

M.A. АКИВИС, B.B. ГОЛЬДБЕРГ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТКАНЕЙ ТИПА ВЕРОНЕЗЕ

1. Введение

Понятие ткани Веронезе (коразмерности один) на n -мерном многообразии X^n было введено в работе [1] как естественный инвариант бигамильтоновой структуры коранга один.

В [2], [3] и [4] авторы определили ткани Веронезе произвольной коразмерности r , $r \geq 1$, на (nr) -мерном многообразии X^{nr} (см. также [5], [6] и [7], где рассматриваются эти и другие обобщения тканей Веронезе).

Прежде всего напомним определение тканей Веронезе коразмерности r на X^{nr} , данное в [6] и [4] (см. также [2] и [7]).

Пусть X^{nr} — дифференцируемое многообразие размерности nr . Предположим, что n распределений X_1, \dots, X_n коразмерности r заданы на X^{nr} системами $\{\bar{\omega}_1^i\}, \dots, \{\bar{\omega}_n^i\}$, $i = 1, \dots, r$, 1-форм, которые, вообще говоря, не являются вполне интегрируемыми. Если система уравнений

$$\omega^i(t) = \bar{\omega}_1^i + t\bar{\omega}_2^i + \dots + t^{n-1}\bar{\omega}_n^i = 0 \quad (1)$$

вполне интегрируема для любого вещественного числа t , то будем говорить, что на X^{nr} задана ткань Веронезе коразмерности r . Будем обозначать такие ткани символом $VW_t(n, r)$. Отметим, что множество слоений, определенных уравнениями (1), называется также кривой Веронезе слоений (ср. [6]).

В соответствии с введенными обозначениями можно сказать, что авторы работы [1] рассматривали ткани Веронезе $VW_t(n, 1)$, а авторы работ [2], [3] и [4] (см. также [6] и [7]) рассматривали ткани Веронезе $VW_t(n, r)$, $r \geq 1$.

В данной работе будут изучаться ткани, подобные тканям Веронезе (будем называть их тканями типа Веронезе, соответствующий английский термин — Veronese-like webs), для которых n распределений X_1, \dots, X_n коразмерности r заданы на X^{nr} системами $\{\bar{\omega}_1^i\}, \dots, \{\bar{\omega}_n^i\}$, $i = 1, \dots, r$, 1-форм, которые являются вполне интегрируемыми, и, кроме того, уравнение (1) является вполне интегрируемым для любой вещественной функции t .

Первой характерной чертой этих новых тканей является то, что слоения $\{\bar{\omega}_1^i = 0\}, \dots, \{\bar{\omega}_n^i = 0\}$ можно дополнить до координатной $(n+1)$ -ткани $W(n+1, n, r)$. Это позволит применять результаты работ [8]–[13].

Дадим теперь определение таких тканей.

Имеем n множества вполне интегрируемых 1-форм $\{\bar{\omega}_\alpha^i\}$, $\alpha = 1, \dots, n$, т. е.

$$d\bar{\omega}_\alpha^i \wedge \bar{\omega}_\alpha^1 \wedge \dots \wedge \bar{\omega}_\alpha^r = 0.$$

Слоения X_1, \dots, X_n могут быть дополнены до $(n+1)$ -ткани $W(n+1, n, r)$ посредством добавления дополнительного слоения X_{n+1} , определенного вполне интегрируемой системой форм $\{\omega_{n+1}^i\}$. Поскольку формы $\bar{\omega}_1^i, \dots, \bar{\omega}_n^i$ образуют кобазис на X^{nr} , то формы $-\omega_{n+1}^i$ являются линейными комбинациями форм $\bar{\omega}_1^i, \dots, \bar{\omega}_n^i$:

$$-\omega_{n+1}^i = p_{1j}^j \bar{\omega}_1^j + \dots + p_{nj}^j \bar{\omega}_n^j,$$

где матрицы $(p_{1j}^i), \dots, (p_{nj}^i)$ невырождены. Определим новый кобазис на X^{nr}

$$\omega_1^i = p_{1j}^i \bar{\omega}_1^j, \dots, \omega_n^i = p_{nj}^i \bar{\omega}_n^j.$$

Тогда указанное выше уравнение сводится к

$$-\omega_{n+1}^i = \omega_1^i + \cdots + \omega_n^i.$$

Отметим, что слоения $\{\omega_1^i = 0\}, \dots, \{\omega_n^i = 0\}$ — те же самые, что и слоения $\{\bar{\omega}_1^i = 0\}, \dots, \{\bar{\omega}_n^i = 0\}$.

Определение 1. Если система уравнений

$$\omega^i(t) = \omega_1^i + t\omega_2^i + \cdots + t^{n-1}\omega_n^i = 0 \quad (2)$$

вполне интегрируема для любой вещественной гладкой функции $t(x)$, $x \in X^{nr}$, то будем говорить, что на X^{nr} задана ткань типа Веронезе коразмерности r с голономной координатной тканью $W(n+1, n, r)$.

Такую ткань будем обозначать символом $VLW_t(n, r)$. Таким образом, ткань типа Веронезе $VLW_t(n, r)$ с голономной координатной тканью является множеством слоений, определенных уравнениями (2).

Пример 1. Распределения, определенные 1-формами $\omega_1 = xdx$, $\omega_2 = ydy$ и $\omega_3 = ydx + (x+z)dy + dz$ не порождают ткань типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$, поскольку 1-форма ω_3 не является вполне интегрируемой. Однако те же самые формы порождают ткань Веронезе $VW_t(3, 1)$.

Отметим, что условие полной интегрируемости системы форм $\omega^i(t)$ имеет вид

$$d\omega^i(t) \wedge \omega^1(t) \wedge \cdots \wedge \omega^r(t) = 0. \quad (3)$$

Эти условия должны выполняться для любой вещественной функции $t(x)$, $x \in X^{nr}$.

Взяв d различных слоений из семейства (2), получим d -ткань-представитель ткани типа Веронезе $VLW_t(n, r)$. Таким образом, d -ткань-представитель является d -тканью $W(d, n, r)$, образованной d слоениями на X^{nr} из множества (2) (см. [14], [9] для $n = 2$ и [11]–[13] для $n \geq 2$).

Определение 2. $(n+1)$ -ткань $W(n+1, n, r)$ называется параллелизуемой, если она может быть отображена на $(n+1)$ -ткань, образованную $n+1$ слоениями параллельных $(n-1)r$ -плоскостей (nr) -мерного аффинного пространства \mathbb{A}^{nr} . Ткань типа Веронезе $VLW_t(n, r)$ называется параллелизуемой, если все ее $(n+1)$ -ткани-представители являются параллелизуемыми.

Сделаем несколько замечаний, относящихся к сформулированным определениям.

1. Только три слоения координатной $(n+1)$ -ткани $W(n+1, n, r)$, а именно, слоения $\{\omega_1^i = 0\}$, $\{\omega_n^i = 0\}$ и $\{\omega_{n+1}^i = 0\}$, принадлежат семейству слоений (2). Они соответствуют значениям $t = 0, \infty, 1$. Отсюда следует, что если $n > 2$, то координатная $(n+1)$ -ткань $W(n+1, n, r)$ не является $(n+1)$ -тканью-представителем ткани типа Веронезе $VLW_t(n, r)$. Только координатная 3-ткань $W(3, 2, r)$ является 3-тканью-представителем ткани типа Веронезе $VLW_t(2, r)$, которую ткань $W(3, 2, r)$ порождает.

2. По определению 2 ткань типа Веронезе $VLW_t(n, r)$ не является параллелизуемой, если хотя бы одна $(n+1)$ -ткань-представитель ткани $VLW_t(n, r)$ не является параллелизуемой.

3. Левая часть условия (3) является полиномом степени $(n+1)(n-1)$ относительно t . Для того чтобы условие (3) выполнялось для произвольной вещественной функции $t(x)$, $x \in X^{nr}$, необходимо и достаточно, чтобы все n^2 коэффициентов этого полинома обращались в нуль. Кроме этих n^2 условий появятся другие условия, вытекающие из того, что внешние произведения форм $\omega_1^i, \dots, \omega_n^i$ являются линейно независимыми.

4. В определении 1 координатной $(n+1)$ -тканью ткани $VLW_t(n, r)$ является ткань $W(n+1, n, r)$, определяемая $n+1$ слоением $\{\omega_1^i = 0\}, \dots, \{\omega_n^i = 0\}, \{\omega_{n+1}^i = 0\}$. В результате получаем дифференциальные следствия условий (2), выраженные в терминах тензора кручения координатной ткани $W(n+1, n, r)$.

При изучении дифференциальной геометрии тканей типа Веронезе $VLW_t(n, r)$ следует рассматривать только такие свойства ткани $VLW_t(n, r)$, которые выполняются для всех тканей-представителей ткани $VLW_t(n, r)$.

Ткани типа Веронезе $VLW_t(2, r)$ на X^{2r} впервые рассматривались еще в 1974 г. в работе [8] (см. также [9], § 3.2) под названием *изоклинные подмногообразия изоклиновых 3-тканей*. Более того, специальный класс тканей Веронезе $VW_t(2, r)$ с голономными координатными тканями на X^{2r} , изоклиновые подмногообразия так называемых паратактических (или изоклинико-геодезических) 3-тканей, рассматривался в [14] (см. также [9], § 3.5) в 1969 г.

Если в определении 1 $t = \text{const}$, то соответствующая ткань типа Веронезе $VLW_t(n, r)$ представляет собой специальный случай тканей Веронезе $VW_t(n, r)$, характеризуемых тем, что распределения $\{\omega_1^i = 0\}, \dots, \{\omega_n^i = 0\}$ являются интегрируемыми.

Имеются следующие возможности для данной координатной ткани $W(n+1, n, r)$.

- (a) Не существует семейства вещественных функций t , для которых уравнение (1) является вполне интегрируемым. Примером может служить ткань $W(4, 3, 1)$, определяемая уравнением $u = (x+y)z$ (см. пример 5 в § 6 данной работы), которая не порождает ткань типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$.
- (b) Система уравнений (1) является вполне интегрируемым для любой непостоянной вещественной функции $t(x)$, $x \in X^{nr}$. В этом случае ткань $W(n+1, n, r)$ порождает ткань типа Веронезе $VLW_t(n, r)$, которая не является тканью Веронезе $VW_t(n, r)$. Приведем примеры.
 - Любая изоклиновая ткань $W(3, 2, r)$ порождает ткань типа Веронезе $VLW_t(2, r)$ (см. § 6). Частный случай такой ткани рассматривается в примере 2 из § 2.3.
 - Ткань $W(4, 3, 1)$ с a и b , не обращающимися в нуль одновременно, рассматриваемая в § 6, порождает ткань типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$. Конкретный пример такой ткани $VLW(3, 1)$ с координатной тканью $W(4, 3, 1)$, определяемой уравнением $u = x + y + z + yz$, рассматривается в примере 4 из § 6.
- (c) Система уравнений (1) является вполне интегрируемым для любого постоянного вещественного числа t . В этом случае ткань $W(n+1, n, r)$ порождает ткань Веронезе $VW_t(n, r)$ с голономной координатной тканью $W(n+1, n, r)$. Приведем примеры.
 - Паратактическая (в частности, параллелизуемая) ткань $W(3, 2, r)$ порождает ткань Веронезе $VW_t(2, r)$ (см. § 3).
 - Параллелизуемая ткань $W(n+1, n, r)$, $n > 2$, $r \geq 1$, порождает ткань Веронезе $VW_t(n, r)$ (см. § 5–7).

В этой работе известные результаты, касающиеся дифференциальной геометрии изоклиновых три-тканей $W(3, 2, r)$, представлены как дифференциально-геометрические свойства тканей типа Веронезе $VLW_t(2, r)$. Показано, как эти свойства могут быть использованы для решения некоторых задач, относящихся к тканям типа Веронезе. Например, используя эти свойства, можно доказать гипотезу Захаревича для тканей типа Веронезе $VLW_t(2, r)$: достаточно проверить, что система (2) является вполне интегрируемой для четырех различных вещественных функций t для того, чтобы эта система оказалась вполне интегрируемой для произвольной вещественной функции $t(x)$, $x \in X^{nr}$. Отметим, что гипотеза Захаревича была поставлена в [15] (см. также [5]) и разрешена в [6] для тканей Веронезе $VW_t(n, r)$ (см. также [7]). Отметим, что гипотеза Захаревича для тканей типа Веронезе $VLW_t(n, r)$ при $n > 2$ может быть доказана аналогичным образом.

В работе доказано, что, за исключением случаев $n = 2$, r произвольно и $n = 3$, $r = 1$, координатная ткань $W(n+1, n, r)$ порождает ткань типа Веронезе $VLW_t(n, r)$ тогда и только тогда, когда ткань $W(n+1, n, r)$ (следовательно, и сама ткань $VLW_t(n, r)$) является плоской (параллелизуемой) (см. теоремы 7, 8, 16 и 17). Если $n > 2$, то единственными неплоскими (непараллелизуемыми) тканями, которые порождают ткани типа Веронезе, являются 4-ткани $W(4, 3, 1)$ (см. теоремы 9 и 10). В общем случае они порождают непараллелизуемые ткани типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$ (см. следствие 4). Существование непараллелизуемых тканей типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$ установлено в теореме 13. Отметим, что во всех случаях, когда ткань типа Веронезе $VLW_t(n, r)$ параллелизуема, эта ткань является тканью Веронезе $VW_t(n, r)$ с голономной координатной тканью.

2. Ткани типа Веронезе $VLW_t(2, r)$

2.1. Структурные уравнения $(n+1)$ -ткани $W(n+1, n, r)$. $(n+1)$ -ткань $W(n+1, n, r)$ коразмерности r на дифференцируемом многообразии X^{nr} размерности nr образуется $n+1$ слоением $\{\omega_1^i = 0\}, \dots, \{\omega_n^i = 0\}$ и $\{\omega_1^i + \dots + \omega_n^i = 0\}$ коразмерности r (см. [11], [12] или [13], § 1.2 для случая $n \geq 2$; [14] или [9], § 1.3 для случая $n = 2$, а также [10]).

Формы ω_α^i , $\alpha = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, r$, удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega_\alpha^i = \omega_\alpha^j \wedge \theta_j^i + \sum_{\beta \neq \alpha} a_{jk}^i [\alpha, \beta] \omega_\alpha^j \wedge \omega_\beta^k, \quad (4)$$

где

$$a_{jk}^i [\alpha, \beta] = a_{kj}^i [\beta, \alpha], \quad (5)$$

$$\sum_{(\alpha, \beta)} a_{(jk)}^i [\alpha, \beta] = 0. \quad (6)$$

Формы θ_j^i определяют аффинную связность Γ_{n+1} на многообразии X^{nr} (см. [11]–[13], § 1.2 или [10]). Они удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\theta_j^i - \theta_j^k \wedge \theta_k^i = \sum_{\alpha, \beta=1}^n b_{jkl}^i [\alpha, \beta] \omega_\alpha^k \wedge \omega_\beta^l \quad (7)$$

(см. [11]–[13], § 1.2 или [10]).

Величины $\{a_{jk}^i [\alpha, \beta]\}$ и $\{b_{jkl}^i [\alpha, \beta]\}$ в (4) и (7) образуют тензоры. Эти тензоры называются соответственно *тензором кручения* и *тензором кривизны* ткани $W(n+1, n, r)$.

Тензоры $\{a_{jk}^i [\alpha, \beta]\}$ и $\{b_{jkl}^i [\alpha, \beta]\}$ удовлетворяют некоторым соотношениям, из которых отметим следующее:

$$b_{jkl}^i [\alpha, \beta] = \frac{1}{2} (a_{jkl}^i [\gamma, \alpha, \beta] - a_{ljk}^i [\beta, \gamma, \alpha]), \quad \gamma \neq \alpha, \beta, \quad (8)$$

где $a_{jkl}^i [\alpha, \beta, \gamma]$ — ковариантные производные тензора $a_{jk}^i [\alpha, \beta]$ в связности Γ_{n+1} .

Уравнения (8) показывают, что если $n > 2$, то тензор кривизны ткани $W(n+1, n, r)$ выражается через ковариантные производные тензора кручения и сам тензор кручения. Это не имеет места в случае $n = 2$, поскольку в формулах (8) $\gamma \neq \alpha, \beta$.

Вышеуказанное свойство имеет следующий геометрический смысл: *если тензор кручения ткани $W(n+1, n, r)$, $n > 2$, обращается в нуль, т. е. $a_{jk}^i [\alpha, \beta] = 0$, то ткань $W(n+1, n, r)$ является параллелизуемой*, т. е. она может быть отображена на $(n+1)$ -ткань, образованную $n+1$ слоением, каждое из которых состоит из параллельных $(n-1)r$ -плоскостей аффинного пространства \mathbb{A}^{nr} .

2.2. Структурные уравнения 3-ткани $W(3, 2, r)$. Если $n = 2$, т. е. в случае 3-ткани $W(3, 2, r)$, структурные уравнения (4) и (7) могут быть записаны соответственно в виде

$$d\omega_1^i = \omega_1^j \wedge \bar{\theta}_j^i + a_{jk}^i \omega_1^j \wedge \omega_1^k, \quad d\omega_2^i = \omega_2^j \wedge \bar{\theta}_j^i - a_{jk}^i \omega_2^j \wedge \omega_2^k, \quad (9)$$

$$d\bar{\theta}_j^i - \bar{\theta}_j^k \wedge \bar{\theta}_k^i = b_{jkl}^i \omega_1^k \wedge \omega_2^l, \quad (10)$$

где

$$\bar{\theta}_j^i = \theta_j^i + a_{jk}^i \omega_2^k - a_{jk}^i \omega_1^k \quad (11)$$

— 1-формы, определяющие новую связность $\bar{\Gamma}_3$ (так называемую *связность Чжсения*), $a_{jk}^i = -a_{kj}^i = a_{[jk]}^i [1, 2]$ — тензор кручения ткани $W(3, 2, r)$ и b_{jkl}^i — ее тензор кривизны. Эти два тензора связаны соотношением

$$b_{[jkl]}^i = 2a_{[jk]}^m a_{|m|l}^i; \quad (12)$$

скобки здесь означают альтернацию по индексам j , k и l . Например,

$$b_{[jkl]}^i = \frac{1}{6}(b_{jkl}^i + b_{klj}^i + b_{ljk}^i - b_{kjl}^i - b_{jlk}^i - b_{lkj}^i).$$

Соотношения (12) являются обобщенными тождествами Якоби (см. [14], [9], § 1.4 или [13], § 1.2).

Ткань $W(3, 2, r)$ параллелизуема тогда и только тогда, когда ее тензоры кручения и кривизны обращаются в нуль, т. е. когда $a_{jk}^i = 0$ и $b_{jkl}^i = 0$ (см. [9], с. 18–19).

2.3. Определение и аналитическая характеристика тканей типа Веронезе $VLW_t(2, r)$.

Приведем определение тканей типа Веронезе $VLW_t(2, r)$ на X^{2r} , данное в [8] (см. также [9], §3.2).

Рассмотрим 3-ткань $W(3, 2, r) \subset X^{2r}$ и определим ее изоклиновые подмногообразия. Такое подмногообразие V^r имеет размерность (или коразмерность) r и определяется уравнениями

$$\omega_1^i + t\omega_2^i = 0, \quad (13)$$

где t — функция (в общем случае непостоянная).

Отметим, что в [8] и [9] (§ 3.2) рассматривалась система $\omega_2^i + t\omega_1^i = 0$. Авторы используют запись (13) для того, чтобы изложение имело единообразный характер и было согласовано с (2). Очевидно, что уравнение (13) является частным случаем уравнения (2), соответствующим $n = 2$.

Если через любую точку ткани $W(3, 2, r)$ проходит однопараметрическое семейство изоклиновых подмногообразий V^r , то ткань называется *изоклиновой*. Подмногообразия V^r называются *изоклиновыми подмногообразиями* ткани $W(3, 2, r)$.

Из определения изоклиновых 3-тканей и определения 1 тканей типа Веронезе следует, что множество слоений (13) является тканью типа Веронезе $VLW_t(2, r)$. Это означает, что *множество изоклиновых подмногообразий изоклиновой 3-ткани $W(3, 2, r)$, рассмотренное в [8]* (см. также [9], § 3.2) является тканью типа Веронезе $VLW_t(2, r)$.

Для нахождения аналитической характеристики изоклиновых тканей $W(3, 2, r)$ нужно найти необходимые и достаточные условия полной интегрируемости системы уравнений (13). В соответствии с (9) и (13) внешнее дифференцирование уравнений (13) дает

$$(t^2 - t)a_{jk}^i \omega_2^j \wedge \omega_2^k + dt \wedge \omega_2^i = 0. \quad (14)$$

Из этих уравнений следует, что на подмногообразии V^r дифференциал dt является линейной комбинацией базисных форм ω_2^i . Предположим, что подмногообразие V^r не является слоем ткани $W(3, 2, r)$. Тогда $t \neq 0, \infty, 1$, и можно положить

$$\frac{dt}{t - t^2} = a_k \omega_2^k. \quad (15)$$

Используя это уравнение, перепишем уравнение (14) в виде

$$(a_{jk}^i - \delta_k^i a_j) \omega_2^j \wedge \omega_2^k = 0.$$

На V^r левая часть последнего уравнения должна тождественно равняться нулю. Отсюда следует, что во всех точках подмногообразия V^r удовлетворяются уравнения

$$a_{jk}^i = a_{[j} \delta_{k]}^i. \quad (16)$$

Отметим, что если $r = 2$, то тензор кручения всегда можно записать в виде (16). Поэтому в дальнейшем будем различать случаи $r = 2$ и $r > 2$.

Рассмотрим теперь 3-ткань $W(3, 2, r)$ с тензором кручения вида (16). Структурные уравнения такой ткани могут быть записаны в виде

$$d\omega_1^i = \omega_1^j \wedge \bar{\theta}_j^i + a_j \omega_1^j \wedge \omega_1^i, \quad d\omega_2^i = \omega_2^j \wedge \bar{\theta}_j^i - a_j \omega_2^j \wedge \omega_2^i. \quad (17)$$

Легко показать (см. [8] или [9], § 3.2), что дифференциальное продолжение системы (17) имеет вид

$$da_j - a_k \bar{\theta}_j^k = p_{jk} \omega_1^k + q_{jk} \omega_2^k, \quad (18)$$

$$d\bar{\theta}_j^i - \bar{\theta}_j^k \wedge \bar{\theta}_k^i = b_{jkl}^i \omega_1^k \wedge \omega_2^l. \quad (19)$$

Величины b_{jkl}^i , p_{jk} и q_{jk} связаны соотношениями

$$b_{[jk]l}^i = q_{l[j} \delta_{k]}^i, \quad b_{[j|l|k]}^i = p_{l[j} \delta_{k]}^i, \quad (20)$$

а при $r > 2$ имеются дополнительные соотношения

$$p_{jk} = p_{kj}, \quad q_{jk} = q_{kj}. \quad (21)$$

Справедлива

Теорема 1 (ср. [9], с. 112, теорема 3.8). 3-ткань $W(3, 2, r)$, $r > 2$, является изоклинной тогда и только тогда, когда ее тензор кручения имеет специальное строение (16).

Доказательство. Действительно, если существует хотя бы одно изоклинное подмногообразие, проходящее через точку p , то, как было показано выше, тензор кручения этой ткани имеет строение (16) в точке p .

Обратно, пусть тензор кручения ткани $W(3, 2, r)$ имеет вид (16). Тогда при $r > 2$, в общем случае, соотношения (21) не имеют места. Рассмотрим систему уравнений (13) и (15) на X^{2r} . В соответствии с (16) и (21) эта система вполне интегрируема. Поэтому она определяет $(r+1)$ -параметрическое семейство изоклинных подмногообразий. Более того, через любую точку многообразия X^{2r} проходит однопараметрическое семейство изоклинных подмногообразий, определяемых различными значениями параметра t . Таким образом, ткань $W(3, 2, r)$ является изоклинной. \square

Рассмотрим теперь случай $r = 2$. Как было отмечено ранее, в этом случае тензор кручения произвольной ткани $W(3, 2, 2)$ всегда может быть записан в виде (16). Однако в общем случае соотношения (21) не выполняются. Таким образом, при $r = 2$ соответствующая теорема может быть сформулирована следующим образом (ср. [9], с. 113, теорема 3.9).

Теорема 2. Пусть на четырехмерном многообразии X^4 задана 3-ткань $W(3, 2, 2)$. Тогда тензор кручения этой ткани можно записать в виде (16). Ткань $W(3, 2, 2)$ является изоклинной тогда и только тогда, когда ковариантная производная ковектора a_i симметрична.

Таким образом, изоклинная 3-ткань $W(3, 2, r)$ порождает 3-ткань типа Веронезе $VLW_t(2, r)$, определяемую множеством слоений (13). Более того, сама ткань $W(3, 2, r)$ является одной из 3-тканей-представителей ткани типа Веронезе $VLW_t(2, r)$. Слоения ткани $W(3, 2, r)$ можно получить из множества (13), полагая $t = 0, \infty, 1$.

Теорема 3. Тензор кручения каждой 3-ткани-представителя ткани типа Веронезе $VLW_t(2, r)$, порождаемой 3-тканью $W(3, 2, r)$, имеет то же самое строение, что и тензор кручения ткани $W(3, 2, r)$.

Доказательство. Рассмотрим 3-ткань-представитель ткани типа Веронезе $VLW_t(2, r)$, определяемую тремя слоениями $\sigma_1^i = 0$, $\sigma_2^i = 0$, $\sigma_3^i = -\omega^i(1) = -\sigma_1^i - \sigma_2^i = 0$, где

$$\sigma_1^i = -\omega_1^i - t\omega_2^i, \quad \sigma_2^i = \omega_1^i + s\omega_2^i. \quad (22)$$

Из уравнений (22) следует

$$\omega_1^i = \frac{1}{t-s}(s\sigma_1^i + t\sigma_2^i), \quad \omega_2^i = -\frac{1}{t-s}(\sigma_1^i + \sigma_2^i). \quad (23)$$

Ковариантные дифференциалы форм (22) имеют вид

$$d\sigma_1^i = \sigma_1^j \wedge \bar{\theta}_j^i - a_j \omega_1^j \wedge \omega_1^i - dt \wedge \omega_2^i + ta_j \omega_2^j \wedge \omega_2^i. \quad (24)$$

Поскольку система уравнений $\sigma_1^i = 0$ вполне интегрируема, из (24) следует

$$\frac{dt}{t-s} = u_j \omega_1^j + v_j \omega_2^j. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24) и применяя (23), получим

$$d\sigma_1^i = \sigma_1^j \wedge \bar{\theta}_j^i + \frac{1}{(t-s)^2} [-a_j(s\sigma_1^j + t\sigma_2^j) \wedge (s\sigma_1^i + t\sigma_2^i) + t(1-t)u_j(s\sigma_1^j + t\sigma_2^j) \wedge (\sigma_1^i + \sigma_2^i) + t(a_j - (1-t)v_j)(\sigma_1^j + \sigma_2^j) \wedge (\sigma_1^i + \sigma_2^i)]. \quad (26)$$

Но уравнение $\sigma_1^i = 0$ должно быть вполне интегрируемым. Следовательно, коэффициент при $\sigma_2^j \wedge \sigma_2^i$ в уравнении (26) должен равняться нулю:

$$\frac{t(1-t)}{(t-s)^2}(a_j - v_j + tu_j) = 0.$$

Поскольку слоение $\sigma_1^i = 0$ отлично от слоений $\omega_1^i = 0$ и $\omega_3^i = 0$, то

$$v_j = a_j + tu_j. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (26), получим

$$d\sigma_1^i = \sigma_1^j \wedge \left\{ \bar{\theta}_j^i + \frac{1}{t-s} [(ta_j - t(1-t)u_j)\sigma_2^i - \delta_j^i ta_k \sigma_2^k] \right\} + \frac{1}{t-s} [(s+t)a_j - t(1-t)u_j] \delta_k^i \sigma_1^j \wedge \sigma_1^k. \quad (28)$$

Аналогичным образом находится выражение

$$d\sigma_2^i = \sigma_2^j \wedge \left\{ \bar{\theta}_j^i + \frac{1}{s-t} [-(sa_j - s(1-s)u_j)\sigma_1^i + \delta_j^i sa_k \sigma_1^k] \right\} + \frac{1}{s-t} [s(1-s)u_j - (s+t)a_j] \delta_k^i \sigma_2^j \wedge \sigma_2^k. \quad (29)$$

Уравнения (28) и (29) можно записать в виде

$$d\sigma_1^i = \sigma_1^j \wedge \sigma_1^i + [a_{[j} - (1-s-t)u_{[j}]\delta_k^{i]} \sigma_1^j \wedge \sigma_1^k, \quad (30)$$

$$d\sigma_2^i = \sigma_2^j \wedge \sigma_2^i - [a_{[j} - (1-s-t)u_{[j}]\delta_k^{i]} \sigma_2^j \wedge \sigma_2^k, \quad (31)$$

где

$$\sigma_j^i = \bar{\theta}_j^i + \frac{1}{t-s} \{ [t(a_j - (1-t)u_j)\delta_k^i \sigma_2^k - \delta_j^i ta_k \sigma_2^k] + [s(a_j - (1-s)u_j)\delta_k^i \sigma_1^i - \delta_j^i sa_k \sigma_1^k] \}. \quad (32)$$

Сравнение уравнений (30), (31) и (32) с уравнениями (17) и (16) показывает, что форма σ_j^i является формой связности Чженя 3-ткани, определяемой слоениями $\sigma_1^i = 0$, $\sigma_2^i = 0$, $\sigma_3^i = -\sigma_1^i - \sigma_2^i = 0$, а тензор кручения этой 3-ткани имеет вид

$$c_{jk}^i = [a_{[j} - (1-s-t)u_{[j}]\delta_k^{i]}. \quad \square \quad (33)$$

Из уравнения (33) и теоремы 3 вытекает

Следствие 1. Все 3-ткани-представители ткани типа Веронезе $VLW_t(2, r)$, $r > 2$, являются изоклинными.

Отметим, что если $r = 2$, то тензор кручения c_{jk}^i 3-ткани-представителя ткани $VW_t(2, 2)$ всегда может быть записан в виде $c_{jk}^i = c_{[j}\delta_{k]}^i$. Так же, как для ткани $W(3, 2, 2)$, имеем $dc_j - c_k\sigma_j^k = r_{jk}\omega_1^k + s_{jk}\omega_2^k$, где r_{jk} и s_{jk} не обязательно симметричны по j и k .

Тем же самым способом, как это было осуществлено для нахождения условий изоклининости ткани $W(3, 2, 2)$, можно доказать

Следствие 2. Все 3-ткани-представители ткани типа Веронезе $VLW_t(2, 2)$ являются изоклиническими тогда и только тогда, когда ковариантные производные r_{jk} и s_{jk} ковектора c_i симметричны: $r_{jk} = r_{kj}$, $s_{jk} = s_{kj}$.

Комбинированием предыдущих результатов, получается

Теорема 4. 3-ткань $W(3, 2, r)$, $r \geq 2$, порождает ткань типа Веронезе $VLW_t(2, r)$ тогда и только тогда, когда она является изоклинической. Ткань типа Веронезе $VLW_t(2, r)$ при этом сама является изоклинической.

Следствие 3. Ткань типа Веронезе $VLW_t(2, r)$ не является параллелизуемой.

Доказательство. Изоклиническая 3-ткань параллелизуема тогда и только тогда, когда ее тензоры кручения и кривизны обращаются в нуль, т. е. если $a_i = 0$ и $b_{jkl}^i = 0$, где b_{jkl}^i — тензор кривизны 3-ткани (см. конец §2.2). Таким образом, в общем случае все 3-ткани-представители ткани типа Веронезе $VLW_t(2, r)$ не являются параллелизуемыми. Поэтому по определению 2 ткань типа Веронезе $VLW_t(2, r)$ непараллелизуема. \square

Пример 2. Рассмотрим ткань $W(3, 2, 2)$, определенную уравнениями

$$u_1 = (x_1 + y_1)(x_2 - y_2), \quad u_2 = x_2 + y_2$$

([9], с. 133, задача 6). Для этой ткани

$$du_1 = (x_2 - y_2)dx_1 + (x_1 + y_1)dx_2 + (x_2 - y_2)dy_1 - (x_1 + y_1)dy_2, \quad du_2 = dx_2 + dy_2.$$

Возьмем $\omega_1^1 = (x_2 - y_2)dx_1 + (x_1 + y_1)dx_2$, $\omega_1^2 = dx_2$, $\omega_2^1 = (x_2 - y_2)dy_1 - (x_1 + y_1)dy_2$, $\omega_2^2 = dy_2$, $\omega_3^i = -du_i$, $i = 1, 2$. Из последнего уравнения следует $d\omega_3^i = 0$. С другой стороны, из структурных уравнений (4) при $n = 2$ следует $d\omega_3^i = \omega_3^j \wedge \theta_j^i$. Отсюда $\omega_3^j \wedge \theta_j^i = 0$. В результате получаем $\theta_j^i = L_{jk}^i \omega_3^k = -L_{jk}^i (\omega_1^k + \omega_2^k)$, где $L_{jk}^i = L_{kj}^i$.

Далее, дифференцируя формы ω_1^i и ω_2^i и используя найденные выше выражения для форм θ_j^i , получаем структурные уравнения рассматриваемой ткани $W(3, 2, 2)$:

$$\begin{aligned} d\omega_1^1 &= \omega_1^j \wedge \theta_j^1 + \left(L_{12}^1 + \frac{1}{x_2 - y_2}\right) \omega_1^1 \wedge \omega_2^2 + \left(L_{12}^1 - \frac{1}{x_2 - y_2}\right) \omega_1^2 \wedge \omega_2^1 + \\ &\quad + \left(L_{22}^1 - \frac{2(x_1 + y_1)}{x_2 - y_2}\right) \omega_1^2 \wedge \omega_2^2 + L_{11}^1 \omega_1^1 \wedge \omega_2^1, \\ d\omega_1^2 &= \omega_1^j \wedge \theta_j^2 + L_{jk}^2 \omega_1^j \wedge \omega_2^k, \\ d\omega_2^1 &= \omega_2^j \wedge \theta_j^1 + \left(L_{12}^2 + \frac{1}{x_2 - y_2}\right) \omega_2^1 \wedge \omega_1^2 + \left(L_{12}^2 - \frac{1}{x_2 - y_2}\right) \omega_2^2 \wedge \omega_1^1 + \\ &\quad + \left(L_{22}^2 - \frac{2(x_1 + y_1)}{x_2 - y_2}\right) \omega_2^2 \wedge \omega_1^2 + L_{11}^2 \omega_2^1 \wedge \omega_1^1, \\ d\omega_2^2 &= \omega_2^j \wedge \theta_j^2 + L_{jk}^2 \omega_2^j \wedge \omega_1^k. \end{aligned}$$

Из формул (4) видно, что компоненты тензора кручения ткани $W(3, 2, 2)$ в связности Γ_3 имеют вид $a_{12}^1[1, 2] = a_{21}^1[2, 1] = L_{12}^1 + \frac{1}{x_2 - y_2}$, $a_{21}^1[1, 2] = a_{12}^1[2, 1] = L_{12}^1 - \frac{1}{x_2 - y_2}$, $a_{22}^1[1, 2] = a_{22}^1[2, 1] = L_{32}^1 - \frac{2(x_1 + y_1)}{x_2 - y_2}$, $a_{11}^1[1, 2] = a_{11}^1[2, 1] = L_{11}^1$, $a_{jk}^2[1, 2] = a_{jk}^2[2, 1] = L_{jk}^2$.

По формулам (11) находим формы связности $\bar{\theta}_j^i$ связности $\bar{\Gamma}_3$:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_1^1 &= -L_{11}^1(\omega_1^1 + \omega_2^1) - \left(L_{12}^1 + \frac{1}{x_2 - y_2}\right)\omega_1^2 + \left(-L_{12}^1 + \frac{1}{x_2 - y_2}\right)\omega_2^2, \\ \bar{\theta}_2^1 &= -L_{22}^1(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \left(L_{12}^1 + \frac{1}{x_2 - y_2}\right)\omega_1^1 + \left(-L_{12}^1 + \frac{1}{x_2 - y_2}\right)\omega_2^1, \\ \bar{\theta}_1^2 &= -L_{1k}^2(\omega_1^k + \omega_2^k), \quad \bar{\theta}_2^2 = -L_{2k}^2(\omega_1^k + \omega_2^k).\end{aligned}$$

В соответствии с § 2.2 компоненты тензора кручения ткани $W(3, 2, 2)$ в связности $\bar{\Gamma}_3$ имеют вид $a_{jk}^i = -a_{kj}^i = a_{[jk]}^i$ [1, 2]. Таким образом, для рассматриваемой ткани $W(3, 2, 2)$ выполняется $a_{12}^1 = \frac{1}{x_2 - y_2}$, $a_{12}^2 = a_{11}^i = a_{22}^i = 0$, $i = 1, 2$. Из (16) следует $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{2}{x_2 - y_2}$.

Используя выражения для форм $\bar{\theta}_j^i$ и a_i , а также формулы (18), получаем $p_{1k} = q_{1k} = a_2 L_{1k}^2$, $p_{21} = q_{21} = a_2 L_{12}^2$, $p_{22} = \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + a_2 L_{22}^2$, $q_{22} = \frac{\partial a_2}{\partial y_2} + a_2 L_{22}^2$. Отсюда $p_{jk} = p_{kj}$ и $q_{jk} = q_{kj}$. Следовательно, ткань $W(3, 2, 2)$ изоклиновая.

Уравнение (15) для этой ткани имеет вид

$$\frac{dt}{t(1-t)} = -\frac{2}{x_2 - y_2}.$$

Интегрируя его, получаем

$$t = \frac{(x_2 - y_2)g(x_1, x_2, y_1, C)}{x_2 - y_2},$$

где $g(x_1, x_2, y_1, C)$ — произвольная функция переменных x_1, x_2, y_1 и константы C .

3. Паратактические ткани Веронезе $PVW_t(2, r)$

Специальный класс 3-тканей $W(3, 2, r)$, так называемые паратактические 3-ткани $W(3, 2, r)$, рассматривался в [14] (см. также [9], § 3.5), где они назывались изоклиново-геодезическими.

3-ткань $W(3, 2, r)$ называется *паратактической*, если ее тензор кручения обращается в нуль: $a_{jk}^i = 0$. Нетрудно заметить, что это условие следует из аналитической характеристики (16) изоклиновых 3-тканей $W(3, 2, r)$ тогда и только тогда, когда $a_i = 0$.

Заметим, что если коразмерность $r=1$, т. е. в случае плоских тканей $W(3, 2, 1)$, всегда $a_{jk}^i=0$. Это означает, что *плоская ткань $W(3, 2, 1)$ всегда является паратактической и порождает ткань типа Веронезе $VW_t(2, 1)$* .

Для изоклиновых 3-тканей $W(3, 2, r)$ общего вида из уравнений (25) и (27) следует

$$\frac{dt}{t - t^2} = u_j(\omega_1^j + t\omega_2^j) + a_j\omega_2^j. \quad (34)$$

Для паратактических 3-тканей $W(3, 2, r)$ общего вида из (34) получим

$$\frac{dt}{t - t^2} = u_j(\omega_1^j + t\omega_2^j). \quad (35)$$

Из уравнений (34) и (35) вытекает

Предложение 1. Пусть 3-ткань $W(3, 2, r)$ изоклиновая. Тогда функция t постоянна на изоклиновых подмногообразиях ткани $W(3, 2, r)$ тогда и только тогда, когда изоклиновая 3-ткань $W(3, 2, r)$ является паратактической.

Доказательство. Действительно, если изоклиновая 3-ткань $W(3, 2, r)$ является паратактической, то $a_i = 0$, уравнение (34) превращается в уравнение (35), и $dt = 0$ на изоклиновых подмногообразиях $\omega_1^j + t\omega_2^j = 0$.

Обратно, если $t = \text{const}$ на изоклиновых подмногообразиях ткани $W(3, 2, r)$, определяемых уравнениями $\omega_1^j + t\omega_2^j = 0$, то из (34) следует $a_i = 0$. \square

По предложению 1 ткань типа Веронезе $V LW_t(2, r)$, порождаемая паратактической тканью $W(3, 2, r)$, является тканью Веронезе $VW_t(2, r)$.

Следствием уравнения (33) и теоремы 2 является

Предложение 2. *Если координатная 3-ткань $W(3, 2, r)$, $r \geq 1$, является паратактической 3-тканью общего вида, то 3-ткани-представители ткани Веронезе $VW_t(2, r)$, порожденной тканью $W(3, 2, r)$, не обязательно являются паратактическими.*

Однако имеется класс паратактических 3-тканей $W(3, 2, r)$, для которых 3-ткани-представители ткани Веронезе $VW_t(2, r)$, порожденной тканью $W(3, 2, r)$, являются паратактическими. Этот класс характеризуется условием $u_j = 0$.

Такие 3-ткани будем обозначать символом $PW(3, 2, r)$. Из (35) следует, что для тканей $PW(3, 2, r)$

$$dt = 0.$$

Именно такие 3-ткани $PW(3, 2, r)$ рассматривались в [14] еще в 1969 г.

Отметим, что параметр t имеет простой геометрический смысл, а именно, $\frac{1}{t}$ равняется сложному отношению четырех векторов, три из которых — касательные к слоям ткани $W(3, 2, r)$, проходящим через точку x , а четвертый — касательный к изоклинному подмногообразию V^r , определяемому уравнениями (13) и также проходящему через точку x . Заметим, что эти четыре вектора принадлежат бивектору, который называется трансверсальным бивектором. На паратактической ткани $PW(3, 2, r)$ это сложное отношение постоянно вдоль изоклинного подмногообразия V^r .

Определение 3. Ткань Веронезе $VW_t(2, r)$ называется *паратактической*, если все ее 3-ткани-представители являются паратактическими.

Такую ткань Веронезе будем обозначать символом $PVW_t(2, r)$.

Теорема 5. *Если координатная 3-ткань $W(3, 2, r)$ является паратактической 3-тканью $PW(3, 2, r)$, то ткань Веронезе $VW_t(2, r)$ является паратактической тканью $PVW_t(2, r)$.*

Доказательство. Действительно, для 3-ткани $PW(3, 2, r)$ выполняется $a_i = 0$ и $u_i = 0$. Теперь утверждение теоремы следует из (33). \square

Отметим, что паратактическая 3-ткань $PW(3, 2, r)$ порождает паратактическую ткань Веронезе $PVW_t(2, r)$ тогда и только тогда, когда система (13) вполне интегрируема для одного постоянного значения t , отличного от $0, 1, \infty$. Тогда эта система вполне интегрируема для любого другого постоянного t .

Заметим также, что для плоских тканей $W(3, 2, 1)$ структурные уравнения (9) и (10) принимают вид

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \theta, \quad d\omega_2 = \omega_2 \wedge \theta, \quad d\theta = K\omega_1 \wedge \omega_2,$$

где $\omega_1 = \omega_1^1$, $\omega_2 = \omega_2^1$, $\theta = \bar{\theta}_1^1$, а $K = b_{112}^1$ — кривизна ткани (ср. [9], с. 18). Этот случай был отмечен в [1].

В [14] (см. также [9], с. 129) была предпринята попытка доказать существование паратактических тканей $PW(3, 2, r)$ (и, следовательно, тканей Веронезе $PVW_t(2, r)$). Существование было доказано только в случае $r = 2$, т. е. для тканей $PW(3, 2, 2)$. Проблема существования тканей $PW(3, 2, r)$, $r > 2$ (и, следовательно, тканей Веронезе $PVW_t(2, r)$, $r > 2$) оставалась открытой до недавнего времени, когда существование тканей $PW(3, 2, r)$ было доказано В. В. Гольдбергом посредством построения серии примеров таких тканей. Этот результат будет опубликован в отдельной статье.

В работе [16] использованы контравариантные методы для доказательства некоторых результатов Акивиса для многомерных 3-тканей $W(3, 2, r)$ (см. [14], [9]). В частности, в [16] рассмотрены паратактические 3-ткани $PW(3, 2, r)$ (в [17] они названы 3-тканями без кручения) и

паратактические ткани Веронезе $PVW_t(2, r)$ без использования этого термина. В [16] также доказана гипотеза Захаревича для паратактических тканей Веронезе $PVW_t(2, r)$ в той форме, в которой она была доказана в [14] (см. также §8 данной статьи).

Пример 3. Рассмотрим ткань $W(3, 2, 2)$, определенную уравнениями (см. [17])

$$u_1 = x_1 + y_1, \quad u_2 = x_2 + y_2 - \frac{1}{2}(x_1)^2 y_1.$$

Для этой ткани $du_1 = dx_1 + dy_1$, $du_2 = dx_2 + dy_2 - x_1 y_1 dx_1 - \frac{1}{2}(x_1)^2 dy_1$. Возьмем $\omega_1^1 = dx_1$, $\omega_1^2 = -x_1 y_1 dx_1 + dx_2$, $\omega_2^1 = dy_1$, $\omega_2^2 = -\frac{1}{2}(x_1)^2 dy_1 + dy_2$. Из этих уравнений получаем $d\omega_1^1 = 0$, $d\omega_1^2 = x_1 \omega_1^1 \wedge \omega_2^1 = \omega_1^1 \wedge (x_1 \omega_1^1 + x_1 \omega_2^1)$, $d\omega_2^1 = 0$, $d\omega_2^2 = x_1 \omega_2^1 \wedge \omega_1^1 = \omega_2^1 \wedge (x_1 \omega_1^1 + x_1 \omega_2^1)$. Сравнивая последние уравнения с уравнениями (9), приходим к тому, что формы $\bar{\theta}_j^i$ связности $\bar{\Gamma}_3$ имеют вид $\bar{\theta}_1^1 = \bar{\theta}_2^2 = \bar{\theta}_2^1 = 0$, $\bar{\theta}_1^2 = x_1(\omega_1^1 + \omega_2^1)$ и что тензор кручения связности $\bar{\Gamma}_3$ обращается в нуль: $a_{jk}^i = 0$.

Дифференцируя формы связности $\bar{\theta}_j^i$, получаем $d\bar{\theta}_1^1 = d\bar{\theta}_2^2 = d\bar{\theta}_2^1 = 0$, $d\bar{\theta}_1^2 = \omega_1^1 \wedge \omega_2^1$.

Сравнивая эти уравнения со структурными уравнениями (10), приходим к тому, что компоненты тензора кривизны ткани $W(3, 2, 2)$ в связности $\bar{\Gamma}_3$ имеют вид

$$b_{1jk}^1 = b_{2jk}^1 = b_{2jk}^2 = 0, \quad j, k = 1, 2; \quad b_{112}^2 = b_{122}^2 = b_{121}^2 = 0, \quad b_{111}^2 = 1.$$

Таким образом, рассматриваемая ткань $W(3, 2, 2)$ паратактическая. Поэтому она порождает паратактическую ткань Веронезе $PW_t(2, 2)$.

4. Почти грассмановы структуры и ткани типа Веронезе $VLW_t(2, r)$

Со всякой 3-тканью $W(3, 2, r)$ ассоциирована почти грассманова структура $\mathbb{AG}(1, r+1)$, образованная полем конусов Сегре $C_x(2, r)$ (напр., [18] или [9], § 3.4).

Конус Сегре $C_x(2, r)$ несет на себе однопараметрическое семейство r -мерных плоских образующих и $(r-1)$ -параметрическое семейство двумерных плоских образующих. На X^{2r} r -мерные образующие конусов Сегре образуют $(2r+1)$ -параметрическое семейство, а двумерные образующие — $(3r-1)$ -параметрическое семейство.

Почти грассманова структура $\mathbb{AG}(1, r+1)$ называется r -полуинтегрируемой, если на X^{2r} имеется $(r+1)$ -параметрическое семейство r -мерных подмногообразий V^r , касательных к r -мерным образующим в каждой их точке, и каждая такая образующая касается одного и только одного подмногообразия V^r .

В работе [18] (см. также [9], § 3.4) было доказано, что изоклинность 3-ткани $W(3, 2, r)$ эквивалентна r -полуинтегрируемости почти грассмановой структуры $\mathbb{AG}(1, r+1)$, ассоциированной с тканью $W(3, 2, r)$.

Из этого и из следствия 1 получается

Теорема 6. 3-ткань $W(3, 2, r)$ порождает ткань типа Веронезе $VLW_t(2, r)$ тогда и только тогда, когда почти грассманова структура $\mathbb{AG}(1, r+1)$, ассоциированная с $W(3, 2, r)$, является r -полуинтегрируемой. Почти грассмановы структуры $\mathbb{AG}(1, r+1)$, ассоциированные с представителями ткани $VLW_t(2, r)$, также являются r -полуинтегрируемыми.

5. Ткани типа Веронезе $VLW_t(n, r)$, $n > 2$, $r > 1$

Теорема 7. $(n+1)$ -ткань $W(n+1, n, r)$, $n \geq 3$, $r > 1$, порождает ткань типа Веронезе $VLW_t(n, r)$ тогда и только тогда, когда ткань $W(n+1, n, r)$ является параллелизуемой.

Доказательство. Ткань $W(n+1, n, r)$ образована $n+1$ слоением $\{\omega_1^i = 0\}, \dots, \{\omega_n^i = 0\}$, $\{\omega_1^i + \dots + \omega_n^i = 0\}$ коразмерности r на многообразии X^{nr} . Для таких тканей имеют место уравнения (4)–(7).

Рассмотрим $(n-1)r$ -мерное слоение $\xi^{(n-1)r}$, определенное системой уравнений

$$\omega_1^i + \sum_{\alpha=2}^n t^{\alpha-1} \omega_\alpha^i = 0 \tag{36}$$

(ср. (2)). Ткань $W(n+1, n, r)$ порождает ткань типа Веронезе $VLW_t(n, r)$ тогда и только тогда, когда система (36) вполне интегрируема для произвольной вещественной функции t .

Внешнее дифференцирование системы уравнений (36) дает $d\omega_1^i + \sum_{\alpha=2}^n (\alpha - 1)t^{\alpha-2}dt \wedge \omega_\alpha^i + \sum_{\alpha=2}^n t^{\alpha-1}d\omega_\alpha^i = 0$. Из (4) следует

$$\sum_{\beta=2}^n a_{kl}^i[1, \beta]\omega_1^k \wedge \omega_\beta^l + \sum_{\alpha=2}^n (\alpha - 1)t^{\alpha-2}dt \wedge \omega_\alpha^i + \sum_{\alpha=2}^n t^{\alpha-1} \sum_{\beta \neq \alpha} a_{jk}^i[\alpha, \beta]\omega_\alpha^j \wedge \omega_\beta^k = 0. \quad (37)$$

Рассмотрим слой $V^{(n-1)r}$ слоения $\xi^{(n-1)r}$, определенного системой (36). Предположим, что этот слой не является слоем ткани $W(n+1, n, r)$. Тогда $t \neq 0, 1, \infty$, и из (37) следует, что на $V^{(n-1)r}$ выполняется

$$\frac{dt}{t(1-t)} = \sum_{\gamma=2}^n p_{\gamma k} \omega_\gamma^k. \quad (38)$$

Подставляя выражение для dt из (38) в (37), получим внешнее квадратичное уравнение. Члены этого уравнения с $\omega_\gamma^k \wedge \omega_\gamma^l$ и $\omega_\gamma^k \wedge \omega_\delta^l$, $\gamma \neq \delta$, линейно независимы. Предполагая, что $t \neq 0, 1$ и приравнивая нулю коэффициенты при $\omega_\gamma^k \wedge \omega_\gamma^l$ и $\omega_\gamma^k \wedge \omega_\delta^l$, получим уравнения

$$(1-t)(\gamma-1)p_{\gamma[k}\delta_{l]}^i + a_{[kl]}^i[1, \gamma](t^{\gamma-1}-1) = 0, \quad (39)$$

$$(\delta-1)t^{\delta-1}(1-t)p_{\gamma k}\delta_l^i - (\gamma-1)t^{\gamma-1}(1-t)p_{\delta l}\delta_k^i + t^{\delta-1}(1-t^{\gamma-1})a_{kl}^i[\gamma, 1] - t^{\gamma-1}(1-t^{\delta-1})a_{lk}^i[\delta, 1] + (t^{\gamma-1}-t^{\delta-1})a_{kl}^i[\gamma, \delta] = 0. \quad (40)$$

Полагая $\gamma = 2$ в уравнениях (39) и предполагая, что $t \neq 1$, получим

$$p_{2[k}\delta_{l]}^i + a_{[kl]}^i[1, 2] = 0. \quad (41)$$

Полагая $\gamma = 3, \dots, n$ в (39), получим уравнение, которое должно удовлетворяться тождественно по t . Приравнивая нулю коэффициент при $t^{\gamma-1}$, получим

$$a_{[kl]}^i[1, \gamma] = 0, \quad \gamma = 3, \dots, n. \quad (42)$$

Учитывая (42), из (40) также получим

$$p_{\gamma[k}\delta_{l]}^i = 0, \quad \gamma = 3, \dots, n. \quad (43)$$

Предполагая, что $r > 1$, и свертывая (43) по i и k , получим

$$p_{\gamma k} = 0, \quad \gamma = 3, \dots, n. \quad (44)$$

Альтернирование уравнения (40) по k и l дает

$$(\delta-1)t^{\delta-1}(1-t)p_{\gamma[k}\delta_{l]}^i - (\gamma-1)t^{\gamma-1}(1-t)p_{\delta[l}\delta_{k]}^i - t^{\delta-1}(1-t^{\gamma-1})a_{[kl]}^i[1, \gamma] - t^{\gamma-1}(1-t^{\delta-1})a_{[kl]}^i[1, \delta] + (t^{\gamma-1}-t^{\delta-1})a_{[kl]}^i[\gamma, \delta] = 0. \quad (45)$$

Полагая $\gamma = 2$ в (45) и учитывая (42) и (44), получим

$$(\delta-1)t^{\delta-1}(1-t)p_{2[k}\delta_{l]}^i - t^{\delta-1}(1-t)a_{[kl]}^i[1, 2] + (t-t^{\delta-1})a_{[kl]}^i[2, \delta] = 0. \quad (46)$$

Уравнение (46) должно удовлетворяться тождественно по t . Приравнивая нулю коэффициент при t^δ в (46), приходим к уравнению

$$(1-\delta)p_{2[k}\delta_{l]}^i + a_{[kl]}^i[1, 2] = 0. \quad (47)$$

Решая уравнения (41) и (47), получим

$$a_{[kl]}^i[1, 2] = 0 \quad (48)$$

и $p_{2[k}\delta^i_{l]} = 0$. Снова предполагая, что $r > 1$, и свертывая последнее уравнение по i и k , заключаем, что

$$p_{2k} = 0. \quad (49)$$

В силу (42), (44), (48) и (49) из (45) вытекают соотношения

$$a_{[kl]}^i[\gamma, \delta] = 0, \quad \gamma, \delta \neq 1; \quad \gamma \neq \delta. \quad (50)$$

Уравнения (42), (48) и (50) означают, что все компоненты $a_{kl}^i[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n$, тензора кручения симметричны по k и l :

$$a_{kl}^i[\alpha, \beta] = a_{lk}^i[\alpha, \beta]. \quad (51)$$

Из уравнений (44), (49) и (38) следует

$$dt = 0, \quad (52)$$

т. е. $t = \text{const}$.

Наконец, в силу (44), (49) и (51) уравнение (40) принимает вид

$$t^{\delta-1}(1-t^{\gamma-1})a_{kl}^i[\gamma, 1] - t^{\gamma-1}(1-t^{\delta-1})a_{kl}^i[\delta, 1] + (t^{\gamma-1}-t^{\delta-1})a_{kl}^i[\gamma, \delta] = 0. \quad (53)$$

В уравнение (53) входят только члены, содержащие следующие степени t : $t^{\gamma+\delta-2}$, $t^{\gamma-1}$ и $t^{\delta-1}$. Это уравнение должно удовлетворяться тождественно по t . Приравнивая нуль коэффициенты при $t^{\gamma+\delta-2}$, $t^{\gamma-1}$ и $t^{\delta-1}$, получим

$$a_{kl}^i[\gamma, 1] = a_{kl}^i[\delta, 1] = a_{kl}^i[\gamma, \delta], \quad \gamma, \delta = 2, \dots, n; \quad \gamma \neq \delta. \quad (54)$$

Из уравнений (54) и (6) следует

$$a_{jk}^i[\alpha, \beta] = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n. \quad (55)$$

Из (55) и замечания в конце §2.1 следует, что координатная ткань $W(n+1, n, r)$, $n > 2$, $r > 1$, параллелизуема. \square

Определение 4. Ткань типа Веронезе $VLW_t(n, r)$ называется *параллелизуемой*, если все ее $(n+1)$ -ткани-представители параллелизуемы.

Теорема 8. Ткани типа Веронезе $VLW_t(n, r)$, $n > 2$, $r > 1$, являются параллелизуемыми тканями Веронезе $VW_t(n, r)$ с голономными координатными тканями.

Доказательство. Действительно, как было доказано в теореме 7, ткань $W(n+1, n, r)$, $n > 2$, $r > 1$, порождающая ткань $VLW_t(n, r)$, параллелизуема, т. е. $a_{jk}^i[\alpha, \beta] = 0$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ (см. (55)), и для такой ткани $dt = 0$ (см. (52)).

Предположим, что первые n слоений $(n+1)$ -ткани-представителя ткани $VLW_t(n, r)$ определяются уравнениями

$$\sigma_\alpha^i = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, r,$$

где

$$\sigma_\alpha^i = \omega_1^i + t_\alpha \omega_2^i + \dots + t_\alpha^{n-1} \omega_n^i.$$

Тогда

$$d\sigma_\alpha^i = \sigma_\alpha^j \wedge \theta_j^i.$$

Следовательно, тензор кручения любой $(n+1)$ -ткани-представителя ткани $VLW_t(n, r)$ обращается в нуль, $(n+1)$ -ткань-представитель является параллелизуемой, и ткань типа Веронезе $VLW_t(n, r)$ сама является параллелизуемой. Поскольку $t = \text{const}$, то ткань типа Веронезе $VLW_t(n, r)$ является параллелизуемой тканью Веронезе $VW_t(n, r)$ с голономной координатной тканью. \square

6. Ткани типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$

В этом параграфе рассматриваются ткани типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$ коразмерности один на X^n . Этот случай был исключен в теореме 15.

6.1. Геометрия координатных тканей $W(4, 3, 1)$, порождающих ткани типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$. Рассмотрим сначала случай $n = 3$, т. е. ткани типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$. В этом случае координатная 4-ткань является тканью $W(4, 3, 1)$, $i, j, k = 1$, и уравнения (39) удовлетворяются тождественно. Уравнение (40) принимает вид

$$ta[1, 2] - (1 + t)a[1, 3] + a[2, 3] - b + 2ta = 0, \quad (56)$$

где $a[\alpha, \beta] = a_{11}^1[\alpha, \beta]$, $a = a_1$ и $b = b_1$.

Поскольку уравнения (56) должны удовлетворяться при любом t , имеем

$$a[1, 2] - a[1, 3] + 2a = 0, \quad -a[1, 3] + a[2, 3] - b = 0. \quad (57)$$

Кроме того, в соответствии с (6)

$$a[1, 2] + a[1, 3] + a[2, 3] = 0. \quad (58)$$

Разрешая уравнения (57) и (58) относительно $a[\alpha, \beta]$, получим

$$a[1, 2] = -\frac{1}{3}(4a + b), \quad a[1, 3] = \frac{1}{3}(2a - b), \quad a[2, 3] = \frac{2}{3}(a + b). \quad (59)$$

В силу (59) структурные уравнения (4) для $W(4, 3, 1)$ принимают вид

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \omega_1 \wedge \theta - \frac{1}{3}(4a + b)\omega_1 \wedge \omega_2 + \frac{1}{3}(2a - b)\omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_2 &= \omega_2 \wedge \theta - \frac{1}{3}(4a + b)\omega_2 \wedge \omega_1 + \frac{2}{3}(a + b)\omega_2 \wedge \omega_3, \\ d\omega_3 &= \omega_3 \wedge \theta + \frac{1}{3}(2a - b)\omega_3 \wedge \omega_1 + \frac{2}{3}(a + b)\omega_3 \wedge \omega_2, \end{aligned} \quad (60)$$

где $\omega_\alpha = \omega_\alpha^1$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$), $\theta = \theta_1^1$, и уравнение (38) запишется в виде

$$\frac{dt}{t(1-t)} = a\omega_2 + b\omega_3. \quad (61)$$

Используя (60) и (61), легко проверить, что уравнение

$$\omega_1 + t\omega_2 + t^2\omega_3 = 0 \quad (62)$$

вполне интегрируемо для произвольной вещественной функции $t(x)$, $x \in X^{nr}$.

Доказана

Теорема 9. *Ткань $W(4, 3, 1)$ порождает ткань типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$ тогда и только тогда, когда ее структурные уравнения имеют вид (60) и функция t удовлетворяет уравнению (61).*

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 4. В общем случае координатная 4-ткань $W(4, 3, 1)$, порождающая ткань типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$, является непараллелизуемой.

Можно найти другую характеристику ткани $W(4, 3, 1)$, порождающей ткань типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$.

Разрешим уравнения (59) относительно a и b :

$$a = \frac{1}{2}(a[2, 3] + 2a[1, 3]), \quad b = a[2, 3] - a[1, 3]. \quad (63)$$

Тогда уравнение (61) примет вид

$$\frac{dt}{t(1-t)} = \frac{1}{2}(a[2,3] + 2a[1,3])\omega_2 + (a[2,3] - a[1,3])\omega_3. \quad (64)$$

В результате теорема 9 может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 10. *Ткань $W(4,3,1)$ порождает ткань типа Веронезе $VLW_t(3,1)$ тогда и только тогда, когда ее структурные уравнения имеют вид (4) и функция t удовлетворяет уравнению (64).*

Сделаем несколько замечаний относительно компонент $a[\alpha, \beta]$ тензора кручения координатной ткани $W(4,3,1)$, которые имеют выражения (59).

1. Эти три компоненты выражены через две функции a и b . Функции a и b появляются также в уравнении (61). Легко видеть, что ткань $W(4,3,1)$ (a потому и ткань Веронезе $VW_t(3,1)$) параллелизуема (т. е. ее тензор кручения обращается в нуль) тогда и только тогда, когда

$$a = b = 0.$$

2. Из (60) следует, что для 3-подткани $[1, 2, 4]$, высекаемой на слое слоения $\{\omega_3 = 0\}$ слоями других трех слоений ткани $W(4,3,1)$, выполняются соотношения

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \theta - \frac{1}{3}(4a + b)\omega_1 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_2 \wedge \theta - \frac{1}{3}(4a + b)\omega_2 \wedge \omega_1, \quad d\omega_4 = \omega_4 \wedge \theta.$$

Отсюда следует, что θ является формой связности для связности Γ_4 этой 3-подткани, а $a[1, 2] = -\frac{1}{3}(4a + b)$ — ее тензор кручения. Аналогичным образом можно показать, что θ является формой связности для связности Γ_4 3-подткани $[1, 3, 4]$, а $a[1, 3] = \frac{1}{3}(2a - b)$ — ее тензор кручения, и также, что θ является формой связности для связности Γ_4 3-подткани $[2, 3, 4]$, а $a[2, 3] = \frac{2}{3}(a + b)$ — ее тензор кручения.

3. Для 3-подткани $[1, 2, 3]$, высекаемой на слое слоения $\{\omega_4 = 0\}$ слоями трех других слоений ткани $W(4,3,1)$, имеем

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \Psi - \frac{2}{3}(4a + b)\omega_1 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_2 \wedge \Psi - \frac{2}{3}(4a + b)\omega_2 \wedge \omega_1, \quad d\omega_3 = \omega_3 \wedge \Psi,$$

где $\Psi = \theta + \frac{2}{3}(a - b)\omega_1 + \frac{2}{3}(a + b)\omega_2$ — форма связности и $-\frac{2}{3}(4a + b)$ — тензор кручения 3-подткани $[1, 2, 3]$.

4. В общем случае ткань типа Веронезе $VLW_t(3,1)$ не является параллелизуемой. Действительно, рассмотрим 4-ткань-представитель ткани $VLW_t(3,1)$, образованную координатной 3-подтканью $[1, 3, 4]$ ткани $W(4,3,1)$ (все три слоения ткани $[1, 3, 4]$ принадлежат $VLW_t(3,1)$) и слоением $\omega(t_0) = \omega_1 + t_0\omega_2 + t_0^2\omega_3 = 0$, где t_0 — произвольное число, отличное от $0, \infty, 1$. Слоения этой 4-ткани-представителя определяются уравнениями $\omega_1 = 0, \omega_3 = 0, \omega_4 = 0$ и $\omega(t_0) = 0$. Эта 4-ткань непараллелизуема, поскольку ее координатная 3-подткань непараллелизуема. Таким образом, ткань типа Веронезе $VLW_t(3,1)$ непараллелизуема.

Теорема 11. *За исключением двух случаев, когда $b = 0, a \neq 0$ или $a = 0, b \neq 0$, линейная независимость функций a и b влечет параллелизуемость ткани $W(4,3,1)$ (следовательно, и ткани типа Веронезе $VLW_t(3,1)$). В этом случае ткань $VLW_t(3,1)$ является параллелизуемой тканью Веронезе $VW_t(3,1)$.*

Доказательство. Предположим, что функции a и b линейно независимы. Тогда $b = ha$, где $h \neq 0$, и уравнение (61) принимает вид

$$\frac{dt}{t(1-t)} = a(\omega_2 + h\omega_3).$$

Дифференцируя это уравнение и учитывая соотношение

$$da - a\theta = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 \quad (65)$$

(которое следует из (60)), получим

$$a_1 = -\frac{1}{3}(4+h)a^2, \quad ha_2 - a_3 + \frac{2}{3}(1-h^2)a^2 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{3}(2-h)a^2.$$

Отсюда следует $a = 0$. Следовательно, $b = 0$ и ткань $W(4, 3, 1)$ (а также $VLW_t(3, 1)$) параллизуема. Из (61) следует $dt = 0$ и $t = \text{const}$. Это означает, что рассматриваемая ткань типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$ является параллизуемой тканью Веронезе $VW_t(3, 1)$.

Отметим, что при предположении $b = ha$, $h \neq 0$ случаи, когда $b = 0$, $a \neq 0$ или $a = 0$, $b \neq 0$, исключались из рассмотрения. \square

Следствие 5. Если одна из компонент тензора кручения ткани $W(4, 3, 1)$ обращается в нуль (т. е. одна из 3-подтканей ткани $W(4, 3, 1)$ не имеет кручения), то ткань $W(4, 3, 1)$ и сама ткань типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$ (которая является тканью Веронезе $VW_t(3, 1)$) параллизуемы.

Доказательство. Для ткани $W(4, 3, 1)$ это утверждение следует из теоремы 21, если положить $h = -4, 2, -1$. Для доказательства утверждения для ткани типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$ рассмотрим произвольную ее 4-ткань-представитель. Она определяется уравнениями $\sigma_\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$, где $\sigma_\alpha = \omega_1 + t_\alpha \omega_2 + t_\alpha^2 \omega_3$. Поскольку $dt_\alpha = 0$, то, учитывая (60), получим $d\sigma_\alpha = \sigma_\alpha \wedge \theta$. Следовательно, тензор кручения любой 4-ткани-представителя ткани $VLW_t(3, 1)$ обращается в нуль, 4-ткань-представитель является параллизуемой, и сама ткань типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$ параллизуема.

Так как снова $dt = 0$ и $t = \text{const}$, то рассматриваемая ткань типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$ оказывается параллизуемой тканью Веронезе $VW_t(3, 1)$. \square

Имеет место

Теорема 12. В общем случае ткань типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$, порожденная непараллизуемой координатной 4-тканью $W(4, 3, 1)$, непараллизуема.

Доказательство. Действительно, предположим, что ткань $VLW_t(3, 1)$ параллизуема. По определению 5 это означает, что все представители ткани $VLW_t(3, 1)$ параллизуемы. 3-подткани всех представителей ткани $VLW_t(3, 1)$ также параллизуемы. 3-подткань $[1, 2, 4]$ координатной ткани $W(4, 3, 1)$, образованной тремя слоениями $\{\omega_1 = 0\}$, $\{\omega_2 = 0\}$ и $\{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0\}$ (они принадлежат множеству слоений, определенных уравнением $\omega_1 + t\omega_2 + t^2\omega_3 = 0$), является 3-подтканью многих представителей ткани $VW_t(3, 1)$. Таким образом, она является параллизуемой. Однако в замечании после теоремы 10 мы показали, что в общем случае 3-подткань $[1, 2, 4]$ координатной 4-ткани $W(4, 3, 1)$ не является параллизуемой. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

6.2. Теорема существования для тканей типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$. Докажем теперь теорему существования для тканей типа Веронезе в двух случаях, исключенных в теореме 11, для которых $b = 0$, $a \neq 0$ либо $a = 0$, $b \neq 0$.

Теорема 13. Класс тканей типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$, для которых $b = 0$, $a \neq 0$ либо $a = 0$, $b \neq 0$ существует и зависит от одной функции одной переменной.

Доказательство. В случае $b = 0$, $a \neq 0$ уравнение (61) принимает вид

$$\frac{dt}{t(1-t)} = a\omega_2. \quad (66)$$

Дифференцируя уравнение (66), получим $(da - a\theta) \wedge \omega_2 + a(-\frac{4}{3}a\omega_2 \wedge \omega_1 + \frac{2}{3}a\omega_2 \wedge \omega_3) = 0$. В силу (65) отсюда следует $a_1 = -\frac{4}{3}a^2$, $a_3 = \frac{2}{3}a^2$. В результате уравнение (65) принимает вид

$$da - a\theta = -\frac{4}{3}a^2\omega_1 + a_2\omega_2 + \frac{2}{3}a^2\omega_3. \quad (67)$$

В соответствии с (7)

$$d\theta = b[1, 2]\omega_1 \wedge \omega_2 + b[2, 3]\omega_2 \wedge \omega_3 + b[3, 1]\omega_3 \wedge \omega_1. \quad (68)$$

Дифференцируя уравнения (60) и учитывая формулы (67) и (68), найдем компоненты $b[\alpha, \beta]$ тензора кривизны ткани $W(4, 3, 1)$:

$$\begin{aligned} b[1, 2] &= \frac{1}{3}[2a_2 - a_3 + \frac{1}{3}(10a^2 - 14ab - 3b^2)], \\ b[2, 3] &= \frac{1}{3}[-2a_2 - 3a_3 - b_3 + \frac{2}{3}(5a^2 + 6ab + b^2)], \\ b[3, 1] &= \frac{1}{3}[4a_3 + b_3 + \frac{1}{3}(-20a^2 + 2ab + b^2)]. \end{aligned} \quad (69)$$

Из (69) следует $b[1, 2] + b[2, 3] + b[3, 1] = 0$. Это формула (1.2.39) из книги [13], записанная для $r = 1$.

Принимая во внимание формулы (69), запишем уравнение (68) в виде

$$\begin{aligned} d\theta = & \frac{1}{3}\left[2a_2 - a_3 + \frac{1}{3}(10a^2 - 14ab - 3b^2)\right]\omega_1 \wedge \omega_2 + \\ & + \frac{1}{3}\left[-2a_2 - 3a_3 - b_3 + \frac{2}{3}(5a^2 + 6ab + b^2)\right]\omega_2 \wedge \omega_3 + \\ & + \frac{1}{3}\left[4a_3 + b_3 + \frac{1}{3}(-20a^2 + 2ab + b^2)\right]\omega_3 \wedge \omega_1. \end{aligned} \quad (70)$$

Внешнее дифференцирование соотношений (67) и (70) приводит к следующим внешним квадратичному и кубическому уравнениям:

$$\left[\nabla a_2 + \frac{2}{3}a(7a_2 + 4a^2)\omega_1 - \frac{4}{3}aa_2\omega_3\right] \wedge \omega_2 = 0, \quad (71)$$

$$2\nabla a_2 \wedge (\omega_1 + \omega_3) \wedge \omega_2 - \frac{4}{3}a(9a_2 + 4a^2)\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = 0, \quad (72)$$

где $\nabla a_2 = da_2 - 2a_2\theta$.

Система, определяющая рассматриваемую ткань $VW_t(3, 1)$, состоит из пфаффовых уравнений (66) и (67), внешнего квадратичного уравнения (71) и внешнего кубического уравнения (72). Эта система замкнута относительно операции внешнего дифференцирования.

Единственной неизвестной функцией во внешних уравнениях является ∇a_2 . Таким образом, $q = 1$. Имеется только одно внешнее квадратичное уравнение (71). Поэтому первый характер рассматриваемой системы равен единице: $s_1 = 1$. Следовательно, $s_2 = q - s_1 = 0$. Отсюда следует, что число Картана $Q = s_1 + 2s_2 = 1$.

Из уравнения (71) имеем

$$\nabla a_2 = -\frac{2}{3}a(7a_2 + 4a^2)\omega_1 + a_{22}\omega_2 + \frac{4}{3}aa_2\omega_3. \quad (73)$$

Подстановка (73) в (72) приводит к тождеству.

Поэтому число параметров N , от которых зависит наиболее общий интегральный элемент, равно единице: $N = 1$. Отсюда следует $Q = N$. Таким образом, по критерию Картана, система инволютивна, и ткани Веронезе $VW_t(3, 1)$, для которых $b = 0$, $a \neq 0$, зависят от одной произвольной функции одной переменной.

В случае $a = 0$, $b \neq 0$ доказательство аналогично. \square

Замечание. По причине технических трудностей авторы не смогли доказать теорему существования для тканей $VW_t(3, 1)$ общего вида: дифференциальная система, определяющая такие ткани, не находится в инволюции и требует многократного продолжения. Однако по теореме 13 общего вида ткани $VW_t(3, 1)$ существуют и не сводятся к параллелизуемым тканям. Возможно (хотя и маловероятно), что такие ткани сводятся к одному из классов, рассмотренных в теореме 13. Авторы высказывают гипотезу, что класс тканей $VW_t(3, 1)$ общего вида зависит от определенного числа (большего единицы) функций одного переменного.

6.3. Ткани типа Веронезе $VLW_i(3, 1)$ с координатной 4-тканью $u = f(x, y, z)$. Предположим, что координатная ткань $W(4, 3, 1)$ задана уравнением

$$u = f(x, y, z). \quad (74)$$

Дифференцируя (74), получим

$$du = f_x dx + f_y dy + f_z dz. \quad (75)$$

Если взять

$$\omega_1 = f_x dx, \quad \omega_2 = f_y dy, \quad \omega_3 = f_z dz, \quad \omega_4 = -du, \quad (76)$$

то в соответствии с (75) и (76) будем иметь

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 0. \quad (77)$$

Дифференцируя формулы (76), получим

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= -F_{xy}\omega_1 \wedge \omega_2 - F_{xz}\omega_1 \wedge \omega_3, & d\omega_2 &= -F_{xy}\omega_2 \wedge \omega_1 - F_{yz}\omega_2 \wedge \omega_3, \\ d\omega_3 &= -F_{xz}\omega_3 \wedge \omega_1 - F_{yz}\omega_3 \wedge \omega_2, & d\omega_4 &= 0, \end{aligned} \quad (78)$$

где

$$F_{xy} = \frac{f_{xy}}{f_x f_y}, \quad F_{yz} = \frac{f_{yz}}{f_y f_z}, \quad F_{xz} = \frac{f_{xz}}{f_x f_z}. \quad (79)$$

Из (60) следует

$$d\omega_4 = \omega_4 \wedge \theta. \quad (80)$$

Сравнивая последнее из уравнений (78) с уравнением (80), приходим к соотношению

$$\omega_4 \wedge \theta = 0. \quad (81)$$

Из (81) следует, что форма связности θ имеет вид

$$\theta = k\omega_4 = -k(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3). \quad (82)$$

Используя (82), можно записать структурные уравнения (78) в форме

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \omega_1 \wedge \theta + (-F_{xy} + k)\omega_1 \wedge \omega_2 + (-F_{xz} + k)\omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_2 &= \omega_2 \wedge \theta + (-F_{xy} + k)\omega_2 \wedge \omega_1 + (-F_{yz} + k)\omega_2 \wedge \omega_3, \\ d\omega_3 &= \omega_3 \wedge \theta + (-F_{xz} + k)\omega_3 \wedge \omega_1 + (-F_{yz} + k)\omega_3 \wedge \omega_2. \end{aligned} \quad (83)$$

Таким образом, компоненты тензора кручения ткани $W(4, 3, 1)$ имеют вид

$$a[1, 2] = -F_{xy} + k, \quad a[1, 3] = -F_{xz} + k, \quad a[2, 3] = -F_{yz} + k.$$

Однако в силу (58) сумма этих компонент должна равняться нулю. Следовательно,

$$k = \frac{1}{3}(F_{xy} + F_{xz} + F_{yz}).$$

Отсюда находим выражения для компонент тензора кручения ткани $W(4, 3, 1)$, заданной уравнением $u = f(x, y, z)$,

$$a[1, 2] = \frac{1}{3}(-2F_{xy} + F_{yz} + F_{xz}), \quad a[2, 3] = \frac{1}{3}(F_{xy} - 2F_{yz} + F_{xz}), \quad a[1, 3] = \frac{1}{3}(F_{xy} + F_{yz} - 2F_{xz}) \quad (84)$$

(ср. [13], § 3.3, где был рассмотрен случай ткани $W(n+1, n, r)$ общего вида).

Из (84) следует, что структурные уравнения ткани $W(4, 3, 1)$, заданной уравнением $u = f(x, y, z)$, имеют вид

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \omega_1 \wedge \theta + \frac{1}{3}(-2F_{xy} + F_{yz} + F_{zx})\omega_1 \wedge \omega_2 + \frac{1}{3}(F_{xy} + F_{yz} - 2F_{zx})\omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_2 &= \omega_2 \wedge \theta + \frac{1}{3}(-2F_{xy} + F_{yz} + F_{zx})\omega_2 \wedge \omega_1 + \frac{1}{3}(F_{xy} - 2F_{yz} + F_{zx})\omega_2 \wedge \omega_3, \\ d\omega_3 &= \omega_3 \wedge \theta + \left(\frac{1}{3}F_{xy} + F_{yz} - 2F_{zx}\right)\omega_3 \wedge \omega_1 + \frac{1}{3}(F_{xy} - 2F_{yz} + F_{zx})\omega_3 \wedge \omega_2. \end{aligned} \quad (85)$$

Положим

$$dt = t_x dx + t_y dy + t_z dz. \quad (86)$$

Тогда условие полной интегрируемости уравнения (64) имеет вид

$$f_{xy}f_z(t^3 - t^2) + f_{yz}f_x(t^2 - t) + f_{xz}f_y(t - t^3) = f_x f_y t_z + t^2 f_z f_y t_x - 2t f_x f_z t_y. \quad (87)$$

Используя (76) и (62), запишем уравнение (86) в виде

$$dt = \left(\frac{t_y}{f_y} - \frac{tt_x}{f_x}\right)\omega_2 + \left(\frac{t_z}{f_z} - \frac{t^2 t_x}{f_x}\right)\omega_3. \quad (88)$$

Сравнивая (88) с (61), получим

$$\frac{t_y}{f_y} = \frac{tt_x}{f_x} + at(1-t), \quad \frac{t_z}{f_z} = \frac{t^2 t_x}{f_x} + bt(1-t). \quad (89)$$

Разделив (87) на $f_x f_y f_z$ и воспользовавшись обозначением (80), получим

$$F_{xy}t^2(t-1) + F_{yz}t(t-1) + F_{xz}t(1-t)(1+t) = \frac{t_z}{f_z} + \frac{t^2 t_z}{f_x} - 2t \frac{t_y}{f_y}. \quad (90)$$

Из уравнений (90) и (89) следует

$$-F_{xy}t - F_{yz} + F_{xz}(1+t) = b - 2ta. \quad (91)$$

Поскольку соотношение (91) должно выполняться для любой функции t , то

$$a = \frac{1}{2}(F_{xy} - F_{xz}), \quad b = F_{xz} - F_{yz}. \quad (92)$$

Отметим, что уравнения (92) можно также вывести из (59) и (84). В результате уравнение (61) принимает вид

$$\frac{dt}{t(1-t)} = \frac{1}{2}(F_{xy} - F_{xz})\omega_2 + (F_{xz} - F_{yz})\omega_3. \quad (93)$$

Теорема 14. Ткань $W(4, 3, 1)$, заданная уравнением $u = f(x, y, z)$, порождает ткань Веронезе $VW_t(3, 1)$ тогда и только тогда, когда ткань $W(4, 3, 1)$ (следовательно, и ткань $VW_t(3, 1)$) параллелизуема.

Доказательство. Действительно, в этом случае $t = \text{const}$. Таким образом, также выполняется $a = b = 0$. Поэтому из (92) (или из (93)) следует

$$F_{xy} = F_{xz}, \quad F_{xz} = F_{yz}.$$

В соответствии с (79) эти условия эквивалентны равенствам

$$\frac{f_{xy}}{f_{xz}} = \frac{f_y}{f_z}, \quad \frac{f_{xz}}{f_{yz}} = \frac{f_x}{f_y},$$

которые эквивалентны (см. [13], § 4.1) следующим имеющим инвариантный вид условиям:

$$a[1, 2] = a[1, 3], \quad a[1, 3] = a[2, 3].$$

Тогда из (58) следует, что $a[\alpha, \beta] = 0$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, и ткани $W(4, 3, 1)$ и $VW(3, 1)$ параллелизуемы. \square

Для того чтобы уравнения (93) были совместны, функция $f(x, y, z)$ должна удовлетворять некоторым дополнительным условиям. Для нахождения этих условий запишем уравнения (92) в виде

$$\frac{dt}{t(1-t)} = Ady + Bdz, \quad (94)$$

где

$$A = \frac{1}{2} (F_{xy} - F_{xz}) f_y = \frac{1}{2} \left(\frac{f_{xy}}{f_y} - \frac{f_{xz}}{f_z} \right) \frac{f_y}{f_x}, \quad B = \frac{f_{xz}}{f_x} - \frac{f_{yz}}{f_y}. \quad (95)$$

Внешнее дифференцирование уравнения (94) приводит к уравнению

$$-t^2 \frac{f_z}{f_x} A_x + A_z + t \frac{f_y}{f_x} B_x + B_y = 0. \quad (96)$$

Из (96) следует

$$A_x = 0, \quad B_x = 0, \quad A_z = B_y. \quad (97)$$

В соответствии с (95) уравнения (97) можно переписать

$$\left[\left(\frac{f_{xy}}{f_y} - \frac{f_{xz}}{f_z} \right) \frac{f_y}{f_x} \right]_x = 0, \quad \left[\frac{1}{2} \left(\frac{f_{xy}}{f_y} - \frac{f_{xz}}{f_z} \right) \frac{f_y}{f_x} \right]_z = \left(\frac{f_{xz}}{f_x} - \frac{f_{yz}}{f_y} \right)_y, \quad \left(\frac{f_{xz}}{f_x} - \frac{f_{yz}}{f_y} \right)_x = 0. \quad (98)$$

Аналогичной теоремам 9 и 10 является

Теорема 15. Ткань $W(4, 3, 1)$, заданная уравнением $u = f(x, y, z)$, порождает ткань типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$ тогда и только тогда, когда ее структурные уравнения имеют вид (85) и функция $f(x, y, z)$ удовлетворяет уравнениям (98).

В §§ 6.1 и 6.2 рассмотрены специальные классы тканей $VLW_t(3, 1)$, для которых $b = 0$ (или $a = 0$). Сейчас можно прояснить геометрический смысл этих условий в случае, когда координатная ткань задана уравнением $u = f(x, y, z)$. Из (92) видно, что условие $b = 0$ эквивалентно условию $F_{xz} = F_{yz}$ или, в соответствии с (79), условию

$$\frac{f_{xz}}{f_{yz}} = \frac{f_x}{f_y}.$$

Как показано в ([13], § 4.1), последнее условие эквивалентно условию, имеющему инвариантный вид,

$$a[1, 3] = a[2, 3]$$

или 3-приводимости ткани $u = f(x, y, z)$, которая означает, что функция $f(x, y, z)$ трех переменных является следующей суперпозицией двух функций двух переменных:

$$f(x, y, z) = g(\varphi(x, y), z).$$

Аналогично, условие $a = 0$ означает, что функция $f(x, y, z)$ трех переменных является следующей суперпозицией двух функций двух переменных:

$$f(x, y, z) = g(x, \varphi(y, z)).$$

Рассмотрим два примера.

Пример 4. Предположим, что ткань $W(4, 3, 1)$ задана уравнением

$$f(x, y, z) = x + y + z + yz.$$

Тогда из (79), (76), (82), (84), (85), (92) и (95) следует

$$\begin{aligned} f_x &= 1, \quad f_y = 1 + z, \quad f_z = 1 + y, \quad f_{xy} = f_{xz} = 0, \quad f_{yz} = 1; \\ F_{xy} &= F_{xz} = 0, \quad F_{yz} = \frac{1}{(1+y)(1+z)}; \\ \omega_1 &= dx, \quad \omega_2 = (1+z)dy, \quad \omega_3 = (1+y)dz, \quad \omega_4 = -df, \quad \theta = \frac{1}{3(1+y)(1+z)}\omega_4; \\ a[1, 2] &= a[1, 3] = \frac{1}{3(1+y)(1+z)}, \quad a[2, 3] = -\frac{2}{3(1+y)(1+z)}; \\ \begin{cases} d\omega_1 = \omega_1 \wedge \theta + \frac{1}{3(1+y)(1+z)}\omega_1 \wedge \omega_2 + \frac{1}{3(1+y)(1+z)}\omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_2 = \omega_2 \wedge \theta + \frac{1}{3(1+y)(1+z)}\omega_2 \wedge \omega_1 - \frac{2}{3(1+y)(1+z)}\omega_2 \wedge \omega_3, \\ d\omega_3 = \omega_3 \wedge \theta + \frac{1}{3(1+y)(1+z)}\omega_3 \wedge \omega_1 - \frac{1}{3(1+y)(1+z)}\omega_3 \wedge \omega_2; \end{cases} \\ a &= 0, \quad b = -\frac{1}{(1+y)(1+z)}; \quad A = af_y = 0, \quad B = bf_z = -\frac{1}{1+z}; \quad A_x = A_z = 0, \quad B_x = B_y = 0. \end{aligned}$$

Последние уравнения показывают, что для рассматриваемой в данном примере ткани $W(4, 3, 1)$ условия (97) выполняются. Таким образом, эта ткань порождает ткань типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$.

Уравнения (93) для рассматриваемой ткани принимают вид

$$\frac{dt}{t(1-t)} = \frac{1}{2(1+y)}dy$$

с решением

$$t = 1 - \frac{1}{1+g(x, z, C)\sqrt{1+y}},$$

где $g(x, z, C)$ — произвольная функция переменных x, z и константы C .

В этом примере $a = 0$. Это означает, что должно выполняться $f(x, y, z) = g(x, \varphi(y, z))$. Действительно, $u = f(x, y, z) = x + y + z + xz = x + (y + z + xz)$, т. е. $\varphi(x, y) = y + z + yz$ и $g(u, v) = u + v$.

Пример 5. Предположим, что ткань $W(4, 3, 1)$ задана уравнением $f(x, y, z) = (x+y)z$. Тогда из (79), (76), (82), (84), (85), (92) и (95) следует

$$\begin{aligned} f_x &= f_y = z, \quad f_z = x + y, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{xz} = f_{yz} = 1; \quad F_{xy} = 0, \quad F_{xz} = F_{yz} = \frac{1}{(x+y)z}; \\ \omega_1 &= zdx, \quad \omega_2 = zdy, \quad \omega_3 = (x+y)dz, \quad \omega_4 = -df, \quad \theta = \frac{2}{3(x+y)z}\omega_4; \\ a[1, 2] &= \frac{2}{3(x+y)z}, \quad a[1, 3] = a[2, 3] = -\frac{1}{3(x+y)z}; \\ \begin{cases} d\omega_1 = \omega_1 \wedge \theta + \frac{2}{3(x+y)z}\omega_1 \wedge \omega_2 - \frac{1}{3(x+y)z}\omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_2 = \omega_2 \wedge \theta + \frac{2}{3(x+y)z}\omega_2 \wedge \omega_1 - \frac{1}{3(x+y)z}\omega_2 \wedge \omega_3, \\ d\omega_3 = \omega_3 \wedge \theta - \frac{1}{3(x+y)z}\omega_3 \wedge \omega_1 - \frac{1}{3(x+y)z}\omega_3 \wedge \omega_2; \end{cases} \end{aligned}$$

$$a = -\frac{1}{2(x+y)z}, \quad b = 0; \quad A = af_y = -\frac{1}{2(x+y)}, \quad B = bf_z = 0;$$

$$A_x = \frac{1}{2(x+y)^2}, \quad A_z = 0, \quad B_x = B_y = 0.$$

Последние уравнения показывают, что условия (97) не выполняются для рассматриваемой в примере ткани $W(4, 3, 1)$. Таким образом, эта ткань не порождает ткани типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$.

В этом примере $b = 0$, поэтому $f(x, y, z) = g(\varphi(x, y), z)$. Действительно, $u = f(x, y, z) = (x+y)z$, т. е. $\varphi(x, y) = x+y$ и $g(u, v) = uv$.

7. Ткани типа Веронезе $VLW_t(n, 1)$, $n > 3$

В случае $n > 3$, который также был исключен из рассмотрения в теореме 7, имеет место

Теорема 16. Координатная $(n+1)$ -ткань $W(n+1, n, 1)$, $n > 3$, порождает ткань типа Веронезе $VLW_t(n, 1)$ тогда и только тогда, когда ткань $W(n+1, n, 1)$ является параллелизируемой.

Доказательство. Доказательство проведем в три шага.

Шаг 1. *Нахождение соотношений между компонентами тензора кручения.* Ткань $W(n+1, n, 1)$ образована $n+1$ слоением $\{\omega_1 = 0\}, \dots, \{\omega_n = 0\}$ и $\{\omega_1 + \dots + \omega_n = 0\}$ коразмерности один на многообразии X^n . Для таких тканей имеем уравнения (4)–(7), где $r = 1$.

Рассмотрим $(n-1)$ -мерное слоение ξ^{n-1} , определенное системой уравнений

$$\omega_1 + \sum_{\alpha=2}^n t^{\alpha-1} \omega_\alpha = 0 \quad (99)$$

(ср. (1)). Ткань $W(n+1, n, 1)$ порождает ткань типа Веронезе $VLW_t(n, 1)$ тогда и только тогда, когда уравнение (99) вполне интегрируемо для произвольной вещественной функции $t(x)$, $x \in X^{nr}$.

Внешнее дифференцирование уравнения (99) дает

$$d\omega_1 + \sum_{\alpha=2}^n (\alpha-1)t^{\alpha-2} dt \wedge \omega_\alpha + \sum_{\alpha=2}^n t^{\alpha-1} d\omega_\alpha = 0.$$

В соответствии с (4) отсюда следует

$$\sum_{\beta=2}^n a[1, \beta] \omega_1^k \wedge \omega_\beta^l + \sum_{\alpha=2}^n (\alpha-1)t^{\alpha-2} dt \wedge \omega_\alpha^i + \sum_{\alpha=2}^n t^{\alpha-1} \sum_{\beta \neq \alpha} a[\alpha, \beta] \omega_\alpha^j \wedge \omega_\beta^k = 0. \quad (100)$$

Здесь и в дальнейшем используется обозначение $a[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n$, для компонент $a_{11}^1[\alpha, \beta]$ тензора кручения ткани $W(n+1, n, 1)$.

Если $t \neq 0, 1, \infty$, то из соотношения (100) следует

$$\frac{dt}{t(1-t)} = \sum_{\gamma=2}^n p_\gamma \omega_\gamma. \quad (101)$$

Подставляя выражение для dt из (101) в (100), получим внешнее квадратичное уравнение. Члены этого уравнения, содержащие $\omega_\gamma \wedge \omega_\delta$, $\gamma \neq \delta$, линейно независимы. Предполагая, что $t \neq 0, 1$, и приравнивая нулю коэффициенты при $\omega_\gamma \wedge \omega_\delta$ во внешнем квадратичном уравнении, получим уравнение

$$(\delta-1)t^{\delta-1}(1-t)p_\gamma - (\gamma-1)t^{\gamma-1}(1-t)p_\delta + t^{\delta-1}(1-t^{\gamma-1})a[1, \gamma] - \\ - t^{\gamma-1}(1-t^{\delta-1})a[1, \delta] + (t^{\gamma-1}-t^{\delta-1})a[\gamma, \delta] = 0. \quad (102)$$

Шаг 2. Доказательство того, что $p_\gamma = 0$ и $a[\alpha, 1] = a[\beta, 1] = a[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta = 2, \dots, n$; $\alpha \neq \beta$. Предположим, что $\gamma < \delta$. Считая, что $t \neq 0, 1$, поделим соотношение (102) на $t^{\gamma-1}(1-t)$:

$$(\delta - 1)t^{\delta-\gamma}p_\gamma - (\gamma - 1)p_\delta + t^{\delta-\gamma}(1 + t + \dots + t^{\gamma-2})a[1, \gamma] - \\ - (1 + t + \dots + t^{\delta-2})a[1, \delta] + (1 + t + \dots + t^{\delta-\gamma-1})a[\gamma, \delta] = 0. \quad (103)$$

Предположим также, что $n > 3$ (случай $n = 3$ был рассмотрен в § 6). Запишем соотношение (103) для трех случаев ($\gamma = \alpha$, $\delta = \alpha + 1$; $\gamma = \alpha$, $\delta = \alpha + 2$; $\gamma = \alpha + 1$, $\delta = \alpha + 2$):

$$\alpha tp_\alpha - (\alpha - 1)p_{\alpha+1} + t(1 + t + \dots + t^{\alpha-2})a[1, \alpha] - \\ - (1 + t + \dots + t^{\alpha-1})a[1, \alpha + 1] + a[\alpha, \alpha + 1] = 0, \quad (104)$$

$$(\alpha + 1)t^2 p_\alpha - (\alpha - 1)p_{\alpha+2} + t^2(1 + t + \dots + t^{\alpha-2})a[1, \alpha] - \\ - (1 + t + \dots + t^\alpha)a[1, \alpha + 2] + (1 + t)a[\alpha, \alpha + 2] = 0, \quad (105)$$

$$(\alpha + 1)tp_{\alpha+1} - (\alpha - 1)p_{\alpha+2} + t(1 + t + \dots + t^{\alpha-1})a[1, \alpha + 1] - \\ - (1 + t + \dots + t^\alpha)a[1, \alpha + 2] + a[\alpha + 1, \alpha + 2] = 0. \quad (106)$$

Каждое из уравнений (104), (105) и (106) должно выполняться тождественно относительно t . Приравнивая нулю коэффициенты при t и t^0 в (105), а также при t^2 , t и t^0 в (106) и (107), получим следующие соотношения:

$$\alpha p_\alpha + a[1, \alpha] - a[1, \alpha + 1] = 0, \quad (107)$$

$$(1 - \alpha)p_{\alpha+1} - a[1, \alpha + 1] + a[\alpha, \alpha + 1] = 0, \quad (108)$$

$$(\alpha + 1)p_\alpha + a[1, \alpha] - a[1, \alpha + 2] = 0, \quad (109)$$

$$-a[1, \alpha + 2] + a[\alpha, \alpha + 2] = 0, \quad (110)$$

$$(1 - \alpha)p_{\alpha+2} - a[1, \alpha + 2] + a[\alpha, \alpha + 2] = 0, \quad (111)$$

$$a[1, \alpha + 1] - a[1, \alpha + 2] = 0, \quad (112)$$

$$(1 + \alpha)p_{\alpha+1} + a[1, \alpha + 1] - a[1, \alpha + 2] = 0, \quad (113)$$

$$-p_{\alpha+2} - a[1, \alpha + 2] + a[\alpha + 1, \alpha + 2] = 0. \quad (114)$$

Из (110) и (112) следует

$$a[1, \alpha + 1] = a[1, \alpha + 2] = a[\alpha, \alpha + 2].$$

Поскольку $\alpha = 2, \dots, n$, то, в частности, имеем

$$a[1, \alpha] = a[1, \beta], \quad \alpha, \beta = 3, \dots, n. \quad (115)$$

В соответствии с (115), из уравнений (111) и (113) следует

$$p_\alpha = 0, \quad \alpha = 3, \dots, n. \quad (116)$$

Далее, полагая $\alpha = 2$ в уравнениях (107) и (109), получим

$$2p_2 + a[1, 2] - a[1, 3] = 0, \quad (117)$$

$$3p_2 + a[1, 2] - a[1, 4] = 0. \quad (118)$$

Из (115) следует $a[1, 3] = a[1, 4]$. Тогда из (117) и (118) получим

$$p_2 = 0 \quad (119)$$

и

$$a[1, 2] = a[1, 3] = a[1, 4]. \quad (120)$$

Уравнения (116) и (119) дают

$$p_\alpha = 0, \quad \alpha = 2, \dots, n, \quad (121)$$

а уравнения (115) и (120) доказывают, что

$$a[1, \alpha] = a[1, \beta], \quad \alpha, \beta = 2, \dots, n; \quad \alpha \neq \beta. \quad (122)$$

Из (121), (122) и (103) следует

$$a[1, \alpha] = a[1, \beta] = a[\alpha, \beta], \quad \alpha, \beta = 2, \dots, n; \quad \alpha \neq \beta. \quad (123)$$

Шаг 3. Из (123) и (6) имеем

$$a[\alpha, \beta] = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n; \quad \alpha \neq \beta. \quad (124)$$

Из (124) и замечания в конце § 2.1 следует, что координатная ткань $W(n+1, n, 1)$, $n > 3$, параллелизуема. \square

Следствие 6. Среди координатных $(n+1)$ -тканей $W(n+1, n, r)$, $n \geq 2, r \geq 1$, порождающих ткани типа Веронезе $VLW_t(n, r)$, $n \geq 2, r \geq 1$, только ткани $W(3, 2, r)$, $r \geq 1$, и $W(4, 3, 1)$ являются непараллелизуемыми.

Теорема 17. Ткани типа Веронезе $VLW_t(n, 1)$, $n > 3$, являются параллелизуемыми тканями Веронезе $VW_t(n, 1)$ с голономными координатными тканями.

Доказательство. Действительно, как доказано в теореме 16, ткань $W(n+1, n, 1)$, $n > 3$, которая порождает ткань Веронезе $VW_t(n, 1)$, параллелизуема, т. е. $a[\alpha, \beta] = 0$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ (см. (124)), и для такой ткани $dt = 0$. Предположим, что первые n слоений $(n+1)$ -ткани-представителя ткани $VW_t(n, r)$ определены уравнениями $\sigma_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \dots, n$, где $\sigma_\alpha = \omega_1 + t_\alpha \omega_2 + \dots + t_\alpha^{n-1} \omega_n$ и $dt_\alpha = 0$. Тогда $d\sigma_\alpha = \sigma_\alpha \wedge \theta$. Следовательно, тензор кручения любой $(n+1)$ -ткани-представителя ткани $VLW_t(n, 1)$ обращается в нуль, представитель является параллелизуемым, и сама ткань типа Веронезе $VLW_t(n, 1)$ оказывается параллелизуемой тканью Веронезе $VW_t(n, 1)$ с голономной координатной тканью. \square

8. Доказательство гипотезы Захаревича для тканей типа Веронезе $VLW_t(2, r)$

В этом параграфе результаты § 2 будут применены для доказательства гипотезы Захаревича для тканей типа Веронезе $VLW_t(2, r)$. В [15] (см. также [5]) Захаревич выразил предположение, что в случае тканей Веронезе $VW_t(n, r)$ достаточно проверить полную интегрируемость системы (2) для $n+2$ различных вещественных чисел t для того, чтобы показать, что эта система вполне интегрируема при любом вещественном числе t .

Для тканей типа Веронезе $VLW_t(2, r)$ имеем $n = 2$. Таким образом, имеет место

Теорема 18. Если система (13) вполне интегрируема для четырех линейно независимых функций t , тогда эта система вполне интегрируема для произвольной вещественной функции $t(x)$, $x \in X^{nr}$, и определяет однопараметрическое семейство трансверсальных слоений, т. е. в этом случае ткань $W(3, 2, r)$ порождает ткань типа Веронезе $VLW_t(2, r)$.

Доказательство. Рассмотрим на X^{2r} семейство r -мерных слоений, определенных системой уравнений

$$\omega_1^i + a\omega_2^i = 0, \quad (125)$$

зависящих от параметра $a = a(x)$, $x \in X^{2r}$. Любые три из этих слоений, находящиеся в общем положении, могут быть определены значениями $a = 0, \infty, 1$. Система (125) вполне интегрируема для этих трех значений параметра a , и интегральные многообразия соответствующих трех систем образуют 3-ткань $W(3, 2, r)$ на X^{2r} . Условиями интегрируемости этих систем являются уравнения (9).

Рассмотрим четвертую систему из семейства (125), определенную значением $\tilde{a}(x) \neq 0, \infty, 1$; $x \in X^{2r}$. Дифференцируя (125), где $a = \tilde{a}$, находим следующее условие интегрируемости четвертой системы:

$$d\tilde{a} \wedge \omega_2^i + (\tilde{a}^2 - \tilde{a})a_{jk}^i \omega_2^j \wedge \omega_2^k = 0$$

(ср. (14)). Отсюда следует

$$\frac{d\tilde{a}}{\tilde{a} - \tilde{a}^2} = a_k \omega_2^k. \quad (126)$$

Как следствие двух последних уравнений получаем

$$(a_{jk}^i - \delta_j^i a_k) \omega_2^j \wedge \omega_2^k = 0.$$

Следовательно, тензор кривизны a_{jk}^i имеет строение (16).

Условия (16) являются условиями интегрируемости не только для системы (125), определенной значением $\tilde{a}(x)$ параметра a , которое удовлетворяет уравнению (126), но и для систем (125), которые определяются значениями параметра a , удовлетворяющими уравнению

$$\frac{da}{a - a^2} = \frac{d\tilde{a}}{\tilde{a} - \tilde{a}^2}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$a = \frac{\tilde{a}}{(1 - C)\tilde{a} + C},$$

где $C = \text{const}$. Эти значения параметра a определяют однопараметрическое семейство (изоклиновых) подмногообразий V^r , проходящих через точку x .

Поэтому если на X^{2r} имеются четыре интегрируемых изоклиновых подмногообразия из семейства (125), то на X^{2r} имеется однопараметрическое семейство таких интегральных подмногообразий, т. е. X^{2r} несет на себе ткань типа Веронезе $VLW_t(2, r)$.

Аналогичное доказательство с соответствующими изменениями можно провести для тканей типа Веронезе $VLW_t(3, 1)$, $VLW_t(n, r)$, $n \geq 3$, $r > 1$, и $VLW_t(n, 1)$, $n > 3$, с голономными координатными тканями. \square

Авторы выражают свою благодарность профессорам Дюфуре, Панасюку и Захаревичу за очень полезные дискуссии, касающиеся первоначального варианта этой работы.

Литература

1. Gelfand I.M., Zakharevich I. *Webs, Veronese curves, and bihamiltonian systems* // J. Funct. Anal. – 1991. – V. 99. – № 1. – P. 150–178.
2. Panasyuk A. *Veronese webs for bihamiltonian structures of higher corank* // Grabowski, Janusz (Ed.) et al., *Poisson geometry. Stanislaw Zakrzewski in memoriam*. Warszawa: Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Banach Cent. Publ. – 2000. – V. 51. – P. 251–261.
3. Gelfand I.M., Zakharevich I. *Webs, Lenard schemes, and the local geometry of bi-Hamiltonian Toda and Lax structures* // Selecta Math. (N. S.). – 2000. – V. 6. – № 2. – P. 131–183.
4. Turiel F.-J. *Tissus de Veronese analytiques de codimension supérieure et structures bihamiltoniennes* // C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math. – 2000. – V. 331. – № 1. – P. 61–64.
5. Zakharevich I. *Kronecker webs, bihamiltonian structures, and the method of argument translation* // Transform. Groups. – 2001. – V. 6. – № 3. – P. 267–300.
6. Panasyuk A. *On integrability of generalized Veronese curves of distributions* // Rep. Math. Phys. – 2000. – V. 50. – № 3. – P. 291–297.
7. Bouetou B.T., Dufour J.P. *Veronese curves and webs: interpolation* // Int. J. Math. Math. Sci. – 2006. – Art. ID 93142. – 11 p.
8. Акивис М.А. *Об изоклиновых три-тканях и их интерпретации в линейчатом пространстве проективной связности* // Сиб. матем. журн. – 1974. – Т. 15. – № 1. – С. 3–15.
9. Akivis M.A., Shelekhov A.M. *Geometry and algebra of multidimensional three-webs*, translated from the Russian by V.V. Goldberg. – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992. – xvii + 358 p.
10. Akivis M.A., Goldberg V.V. *Differential geometry of webs* // Handbook of Differential Geometry, Chapter 1. Elsevier Science B. V., 2000. – P. 1–152.

11. Гольдберг Б.В. *(n + 1)-ткани многомерных поверхностей* // ДАН СССР. – 1973. – Т. 210. – № 4. – С. 756–759.
12. Гольдберг Б.В. *(n + 1)-ткани многомерных поверхностей* // Bulgar. Akad. Nauk Izv. Mat. Inst. – 1974. – V. 15. – P. 405–424.
13. Goldberg V.V. *Theory of multicodimensional (n + 1)-webs*. – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988. – xxii + 466 p.
14. Акивис М.А. *О три-тканях многомерных поверхностей* // Тр. геометрич. семин. ВИНИТИ АН СССР. – 1969. – Т. 2. – С. 7–31.
15. Zakharevich I. *Nonlinear wave equation, nonlinear Riemann problem, and the method of argument translation*. – arXiv:math-ph/006001, 2000. – 44 p.
16. Nagy P.T. *Webs and curvature* // Web theory and related topics (Toulouse, 1996), 48–91, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001.
17. Shelekhov A.M., Pidzhakova I.M. *On three-webs with covariantly constant torsion and curvature tensors* // Webs and Quasigroups. – Tver. Gos. Univ., Tver, 1999. – P. 92–103.
18. Акивис М.А. *Ткани и почти грассмановы структуры* // Сиб. матем. журн. – 1982. – Т. 23. – № 6. – С. 6–15.

*Иерусалимский технологический
колледж (Израиль)*

*Технологический институт штата
Нью Йорка (Ньюарк, Нью Йорк, США)*

*Поступила
12.04.2007*