 = \text{const}, \quad C_3 \ge 1, \quad (18)$$

при этом константа $\beta_3 > 0$ выбирается таким образом, чтобы было справедливо неравенство [3] $p\beta_2 - \beta_2\mu^{-\beta_3} - \beta_3 t\mu^{-\beta_3} < 0$, $t \geq h$ (данный выбор возможен, т. к. при $\beta_3 = 0$ имеем неравенство, аналогичное неравенству (17)). Рассмотрим теперь невозмущенную систему, определяющую асимптотическое поведение величины $x^{(k-1)}(t)$:

$$x^{(k)}(t) = A(t)x^{(k-1)}(t) + B_1(t)x^{(k-1)}(t-\tau) + \mu^{k-1}B_2(t)x^{(k-1)}(\mu t), \quad t \geq h. \tag{19}$$

Будем исследовать поведение системы (19) на полуинтервалах $l_n = (h_{n-1}, h_n] : h\mu^{-n} = h_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Учитывая лемму 1, запишем решение (невозмущенной) системы (19) в форме Коши

$$x^{(k-1)}(t) = Z_t(t-h_{n-1})x^{(k-1)}(h_{n-1}) + \int_{-\tau}^{0} Z_t(t-h_{n-1}-\tau-\zeta)B_1(t) \times$$
$$\times\, x^{(k-1)}(h_{n-1}+\zeta)d\zeta + \int_{h_{n-1}}^{t} Z_t(t-r)\mu^{(k-1)}B_2(t)x^{(k-1)}(\mu r)dr, \quad t \in l_n. \tag{20}$$

Заметим, что при $B_2(t) \equiv 0$ первые два члена в правой части данного равенства являются решением системы, не содержащей линейное запаздывание (и ввиду оценки (6) убывают по экспоненте при $t \to \infty$). Рассмотрим последний интеграл в правой части равенства (20)

$$\int_{h_{n-1}}^{t} Z_t(t-r)\mu^{(k-1)}B_2(t)x^{(k-1)}(\mu r)dr. \tag{21}$$

Методы построения вектор-функций $Z_s(t,r) = Z_s(t-r) : t_0 < r \leq t$ хорошо разработаны (см., напр., [1], с. 206). Введем вектор-функции

$$W_s(t,h_{n-1}) = \int_{h_{n-1}}^{t} Z_s(t-r)dr, \quad \overline{Z}'_s(t) = Z_s(t), \quad t \in l_n,$$
$$R(s) = \lim_{r\to\infty} W_s(r,h_{n-1}). \tag{22}$$

Равенство (22) также справедливо при любом s, в частности, при $s = t$. Далее, вследствие оценок (2), (5) справедливо неравенство

$$\|\overline{Z}_s(t-r)\| \leq \overline{C}_2 e^{-\beta_1(t-r)}, \quad \overline{C}_2 = \mathrm{const}, \quad \overline{C}_2 \geq 1. \tag{23}$$

Произведем интегрирование по частям. Учитывая соотношение (22), получим равенство

$$\int_{h_{n-1}}^{t} Z_t(t-r)\mu^{k-1}B_2(t)x^{(k-1)}(\mu r)dr = \mu^{k-1}R(t)B_2(t)x^{(k-1)}(\mu t) -$$
$$- \mu^{k-1}\overline{Z}_t(t-h_{n-1})B_2(t)x^{k-1}(\mu h_{n-1}) + \mu^k \int_{h_{n-1}}^{t} \overline{Z}_t(t-r)B_2(t)x^{(k)}(\mu r)dr \tag{24}$$

(здесь $R(t)$ определено предельным равенством (22)). Ввиду соотношений (18), (22) последнее слагаемое в правой части равенства (24) допускает оценку

$$\left\| \int_{h_{n-1}}^{t} \overline{Z}_t(t-r)B_2(t)x^{(k)}(\mu r)dr \right\| \leq \frac{\overline{C}_2 C_3 b_2}{\beta_1}\left(\frac{\mu h_{n-1}}{h}\right)^{-\beta_3} \max_{\mu h \leq t \leq h} \|x^{(k)}(t)\|.$$

Так как $h_{n-1} \to \infty$ при $n \to \infty$, $\lim x^{(k)}(h_{h-1}) = 0$ $(n \to \infty)$, данная интегральная вектор-функция стремится к нулю при $n \to \infty$ ([5], с. 108). Далее, рассмотрим второе, также интегральное слагаемое в правой части равенства (20). Уточним его асимптотику: запишем для вектор-функции $x^{(k-1)}(h_{n-1}+\zeta)$ следующее представление ([6], с. 281):

$$x^{(k-1)}(h_{n-1}+\zeta) = x^{(k-1)}(h_{n-1}) + \zeta x^{(k)}(h_{n-1}+\vartheta\zeta), \quad 0 < \vartheta < 1. \tag{25}$$

Далее ввиду оценки (2) методами, аналогичными использованным при получении асимптотического равенства (24), доказываем, что данный интеграл равен выражению

$$- \overline{Z}_t(t-h_{n-1}-\tau)B_1(t)x^{(k-1)}(h_{n-1}) + \overline{Z}_t(t-h_{n-1})B_1(t)x^{(k-1)}(h_{n-1}) - \\ - \int_{-\tau}^{0} \overline{Z}_t(t-h_{n-1}-\tau-\zeta)B_1(t)x^{(k)}(h_{n-1}+\vartheta\zeta)\zeta\, d\zeta. \quad (26)$$

При этом интеграл в правой части равенства (26) является (при $n \to \infty$) исчезающей вектор-функцией и допускает оценку по норме:

$$\left\| \int_{-\tau}^{0} \overline{Z}_t(t-h_{n-1}-\tau-\zeta)B_1(t)x^{(k)}(h_{n-1}+\vartheta\zeta)\zeta\, d\zeta \right\| \le \overline{C}_2 C_3 b_1 (\beta_1 q_k)^{-1}\tau \times \\ \times e^{-\beta_1(t-h_{n-1})}[e^{\beta_1\tau}-1](q_k)^{n-1} \max_{\mu h \le t \le h} \|x^{(k)}(t)\|, \quad \beta_3 = -\log_\mu q_k, \quad 0 < q_k < 1. \quad (27)$$

Пусть теперь наряду с условиями леммы 1 справедливо неравенство

$$\sup_{t\in l_n} \left\| \prod_{i=0}^{n-1} R(\mu^{n-1+i}t)B_2(\mu^{n-1+i}t) \right\| \le Lq^{n-1}, \\ L = \mathrm{const}, \quad L > 1, \quad q = \mathrm{const}, \quad 0 < q < 1 \quad (28)$$

(где вектор-функция $R(t)$ определена соотношениями (21) и (22)).

Лемма 2. *При выполнении условий леммы* 1 *и неравенства* (28) $x^{(k-1)}(t)$, $t \in l_n$, *— решение счетной системы вида*

$$x^{(k-1)}(t) = \overline{Z}_t(t-h_{n-1})x^{(k-1)}(h_{n-1}) + \int_{-\tau}^{0} \overline{Z}_t(t-h_{n-1}-\tau-\zeta)B_1(t) \times \\ \times x^{(k-1)}(h_{n-1}+\zeta)d\zeta + \mu^{k-1}R(t)B_2(t)x^{(k-1)}(\mu t) - \mu^{k-1}\overline{Z}_t(t-h_{n-1}) \times \\ \times B_2(t)x^{(k-1)}(\mu h_{n-1}) + \mu^k \int_{h_{n-1}}^{t} \overline{Z}_t(t-r)B_2(t)x^{(k)}(r)dr, \quad t \in l_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad (29)$$

определенное на отрезке $\mu h \le \eta \le h$ *начальной вектор-функцией* $x^{k-1}(\eta)$, *асимптотически устойчиво*; *при этом вектор-функция* $x^{(k-1)}(t)$ *удовлетворяет следующей оценке*:

$$\sup_{t\in l_n} \|x^{(k-1)}(t)\| \le M_{k-1}(\overline{q}_{k-1})^{n-1}[\max_{\mu h \le t \le h} \|x^{(k-1)}(t)\| + \max_{\mu h \le t \le h} \|x^{(k)}(t)\|], \\ M_{k-1} = \mathrm{const}, \quad M_{k-1} \ge 1, \quad \overline{q}_{k-1} = \mathrm{const}, \quad 0 < \overline{q}_{k-1} < 1, \quad t \in l_n. \quad (30)$$

Доказательство. Учитывая лемму 1, рассмотрим на начальном этапе поведение невозмущенной системы (29) в правых граничных точках полуинтервалов l_i (при достаточно больших i). Принимая во внимание соотношения (22)–(28), имеем

$$x^{(k-1)}(h_{i+1}) = (\mu^{k-1}R(h_{i+1})B_2(h_{i+1}) + \varepsilon_i(h_{i+1}))x^{(k-1)}(h_i) - \\ - \mu^{k-1}\overline{Z}_{h_{i+1}}(h_{i+1}-h_i)B_2(h_{i+1})x^{(k-1)}(h_{i-1}) - K(h_{i+1}). \quad (31)$$

Здесь $\varepsilon_i(h_{i+1})$ — совокупность вектор-функций, удовлетворяющих оценке

$$\|\varepsilon_i(h_{i+1})\| \le C_1 e^{-\beta_1(h_{i+1})-h_i}(1 + \beta_1^{-1}(b_1 + b_1 e^{\beta_1\tau} + Lb_2\mu^{k-1})), \quad (32)$$

$K(h_{i+1})$ — исчезающая (при $i \to \infty$) вектор-функция, удовлетворяющая в свою очередь оценке вида

$$\|K(h_{i+1})\| \le \overline{M}(q_k)^i \max_{\mu h \le t \le h} x^{(k)}(t), \quad \overline{M} = \mathrm{const}, \quad \overline{M} > 1. \quad (33)$$

Рассмотрим теперь асимптотическое равенство (31). Полагая

$$y_{i+1} = x_i, \quad x_i = x^{(k-1)}(h_i), \quad \overline{\varepsilon}_i = \varepsilon_i(h_{i+1}),$$
$$\delta_i = \overline{Z}_{h_{i+1}}(h_{i+1} - h_i)B_2(h_{i+1}), \quad R_i = R(h_{i+1})B_2(h_{i+1}), \tag{34}$$

подставив данные представления в равенство (31), получим равенство

$$x_{i+1} = (\mu^{k-1}R_i + \overline{\varepsilon}_i)x_i - \mu^{k-1}\delta_i y_{i-1} + K(h_{i+1}),$$

отсюда для вектора $w_i^{(*)} = (y_i, x_i)$ (значок $(*)$ означает транспонирование) получим неоднородную разностную систему

$$w_{i+1} = A_i w_i + \Xi_i w_i + F_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{35}$$

Здесь матрицы A_i, Ξ_i и вектор F_{i+1} определены следующим образом:

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & \mu^{k-1}R_i \end{pmatrix}, \quad \Xi_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\mu^{k-1}\delta_i & \overline{\varepsilon}_i \end{pmatrix}, \quad F_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ K(h_{i+1}) \end{pmatrix}.$$

Слагаемые, обусловленные матрицей Ξ_i, можно рассматривать как “возмущения”. Записывая теперь решение неоднородной системы (35) с помощью формулы вариации постоянных ([7], с. 23) (полагая при этом неоднородностью как вектор-функцию F_i, так и “возмущения”), учитывая при этом оценку (28), получаем неравенство для компоненты x_i вектора w_i

$$\begin{aligned}\|x_i\| \le L(\mu^{k-1}q)^{i-1}\|x_1\| + L(\mu^{k-1}q)^{i-2}(\|\delta_1\|\,\|y_1\| + \|\overline{\varepsilon}_1\|\,\|x_1\| + \|K(h_2)\|) + \\ + L(\mu^{k-1}q)^{i-3}(\|\delta_2\|\,\|y_2\| + \|\overline{\varepsilon}_2\|\,\|x_2\| + \|K(h_3)\|) + \cdots + \\ + \|\delta_{i-1}\|\,\|y_{i-1}\| + \|\overline{\varepsilon}_{i-1}\|\,\|x_{i-1}\| + \|K(h_i)\| < L(\mu^{k-1}q)^{i-1}\|x_1\| + \\ + L\sum_{j=1}^{i-1}(\mu^{k-1}q)^{i-1-j}(\|\delta_j\|\,\|y_j\| + \|\overline{\varepsilon}_j\|\,\|x_j\| + \|K(h_{j+1})\|).\end{aligned} \tag{36}$$

Разделив обе части данного соотношения на q^i, учитывая первое из соотношений (34) и оценку (33), полагая $u_j = (\mu^{k-1}q)^{-j}\|x_j\|$, получаем из соотношения (36) неравенство

$$u_i \le \frac{L\mu^{1-k}}{q}\Big[\delta_0 \max_{\mu h \le t \le h}\|x^{(k-1)}(t)\| + f_i + \sum_{j=1}^{i-2}(\|\overline{\varepsilon}_j\| + \|\delta_{j+1}\|)u_j\Big],$$
$$\delta_0 = 1 + \frac{\mu^{k-1}\delta_1}{q}, \quad f_i = \frac{M}{q}\sum_{j=1}^{i-1}\mu^{j(1-k)}q_k^j q^{-j} \max_{\mu h \le t \le h}\|x^{(k)}(t)\|. \tag{37}$$

Тогда, как следует из соотношения (37), справедливо неравенство ([7], с. 70)

$$u_i \le \frac{L\mu^{1-k}}{q}[\delta_0 \max_{\mu h \le t \le h}\|x^{(k-1)}(t)\| + f_i]\prod_{j=1}^{i-2}\Big(1 + \frac{L\mu^{1-k}}{q}(\|\overline{\varepsilon}_j\| + \|\delta_{j+1}\|)\Big).$$

Неравенство

$$\prod_{j=1}^{i-2}\Big(1 + \frac{L\mu^{1-k}}{q}(\|\overline{\varepsilon}_j\| + \|\delta_{j+1}\|)\Big) < \overline{L}_{k-1}$$

(где $\overline{L}_{k-1} = \text{const}$, $\overline{L}_{k-1} > 0$) справедливо вследствие сходимости ряда $\sum\|\delta_j\| + \|\overline{\varepsilon}_j\|$ (сходимость ряда вытекает из соотношений (32) и (34)). Таким образом, получили оценку

$$\|x_i\| \le L\overline{L}_{k-1}[\delta_0 \max_{\mu h \le t \le h}\|x^{(k-1)}(t)\| + f_i](\mu^{k-1}q)^{i-1}. \tag{38}$$

Очевидно, $\max\limits_{\mu h\le t\le h}\|x^{(k-1)}(t)\|(\mu^{k-1}q)^{i-1}\to 0$ при $i\to\infty$. Рассмотрим слагаемое $f_i(\mu^{k-1}q)^{i-1}$. Если $q_k\ne\mu^{k-1}q$, т. е. $q_k=\alpha q\mu^{k-1}$, $\alpha=\mathrm{const}$, $\alpha>0$ (причем $\alpha\ne 1$), то имеем

$$f_i(\mu^{k-1}q)^{i-1}=\frac{Mq^{-1}(\alpha^i-1)(\mu^{k-1}q)^{i-1}}{\alpha-1}\max_{\mu h\le t\le h}\|x^{(k)}(t)\|=Mq^{-2}\mu^{k-1}\frac{(q_k)^i-(\mu^{k-1}q)^i}{\alpha-1}\max_{\mu h\le t\le h}\|x^{(k)}(t)\|. \tag{39}$$

Как следует из соотношений (38), (39), $\lim\limits_{i\to\infty}\|x_i\|=0$ при $\alpha\ne 1$. Если же $\alpha=1$, то справедливо неравенство ([7], с. 143)

$$f_i(\mu^{k-1}q)^{i-1}=\frac{M}{q}\sum_{j=1}^{i-1}j(q_k)^{i-1}<\frac{M\overline{\alpha}^{i-1+e}}{q(1-\overline{\alpha})},\quad \overline{\alpha}=\sqrt{q_k},\quad e=\overline{\alpha}(1-\overline{\alpha})^{-1}.$$

Очевидно, $\|x_i\|\to 0: i\to\infty$ при $\alpha=1$. И в том, и в другом случае найдутся такие положительные постоянные $\overline{M}_{k-1}, q_{k-1}: q_{k-1}<1$, что справедлива оценка

$$\|x_i\|\le\overline{M}_{k-1}(q_{k-1})^i[\max_{\mu h\le t\le h}\|x^{(k)}(t)\|+\max_{\mu h\le t\le h}\|x^{(k-1)}(t)\|]. \tag{40}$$

Рассматривая поведение вектор-функции $x^{(k-1)}(t)$ внутри интервалов l_n, из соотношений (29), (31), (40) получаем неоднородную разностную систему

$$x^{(k-1)}(t)=\mu^{k-1}R(t)B_2(t)x^{(k-1)}(\mu t)+\overline{f}_{1,t}(h_{n-1})+\overline{f}_{2,t}(h_n)+\overline{f}(t,x^{(k)}(t)). \tag{41}$$

Здесь $\overline{f}_{1,t}(h_{n-1})$, $\overline{f}_{2,t}(h_n)$ — исчезающие вектор-функции, удовлетворяющие оценкам, аналогичным оценке (40), вектор-функция $\overline{f}(t,x^{(k)}(t))$ также исчезающая, удовлетворяющая оценке, аналогичной оценке (18). Исследование асимптотического поведения решения системы (41) проводится точно такими же методами, как и исследование поведения решения системы (35). В итоге для вектор-функции $x^{(k-1)}(t)$ получим оценку (30). $\square$

Замечание. Методом, описанным выше при доказательстве леммы 2, далее последовательно доказываем асимптотическую устойчивость величин $x^{(k-2)}(t), x^{(k-3)}(t),\dots,x'(t),x(t)$ (при этом также рассматриваем невозмущенные системы). Отметим, что для $x(t)$ будет справедлива оценка

$$\sup_{t\in l_n}\|x(t)\|\le M_0(\overline{q}_0)^n\sum_{j=0}^{k}\max_{\mu h\le t\le h}\|x^{(j)}(t)\|.$$

При доказательстве лемм 1 и 2 были рассмотрены невозмущенные системы. Возмущенная же система представляет собой следующую совокупность систем:

$$d\widehat{y}^i(t)/dt=A(s)\widehat{y}^i(t)+B_1(s)\widehat{y}^i(t-\tau)+\mu^iB_2(s)\widehat{y}^i(\mu t)+$$
$$+\sum_{j=0}^{i}R^j_{i,1}(t)\widehat{y}^j(t)+\sum_{j=0}^{i}R^j_{i,2}(t)\widehat{y}^j(t-\tau)+\sum_{j=0}^{i}R^j_{i,3}(t)\widehat{y}^j(\mu t)$$

(i последовательно принимает значения $0,1,\dots,k$, $t\ge h>t_0$, $t_0\le s<\infty$). Здесь $R^j_{i,l}(t)$ ($i,j=0,1,\dots,k$, $l=1,2,3$) — линейные m-мерные вектор-функции времени t, наличие которых в правой части данной системы вызывают “возмущение” решения (данные вектор-функции $R^j_{i,l}(t)$ ($i,j=0,1,\dots,k$, $l=1,2,3$) удовлетворяют тому или иному условию малости). Отметим, что данная система имеет порядок $m_1=(2k+1)$. Исследование же поведения решения невозмущенной системы проведено выше.

Обоснуем далее закономерность пренебрежения “возмущениями” при малых интегральных ограничениях на норму “возмущения” ([8], с. 259) (как наиболее общих).

Рассмотрим возмущенную систему m_1-го порядка

$$dx(t)/dt = \overline{A}(t)x(t) + \overline{B}_1(t)x(t-\tau) + \overline{B}_2(t)x(\mu t) + R_1(t)x(t) + R_2(t)x(t-\tau) + R_3(t)x(\mu t),$$
$$t \ge t_0 > 0, \quad x(\eta) = \phi_1(\eta) : \eta \le t_0, \quad \|\overline{A}(t)\| \le a, \quad \|\overline{B}_i(t)\| \le b_i, \quad i = 1, 2. \tag{42}$$

Слагаемые, обусловленные матрицами $R_j(t)$, считаем возмущениями. При этом полагаем, что матрицы $R_j(t)$ $(j = 1, 2, 3)$ непрерывные, размерности $m_1 \times m_1$, удовлетворяющие (как наиболее общим) условиям малости

$$\|R_j(t)\| \le \sigma(t), \quad \int_{t-1}^{t} \sigma(s)ds \le \delta, \tag{43}$$

где δ — достаточно малое положительное число. Полагаем, что решение $\overline{x}(t)$ невозмущенной системы асимптотически устойчиво и удовлетворяет оценке

$$\|\overline{x}(t)\| \le C_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\beta_0} \sup_{\mu t_0 \le \eta \le t_0} \|\phi(\eta)\|, \quad C_0 = \text{const}, \quad C_0 \ge 1, \quad \beta_0 = \text{const}, \quad \beta_0 > 0. \tag{44}$$

Методы получения подобных оценок изложены в лемме 2. Кроме того, считаем, что "укороченная" невозмущенная система

$$dy(t)/dt = \overline{A}(t)y(t) + \overline{B}_1(t)y(t-\tau), \quad t \ge t_0, \tag{45}$$

экспоненциально устойчива, т. е. для фундаментальной матрицы решений $Y(t,s)$ справедлива оценка

$$\|Y(t,s)\| \le \overline{C}e^{-\overline{\beta}(t-s)}, \quad t_0 < s \le t, \quad \overline{C} = \text{const}, \quad \overline{C} \ge 1, \quad \overline{\beta} = \text{const}, \quad \overline{\beta} > 0. \tag{46}$$

Теорема. *Пусть решение $\overline{x}(t)$ невозмущенной системы*

$$d\overline{x}(t)/dt = \overline{A}(t)\overline{x}(t) + \overline{B}_1(t)\overline{x}(t-\tau) + \overline{B}_2(t)\overline{x}(\mu t), \quad t \ge t_0 > 0,$$
$$\overline{x}(\eta) = \phi(\eta) : \eta \le t_0,$$

асимптотически устойчиво, при этом для данного решения справедлива оценка (44), *а решение невозмущенной "укороченной" системы* (45) *экспоненциально устойчиво* (*при этом справедлива оценка* (46)). *Тогда для достаточно малого δ решение исходной системы* (42) *также асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Рассмотрим возмущенную "укороченную" систему (систему с постоянным запаздыванием)

$$d\overline{y}(t)/dt = (\overline{A}(t) + R_1(t))\overline{y}(t) + (\overline{B}_1(t) + R_2(t))\overline{y}(t-\tau), \quad t \ge t_0. \tag{47}$$

Известно [9], что при выполнении неравенства

$$\frac{2\delta\overline{C}}{\overline{\beta}} < 1 \tag{48}$$

решение возмущенной "укороченной" системы (47) экспоненциально устойчиво. Следовательно, фундаментальная матрица решений $Y_1(t,s)$ системы (47) допускает оценку по норме

$$\|Y_1(t,s)\| \le C_4 e^{-\beta_4(t-s)}, \quad C_4 = \text{const}, \quad C_4 \ge 1, \quad \beta_4 = \text{const}, \quad \beta_4 > 0, \quad t_0 < s \le t. \tag{49}$$

Считая t_0 достаточно большим ($(1-\mu)t_0 > 1$, $(1-\mu)t_0 > \tau$), запишем решение системы (42) в форме Коши, полагая неоднородностью члены с линейным запаздыванием. Получаем соотношение

$$x(t) = Y_1(t,t_0)\phi_1(t_0) + \int_{-\tau}^{0} Y_1(t,t_0+\tau+\zeta)(\overline{B}_1(t_0+\tau+\zeta) + \\ + R_2(t_0+\tau+\zeta))\phi_1(t_0+\zeta)d\zeta + \int_{t_0}^{t} Y_1(t,r)(\overline{B}_2(r)+R_3(r))x(\mu r)dr. \quad (50)$$

Очевидно, любой полуинтервал $\bar{l}_n = (t_0\mu^{1-n},\ t_0\mu^{-n}]$, $n = 0,1,2,\dots$, можно представить в виде $\bar{l}_n : (t_{n-1} = t_0\mu^{1-n},\ t_{n-1} + r_n + \theta_n)$, где r_n — целое положительное число, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$; $\theta_n = \mathrm{const}$, $0 < \theta_n < 1$. Тогда при $t \in \bar{l}_1$ вследствие оценки (49) из соотношения (50) имеем следующее неравенство:

$$\|x(t)\| \le C_4 e^{-\beta_4(t-t_0)} \sup_{t\in\bar{l}_0}\|\phi_1(t)\| + \int_{t_0}^{t} C_4 b_2 e^{-\beta_4(t-r)} b_2 dr \sup_{t\in\bar{l}_0}\|\phi_1(t)\| + \\ + \int_{t_0}^{t} C_4 e^{-\beta_4(t-r)}\|R_3(r)\|dr \sup_{t\in\bar{l}_0}\|\phi_1(t)\|. \quad (51)$$

Рассмотрим последний интеграл в правой части неравенства (51). Учитывая оценку (43), имеем соотношение

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\beta_4(t-r)}\|R_3(r)\|dr \le \sum_{j=0}^{r_1}\int_{t_0+j}^{t_0+1+j} e^{\beta_4(r-t)}\sigma(r)dr + \int_{t-\theta_1}^{t} e^{-\beta_4(t-r)}\sigma(r)dr. \quad (52)$$

Далее, для первого интеграла в правой части неравенства (52) получаем оценку

$$\int_{t_0+j}^{t_0+1+j} e^{\beta_4(r-t)}\sigma(r)dr \le e^{-\beta_4(r_1-j-1)}\int_{t_0+j}^{t_0+j+1}\sigma(r)dr \le \delta e^{-\beta_4(r_1-j-1)}.$$

Второй интеграл в правой части соотношения (52) оценим следующим образом:

$$\int_{t-\theta_1}^{t} e^{-\beta_4(t-r)}\sigma(r)dr \le \int_{t-1}^{t} e^{-\beta_4(t-r)}\sigma(r)dr \le \delta.$$

Но тогда получаем, что последний интеграл в правой части неравенства (51) не превосходит величины

$$C_4\delta\left(1 + \frac{1}{1-e^{-\beta_4}}\right)\sup_{t\in\bar{l}_0}\|\phi_1(t)\|. \quad (53)$$

Отсюда получаем окончательное неравенство вида

$$\sup_{t\in\bar{l}_1}\|x(t)\| \le \overline{M}\sup_{t\in\bar{l}_0}\|x(t)\|, \quad \overline{M} = C_4\left[1 + \frac{b_1}{\beta_4} + 1 + \delta\left(1 + \frac{1}{1-e^{-\beta_4}}\right)\right]. \quad (54)$$

Константа $\overline{M}$ не зависит от начального момента t_0, подобная же оценка справедлива и для любого интервала $\bar{l}_n$ (в этом случае аргумент правой части неравенства будет принадлежать интервалу $\bar{l}_{n-1}$). Данная оценка является весьма грубой. Установим теперь более точную оценку величины δ, при которой из асимптотической устойчивости решения $\overline{x}(t)$ невозмущенной системы следует асимптотическая устойчивость решения $x(t)$ возмущенной системы (42). Пусть

$t \in \bar{l}_n$. Запишем решение возмущенной системы (42) в форме Коши, считая неоднородностью "возмущенные" члены и невозмущенный член, содержащий линейное запаздывание. Имеем

$$x(t) = Y(t,t_{n-1})x(t_{n-1}) + \int_{-\tau}^{0} Y(t,t_{n-1}+\tau+\zeta)\overline{B}_1(t_{n-1}+\tau+\zeta)x(t_{n-1}+\zeta)d\zeta +$$
$$+ \int_{t_{n-1}}^{t} Y(t,s)\overline{B}_2(s)x(\mu s)ds + \int_{t_{n-1}}^{t} Y(t,s)R_1(s)x(s)ds +$$
$$+ \int_{t_{n-1}}^{t} Y(t,s)R_2(s)x(s-\tau)ds + \int_{t_{n-1}}^{t} Y(t,s)R_3(s)x(\mu s)ds. \quad (55)$$

Первые три слагаемых в правой части равенства (55) представляют невозмущенное решение $\overline{x}(t)$, определенное в момент времени t_{n-1} вектор-функцией $x(s) : s \in \bar{l}_{n-1}$. Рассмотрим первое из интегральных "возмущенных" слагаемых в правой части равенства (55). Методами, аналогичными использованным при получении оценки (53), учитывая оценку (54), получаем неравенство

$$\left\| \int_{t_{n-1}}^{t} Y(t,s)R_1(s)x(s)ds \right\| \leq \overline{M}\,\overline{C}\delta\left(1 + \frac{1}{1-e^{-\overline{\beta}}}\right) \sup_{s\in \bar{l}_{n-1}} \|x(s)\|.$$

Последний интеграл по норме не превосходит величины

$$\overline{C}\delta\left(1 + \frac{1}{1-e^{-\overline{\beta}}}\right) \sup_{s\in \bar{l}_{n-1}} \|x(s)\|.$$

Наконец, рассмотрим второй интеграл в правой части равенства (55). Ввиду того, что $t-\tau$ принадлежит как полуинтервалу $\bar{l}_{n-1} : t \leq h_{n-1} - \tau$, так и полуинтервалу $\bar{l}_n$, этот интеграл по норме не превосходит величины

$$\overline{C}\delta(1+\overline{M})\left(1 + \frac{1}{1-e^{-\overline{\beta}}}\right) \sup_{s\in \bar{l}_{n-1}} \|x(s)\|. \quad (56)$$

Таким образом, совокупность "возмущенных" слагаемых по норме не превосходит удвоенной оценки (56). Решение невозмущенной системы $\overline{x}(t)$ удовлетворяет оценке (44). Тогда, как показано в [10], при выполнении неравенства

$$2C_0\overline{C}\delta(1+\overline{M})\left(1 + \frac{1}{1-e^{-\overline{\beta}}}\right) < \mu^{\beta_0} - \mu^{2\beta_0},$$

а также соотношения (48), которое достигается при достаточно малом $\delta > 0$, решение $x(t)$ возмущенной системы (42) также асимптотически устойчиво, причем для данного решения справедлива оценка, аналогичная оценке (44). □

Замечание. При доказательстве леммы 2 и теоремы начальные моменты $h > 0$, $t_0 > 0$ предполагались достаточно большими. Тем не менее, результаты данных утверждений верны и в случае, когда начальный момент $t_0 > 0$ не является большим, поскольку всегда возможен перенос начальной точки в сторону возрастающих значений аргумента ([11], с. 36).

Литература

1. Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Мир, 1967. – 548 с.
2. Крупнова Н.И., Шиманов С.Н. *Признак устойчивости линейных систем с переменными коэффициентами и с запаздыванием по времени* // ПММ. – 1972. – Т. 36. – № 3. – С. 533–536.
3. Гребенщиков Б.Г., Рожков В.И. *Асимптотическое поведение решения одной стационарной системы с запаздыванием* // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т.29. – № 5. – С. 271–278.
4. Шиманов С.Н. *Устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами и запаздыванием.* – Свердловск: Изд-во Уральск. ун-та, 1983. – 65 с.
5. Летов А.М. *Динамика полета и управление.* – М.: Наука, 1969. – 256 с.

6. Митропольский Ю.А. *Метод усреднения в нелинейной механике.* – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
7. Халанай А., Векслер Д. *Качественная теория импульсных систем.* – М.: Мир, 1971. – 310 с.
8. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости.* – М.: Наука, 1966. – 576 с.
9. Хейл Дж. *Асимптотическое поведение решений дифференциально-разностных уравнений* // Тр. международн. симпозиума по нелинейным колебаниям. – Киев, 1961. – Т. 2. – С. 409–426.
10. Гребенщиков Б.Г. *О почти периодических решениях одной нестационарной системы с линейным запаздыванием* // Сиб. матем. журн. – 1999. – Т. 40. – № 3. – С. 531–537.
11. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.* – М.: Наука, 1971. – 296 с.

Уральский государственный университет

Поступила
27.05.2004