И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2005 МАТЕМАТИКА № 2 (513)

УДК 517.518

М.Г. ПЛОТНИКОВ

О ВОССТАНОВЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДВУМЕРНЫХ РЯДОВ ХААРА

Часто коэффициенты всюду сходящегося ряда $\sum\limits_n a_n f_n(x)$ по некоторой ортонормированной системе функций $\{f_n(x)\}$ восстанавливаются по его сумме $S(x)$ при помощи обычных формул Фурье

$$a_n = \int S(x) f_n(x) dx. \qquad (1)$$

Так как функция $S(x)$ не обязана быть суммируемой, то под интегралом в формуле (1) понимается интеграл, отличный от лебеговского. Например, коэффициенты всюду сходящегося тригонометрического ряда восстанавливаются при помощи так называемого M_2-интеграла ([1], с. 138).

Данная работа посвящена задаче о восстановлении коэффициентов двумерных рядов Хаара. В связи с тем, что имеются разные определения (одномерных) функций Хаара [2], отметим, что используется стандартное определение [3], при котором система Хаара полна в $C[0,1]$. То есть полагаем $\chi_1(x) \equiv 1$ на [0,1]; если $n = 2^k + i$, $k \ge 0$, $1 \le i \le 2^k$, то

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при } \ x \in \left(\frac{2i-2}{2^{k+1}}; \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right); \\ -2^{k/2} & \text{при } \ x \in \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}; \frac{2i}{2^{k+1}}\right); \\ 0 & \text{вне } \ \left[\frac{2i-2}{2^{k+1}}; \frac{2i}{2^{k+1}}\right]. \end{cases}$$

В точках 0 и 1 функция $\chi_n(x)$ полагается равной пределу справа и слева соответственно, а в остальных точках отрезка $[0,1]$ — среднему арифметическому правого и левого пределов.

В [4] рассматривалась ρ-регулярная сходимость, т. е. такая сходимость рядов Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\chi_{n,m}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\chi_n(x)\chi_m(y),$$

что последовательность прямоугольных частичных сумм $S_{N,M}(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{N}\sum\limits_{m=1}^{M} a_{n,m}\chi_{n,m}(x,y)$ сходится к $S(x,y)$ при $\min(M,N) \to \infty$ и $\min(N/M, M/N) \ge \rho$. Заметим, что такая сходимость является более общей, чем сходимость по прямоугольникам. При каждом ρ, равном целой отрицательной степени двойки, в [4] был построен интеграл, названный P_R^ρ-интегралом, с помощью которого коэффициенты всюду на $[0,1]^2$ ρ-регулярно сходящегося ряда Хаара восстанавливаются по обычным формулам Фурье. В данной работе результаты [4] значительно усиливаются. Будет построено семейство обобщенных интегралов перроновского типа, при помощи которых по обычным формулам Фурье восстанавливаются коэффициенты двумерных рядов Хаара, удовлетворяющих условиям, более общим, чем ρ-регулярная сходимость.

Воспользуемся следующей терминологией ([5], [6]). Точка $a \in [0,1]$ называется двоично-рациональной (обозначение $a \in R$), если $a = p/2^n$, где p, n — целые неотрицательные числа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-00428).

Точки множества $[0,1] \setminus A$ называются двоично-иррациональными, а множество таких точек обозначается через I.

Двумерный замкнутый интервал вида

$$\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right] \times \left[\frac{q}{2^m}, \frac{q+1}{2^m}\right],$$

где $n, m = 0, 1 \ldots$; $p = 0, \ldots, 2^n - 1$; $q = 0, \ldots, 2^m - 1$, будем называть двоичным интервалом, а пару чисел (n, m) — его рангом. Двоичный интервал ранга (n, n) назовем двоичным квадратом.

Пусть $(x, y) \in [0,1]^2$, а $\{\Delta_{k,l}\}$ — двойная последовательность двоичных интервалов. Назовем эту последовательность основной для точки (x, y), если $(x, y) \in \Delta_{k,l}$ для любых k, l, $\Delta_{k+1,l} \subset \Delta_{k,l}$, $\Delta_{k,l+1} \subset \Delta_{k,l}$, а также ранг $\Delta_{k,l}$ равен (k, l). В зависимости от того, сколько у точки (x, y) двоично-рациональных координат и лежит ли эта точка на границе единичного квадрата, существует одна, две или четыре основные последовательности для точки (x, y). Если $x, y \in I$, то существует единственная последовательность $\{\Delta_{k,l}\}$, основная для (x, y). Если $x \in R$ и $y \in I$ (или $x \in I$, $y \in R$), то существуют две последовательности $\{\Delta_{k,l}\}$, основные для точки (x, y), за исключением случая, когда (x, y) лежит на границе $[0,1]^2$. Естественным образом назовем их "левой" и "правой" ("верхней" и "нижней" соответственно) основными последовательностями. В случае, когда $x, y \in R$, существуют четыре основных для точки (x, y) последовательности $\{\Delta_{k,l}\}$, если (x, y) не лежит на границе $[0,1]^2$. Назовем их "левой верхней", "левой нижней", "правой верхней" и "правой нижней".

Рассмотрим функцию

$$\Psi(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\Delta} a_{n,m} \chi_{n,m}(x, y) dx\, dy. \tag{2}$$

В [4] отмечалось, что если Δ — двоичный интервал, то лишь конечное число значений $\int\limits_{\Delta} a_{n,m} \chi_{n,m}(x, y) dx\, dy$ отлично от нуля. Более того, если $\Delta_{k,l}$ — двоичный интервал ранга (k, l), то

$$S_{2^k, 2^l}(x, y) = \frac{\Psi(\Delta_{k,l})}{|\Delta_{k,l}|}, \tag{3}$$

где (x, y) — любая внутренняя точка интервала $\Delta_{k,l}$. Кроме того, функция $\Psi(\Delta)$ является аддитивной (точнее, конечно-аддитивной) функцией двоичного интервала. Это означает, что если $\Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_p$ — двоичные интервалы, причем $\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{p} \Delta_i$, а интервалы Δ_i попарно не перекрываются (т. е. их внутренности попарно не пересекаются), то имеет место равенство $\Psi(\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{p} \Psi(\Delta_i)$.

Дадим еще несколько определений [7].

Определение 1. *Параметром регулярности* двоичного интервала Δ назовем число $\rho(\Delta)$, равное отношению длин минимальной и максимальной сторон Δ.

Очевидно, что если $\Delta_{n,m}$ — двоичный интервал ранга (n, m), то $\rho(\Delta_{n,m}) = 2^{-|m-n|}$.

Определение 2. Функцию двоичного интервала $\Phi(\Delta)$ назовем *супераддитивной* (обозначение $\Phi \in \overline{A}$), если для любого набора двоичных интервалов $\Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_p$ таких, что $\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{p} \Delta_i$, а интервалы Δ_i попарно не перекрываются, имеет место неравенство $\sum\limits_{i=1}^{p} \Phi(\Delta_i) \le \Phi(\Delta)$. Функцию $\Phi(\Delta)$ назовем *субаддитивной* (обозначение $\Phi \in \underline{A}$), если функция $-\Phi$ является супераддитивной.

Как и в [4], рассматриваем ρ, равные целой отрицательной степени двойки.

Утверждение 1. *Пусть $x, y \in I$. Если подпоследовательность частичных сумм двумерного ряда Хаара $S_{2^{n_k},2^{n_k}}(x,y)$ сходится к конечной сумме $S(x,y)$, то для (единственной) последовательности двоичных интервалов $\{\Delta_{k,l}\}$, основной для точки (x,y), выполняется условие*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Psi(\Delta_{n_k,n_k})}{|\Delta_{n_k,n_k}|}=S(x,y).$$

Доказательство сразу следует из формулы (3).

Утверждение 2. *Пусть $x \in R$, $y \in I$ и для любого $i = 0,1$ существует подпоследовательность $n_k = n_k(i,x,y)$ такая, что при $l_k = 2^{n_k-1} + [x2^{n_k-1}] + i$ выполняется условие $\sum\limits_{s=1}^{2^{n_k}} a_{l_k,s}\chi_{l_k,s}(x,y) \to 0$, $k \to \infty$ (здесь $[y]$ есть целая часть числа y). Тогда для любой последовательности двоичных интервалов $\{\Delta_{k,l}\}$, основной для точки (x,y), выполняется равенство*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Psi(\Delta_{n_k,n_k})-\frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n_k-1,n_k})}{|\Delta_{n_k,n_k}|}=0. \tag{4}$$

Аналогично, пусть $x \in I$, $y \in R$ и для любого $j = 0,1$ существует подпоследовательность $n_k{=}n_k(j,x,y)$ такая, что при $m_k{=}2^{n_k-1}{+}[y2^{n_k-1}]{+}j$ выполняется условие $\sum\limits_{s=1}^{2^{n_k}} a_{s,m_k}\chi_{s,m_k}(x,y){\to}0$, $k \to \infty$. Тогда для любой последовательности двоичных интервалов $\{\Delta_{k,l}\}$, основной для точки (x,y), выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Psi(\Delta_{n_k,n_k})-\frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n_k,n_k-1})}{|\Delta_{n_k,n_k}|}=0. \tag{5}$$

Доказательство. Обоснуем формулу (4) (доказательство формулы (5) аналогично), причем для "правой" основной последовательности (для "левой" аналогично). Тогда $l_k = 2^{n_k-1} + [x2^{n_k-1}] + 1$. Имея при достаточно малом $\varepsilon = \varepsilon(n_k)$ равенство

$$\sum_{s=1}^{2^{n_k}} a_{l_k,s}\chi_{l_k,s}(x,y) = C\sum_{s=1}^{2^{n_k}} a_{l_k,s}\chi_{l_k,s}(x+\varepsilon,y) = C(S_{2^{n_k},2^{n_k}}(x+\varepsilon,y)-S_{2^{n_k-1},2^{n_k}}(x+\varepsilon,y)), \tag{6}$$

где C равно 1 или 1/2, применим к его правой части формулу (3). Получим

$$\sum_{s=1}^{2^{n_k}} a_{l_k,s}\chi_{l_k,s}(x,y) = C\frac{\Psi(\Delta_{n_k,n_k})-\frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n_k-1,n_k})}{|\Delta_{n_k,n_k}|},$$

откуда следует (4). □

Замечание 1. Согласно (6) утверждение 2 остается, в частности, в силе, если ряд Хаара сходится к конечной сумме в точке (x,y) ρ-регулярно или по прямоугольникам.

Утверждение 3. *Пусть $x, y \in R$ и для любых $i,j = 0,1$ существует такая подпоследовательность $n_k = n_k(i,j,x,y)$, что при $l_k = 2^{n_k-1} + [x2^{n_k-1}] + i$, $m_k = 2^{n_k-1} + [y2^{n_k-1}] + j$ выполняется предельное соотношение $a_{l_k,m_k}\chi_{l_k,m_k}(x,y) \to 0$, $k \to \infty$. Тогда для любой последовательности двоичных интервалов $\{\Delta_{k,l}\}$, основной для точки (x,y), выполняется равенство*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Psi(\Delta_{n_k,n_k})-\frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n_k-1,n_k})-\frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n_k,n_k-1})+\frac{1}{4}\Psi(\Delta_{n_k-1,n_k-1})}{|\Delta_{n_k,n_k}|}=0. \tag{7}$$

Доказательство. Будем доказывать формулу (7) для "правой верхней" основной последовательности (для трех других случаев доказательство аналогично). Возьмем $l_k = 2^{n_k-1} + [x2^{n_k-1}] + 1$, $m_k = 2^{n_k-1} + [y2^{n_k-1}] + 1$.

При достаточно малом $\varepsilon=\varepsilon(n_k)$ имеем следующую цепочку равенств, последнее из которых следует из формулы (3):

$$a_{l_k,m_k}\chi_{l_k,m_k}(x,y)=Ca_{l_k,m_k}\chi_{l_k,m_k}(x+\varepsilon,y+\varepsilon)=C(S_{2^{n_k},2^{n_k}}(x+\varepsilon,y+\varepsilon)-$$
$$-S_{2^{n_k-1},2^{n_k}}(x+\varepsilon,y+\varepsilon)-S_{2^{n_k},2^{n_k-1}}(x+\varepsilon,y+\varepsilon)+S_{2^{n_k-1},2^{n_k-1}}(x+\varepsilon,y+\varepsilon))=$$
$$=C\frac{\Psi(\Delta_{n_k,n_k})-\frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n_k-1,n_k})-\frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n_k,n_k-1})+\frac{1}{4}\Psi(\Delta_{n_k-1,n_k-1})}{|\Delta_{n_k,n_k}|},$$

где C равно 1, 1/2 или 1/4. Отсюда и следует (7). $\square$

Замечание 2. Утверждение остается в силе, если ряд Хаара сходится к конечной сумме в точке (x,y) ρ-регулярно или по прямоугольникам. Действительно, в этом случае общий член ряда Хаара стремится соответствующим образом к нулю и выполнены все условия данного утверждения.

Перепишем условия (4), (5) и (7) в другом виде. Пусть $\{\Delta_{k,l}\}$ — основная для некоторой точки (x,y) последовательность двоичных интервалов. Обозначим $\Delta_n^1=\Delta_{n,n}$, $\Delta_n^2=\overline{\Delta_{n-1,n}\setminus\Delta_{n,n}}$, $\Delta_n^4=\overline{\Delta_{n,n-1}\setminus\Delta_{n,n}}$, $\Delta_n^3=\overline{\Delta_{n-1,n-1}\setminus(\Delta_{n-1,n}\cup\Delta_{n,n-1})}$ (в правой части последних равенств стоят замыкания соответствующих множеств). Очевидно, $\{\Delta_n^i\}_{i=1}^4$ — набор неперекрывающихся двоичных квадратов ранга (n,n), составляющих в объединении квадрат $\Delta_{n-1,n-1}$.

Для того чтобы переписать условие (4) в другом виде, заметим, что

$$\Psi(\Delta_{n,n})-\frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n-1,n})=\Psi(\Delta_n^1)-\frac{1}{2}\Psi(\Delta_n^1\cup\Delta_n^2)=\frac{1}{2}(\Psi(\Delta_n^1)-\Psi(\Delta_n^2))$$

(если функция Ψ аддитивна). Таким образом, формула (4) эквивалентна формуле

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Psi(\Delta_{n_k}^1)-\Psi(\Delta_{n_k}^2)}{|\Delta_{n_k}^1|}=0. \tag{8}$$

Аналогично, (5) эквивалентна (для аддитивных функций) формуле

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Psi(\Delta_{n_k}^1)-\Psi(\Delta_{n_k}^4)}{|\Delta_{n_k}^1|}=0, \tag{9}$$

а (7) — формуле

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Psi(\Delta_{n_k}^1)-\Psi(\Delta_{n_k}^2)+\Psi(\Delta_{n_k}^3)-\Psi(\Delta_{n_k}^4)}{|\Delta_{n_k}^1|}=0. \tag{10}$$

Сформулируем и докажем теорему, являющуюся обобщением теоремы 1 из [4]. Схемы доказательств обеих теорем похожи. Подобные теоремы в теории интегралов перроновского типа (напр., [7], с. 20; [8], с. 453) носят название “теорем о монотонности” и применяются для построения соответствующих интегралов.

Теорема 1. *Пусть функция $\Phi\in\overline{A}$ удовлетворяет следующим свойствам (если $\{\Delta_{k,l}\}=\{\Delta_{k,l}^i\}$ — одна из основных для соответствующей точки (x,y) последовательностей двоичных интервалов):*

1. *если $(x,y)\in I\times I$, то для некоторой последовательности номеров $n_k(x,y)$ выполняется неравенство*
$$\varliminf_{k\to\infty}\frac{\Phi(\Delta_{n_k(x,y)}^1)}{|\Delta_{n_k(x,y)}^1|}\geq 0;$$
2. *если $(x,y)\in R\times I$, то для функции $\Phi(\Delta)$ и некоторой последовательности номеров $n_k=n_k(i,x,y)$ выполняется условие (8);*
3. *если $(x,y)\in I\times R$, то для функции $\Phi(\Delta)$ и некоторой последовательности номеров $n_k=n_k(i,x,y)$ выполняется условие (9);*

4. *если $(x,y) \in R \times R$, то для функции $\Phi(\Delta)$ и некоторой последовательности номеров $n_k = n_k(i,x,y)$ выполняется условие* (10).

Тогда $\Phi(\Delta) \ge 0$ для любого двоичного интервала Δ.

Доказательство. Предположим, что существует двоичный интервал Δ, на котором $\Phi(\Delta) < 0$. Разобьем Δ на конечное число попарно неперекрывающихся двоичных квадратов Δ_i, $i = 0,\dots,n$. Тогда в силу супераддитивности Φ выполнено неравенство $\sum\limits_{i=0}^{n} \Phi(\Delta_i) \le \Phi(\Delta) < 0$, а значит, существует двоичный квадрат Δ_0, на котором $\Phi(\Delta_0) < 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $\Phi(\Delta_0) + \varepsilon|\Delta_0| < 0$. Положим $F(\Delta) = \Phi(\Delta) + \varepsilon|\Delta|$. Очевидно, $F \in \overline{A}$, а условия (8)–(10) выполняются для функции Φ тогда и только тогда, когда они выполняются для F.

Индукционно построим последовательность двоичных квадратов $\{I_n\}_{n\ge n_0}$ ранга (n,n), а также последовательность пар $(i_n,j_n)_{n\ge n_0}$, где i_n и j_n равны либо нулю, либо единице, следующим образом.

1) Заметим, что $F(I_{n_0}) < 0$ при $I_{n_0} \equiv \Delta_0, i_{n_0} = j_{n_0} = 0$. Это основание индукции.

2) Пусть $I_n = [k/2^n;(k+1)/2^n] \times [l/2^n;(l+1)/2^n]$, $n \ge n_0$. Разобьем I_n на четыре смежных квадрата $I_{n+1}^{p,q}$, $p,q = 0,1$, где

$$I_{n+1}^{p,q} = \left[\frac{2k+p}{2^{n+1}}; \frac{2k+p+1}{2^{n+1}}\right] \times \left[\frac{2l+q}{2^{n+1}}; \frac{2l+q+1}{2^{n+1}}\right].$$

Положим $F(I_n) < 0$. Убедимся, что $F(I_{n+1}) < 0$. В качестве I_{n+1} выберем один из интервалов $I_{n+1}^{p,q}$ по такому правилу:

А) если $F\left(I_{n+1}^{p_0,q_0}\right) < 0$ ровно для одного набора (p_0,q_0), то $I_{n+1} = I_{n+1}^{p_0,q_0}$, $(i_{n+1},j_{n+1}) = (p_0,q_0)$;

Б) если $F\left(I_{n+1}^{p,q}\right) < 0$ для трех или четырех наборов (p,q), то среди этих наборов возьмем тот набор (p_0,q_0), который в последовательности (i_k,j_k) при $n_0 \le k \le n$ в последний раз встречался раньше; если какой-то набор раньше не встречался, то его можно взять в качестве искомого и тогда $I_{n+1} = I_{n+1}^{p_0,q_0}$, $(i_{n+1},j_{n+1}) = (p_0,q_0)$;

В) если $F\left(I_{n+1}^{p,q}\right) < 0$ ровно для двух наборов (p_1,q_1) и (p_2,q_2), то рассмотрим три подслучая.

В1) Если $p_1 \ne p_2$ и $q_1 \ne q_2$, т. е. $I_{n+1}^{p_1,q_1}$, $I_{n+1}^{p_2,q_2}$ соприкасаются только по вершине, то поступаем как в п. Б).

В2) Если $I_{n+1}^{p_1,q_1}$ и $I_{n+1}^{p_2,q_2}$ пересекаются по стороне и $F(I_{n+1}^{p_k,q_k}) < F(I_n)/3$ при $k = 1,2$, то снова поступаем как в п. Б).

В3) Если $I_{n+1}^{p_1,q_1}$ и $I_{n+1}^{p_2,q_2}$ пересекаются по стороне и $F(I_{n+1}^{p_1,q_1}) \ge F(I_n)/3$, то $I_{n+1} = I_{n+1}^{p_2,q_2}$, $(i_{n+1},j_{n+1}) = (p_2,q_2)$. В силу супераддитивности F имеем $\sum\limits_{p=0}^{1}\sum\limits_{q=0}^{1} F(I_{n+1}^{p,q}) \le F(I_n)$, значит, $F(I_{n+1}^{p_2,q_2}) \le F(I_n) - F(I_n)/3 - 0 - 0 = 2F(I_n)/3$.

Рассмотрим последовательности $(i_n)_{n\ge n_0}$, $(j_n)_{n\ge n_0}$. Возможны следующие варианты.

1) В обеих последовательностях как 0, так и 1 встречаются бесконечное число раз. Тогда $I_n \to (x,y) \in I \times I$. Так как $F(I_n) < 0$, то

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\Phi(I_n)}{|I_n|} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{F(I_n) - \varepsilon|I_n|}{|I_n|} \le -\varepsilon,$$

что противоречит первому условию теоремы. Противоречие доказывает теорему в этом случае.

2) В одной из последовательностей (скажем, в i_n) одна из цифр встречается конечное число раз, скажем $i_n = \mathrm{const}$ при $n \ge N_0$, а в другой обе цифры встречаются бесконечное число раз. Значит, $I_n \to (x,y) \in R \times I$. Пусть $F(I_{N_0}) = \delta < 0$. Рассмотрим I_n, $n \ge N_0$. Тогда выбор интервала I_{n+1} происходит с помощью одного из вариантов А), В2) или В3):

А) $\Rightarrow$ $F(I_{n+1}) \le F(I_n) - \sum\limits_{I_{n+1}^{p,q} \ne I_{n+1}} F(I_{n+1}^{p,q}) \le F(I_n)$;

В2) $\Rightarrow$ $F(I_{n+1}) \le F(I_n)/3$;

В3) $\Rightarrow$ $F(I_{n+1}) \le 2F(I_n)/3$.

Отсюда по индукции $F(I_n) \le \delta 3^{-(n-N_0)} = \delta 3^{N_0} 3^{-n}$ при $n \ge N_0 + 1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(I_n^1) - F(I_n^2)}{|I_n|} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^{-n}} (\delta 3^{N_0} 3^{-n} - 0) = \lim_{n\to\infty} \delta 3^{N_0} \left(\frac{4}{3}\right)^n = -\infty.$$

Это противоречит условию 2 теоремы. Если бы только в последовательности j_n одна из цифр встречалась конечное число раз, то пришли бы к противоречию с условием 3 теоремы. В обоих случаях противоречие доказывает теорему.

3) Пусть как в последовательности i_n, так и в последовательности j_n какая-то из цифр 0 либо 1 (возможно, разная для обеих последовательностей) встречается конечное число раз. Тогда $I_n \to (x, y) \in R \times R$. Пусть $i_n = c_1$, $j_n = c_2$ при $n \ge N_0$. Рассмотрим $I_n, n \ge N_0$. Тогда выбор I_n происходит с помощью одного из вариантов A) или B3). Точно так же, как и выше, показывается, что если $F(I_{N_0}) = \delta < 0$, то $F(I_n) \le \delta 3^{N_0} 3^{-n}$ при $n \ge N_0 + 1$. Рассмотрим выражение $D_n = \frac{1}{|I_n^1|} \sum\limits_{i=1}^{4} (-1)^{i-1} F(I_n^i)$. Покажем, что оно стремится к $-\infty$. Тогда, получив противоречие с условием 4) теоремы, докажем тем самым саму теорему. Имеем

$$D_n = \frac{1}{|I_n^1|} \left(\sum_{i=1}^{4} F(I_n^i) - 2(F(I_n^2) + F(I_n^4)) \right) \le \frac{1}{|I_n^1|} (F(I_{n-1}) - 2(F(I_n^2) + F(I_n^4))).$$

Если выбор I_n происходит с помощью варианта A), то $F(I_n^2)$ и $F(I_n^4)$ не меньше нуля, а если выбор происходит с помощью варианта B3), то одно из значений $F(I_n^2)$ и $F(I_n^4)$ не меньше нуля, а второе не меньше $F(I_{n-1})/3$. В любом случае $2(F(I_n^2) + F(I_n^4)) \ge 2F(I_{n-1})/3$.

Тогда

$$D_n \le \frac{1}{|I_n^1|} \left(F(I_{n-1}) - \frac{2}{3} F(I_{n-1}) \right) = \frac{1}{3\,|I_n^1|} F(I_{n-1}) \le \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} \delta 3^{N_0} 3^{-(n-1)} = \delta 3^{N_0} \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = -\infty$. $\square$

Сделаем ряд комментариев. Теорема 1 обобщает теорему 1 из [4] сразу по нескольким направлениям. Во-первых, функция Φ, неотрицательность которой требуется доказать, не аддитивна, а супераддитивна (в частности, может быть и аддитивна). Во-вторых, пределы некоторых соотношений (см. (8)–(10)) берутся не для всех 2ρ-регулярных двоичных интервалов, а для двоичных квадратов, тем самым сужая условия теоремы и усиливая ее общность. В-третьих, эти же пределы берутся не по последовательностям, а по подпоследовательностям (вообще говоря, разным для различных точек (x, y)), что тоже сужает условия теоремы. Наконец, условие 1 только что доказанной теоремы у́же условия 1 теоремы 1 из [4].

Теорема 1, являясь "теоремой о монотонности", по сути открывает возможность построения соответствующего интеграла. Предыдущий абзац фактически является доказательством того, что новый интеграл будет не у́же (P_R^ρ)-интеграла, введенного в [4].

Определение 3. Пусть функция $f(x, y)$ определена на $I_0 = [0, 1]^2$ (или хотя бы на $I \times I$). Пусть для каждой точки $(x, y) \in I_0$ и для каждой последовательности $\{\Delta_{k,l}^i\}$, основной для точки (x, y), выбрана своя подпоследовательность номеров $n_k(x, y, i)$. Скажем, что функция f $(P_R(n_k))$-интегрируема, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции $F_1 \in \overline{A}$, $F_2 \in \underline{A}$ со следующими свойствами.

1. $\underline{\lim}\limits_{k\to\infty} \frac{F_1(\Delta_{n_k, n_k})}{|\Delta_{n_k, n_k}|} \ge f(x, y) \ge \overline{\lim}\limits_{k\to\infty} \frac{F_2(\Delta_{n_k, n_k})}{|\Delta_{n_k, n_k}|}$, если $(x, y) \in I \times I$.
2. Если $(x, y) \notin I \times I$, то для функций F_1 и F_2 выполняются условия (8)–(10) в зависимости от того, принадлежит (x, y) $R \times I$, $I \times R$ или $R \times R$ соответственно.
3. $F_1(I_0) - F_2(I_0) < \varepsilon$.

Тогда конкретным является определение интеграла в виде

$$(P_R(n_k)) \int_{I_0} f(t,v)dt\,dv = \sup_{F_2} F_2(I_0) = \inf_{F_1} F_1(I_0).$$

Теорема 1 гарантирует корректность введенного интеграла. Корректность понимается в том смысле, что при выполнении условий 1 и 2 данного определения невозможна ситуация, при которой для какой-то пары функций F_1 и F_2 и некоторого двоичного интервала Δ выполняется неравенство $F_1(\Delta) < F_2(\Delta)$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2. *Пусть ряд Хаара обладает следующими свойствами.*

1. *Если $x, y \in I$, то существует такая подпоследовательность $n_k(x,y)$, что $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2^{n_k},2^{n_k}}(x,y) = S(x,y)$.*
2. *Если $x \in R$, $y \in I$, то для любого $i = 0,1$ существует такая подпоследовательность $n_k = n_k(i,x,y)$, что при $l_k = 2^{n_k-1} + [x2^{n_k-1}] + i$ выполняется условие $\sum\limits_{s=1}^{2^{n_k}} a_{l_k,s}\chi_{l_k,s}(x,y) \to 0$, $k \to \infty$.*
3. *Если $x \in I$, $y \in R$, то для любого $j = 0,1$ существует такая подпоследовательность $n_k = n_k(j,x,y)$, что при $m_k = 2^{n_k-1} + [y2^{n_k-1}] + j$ выполняется условие $\sum\limits_{s=1}^{2^{n_k}} a_{s,m_k}\chi_{s,m_k}(x,y) \to 0$, $k \to \infty$.*
4. *Если $x \in R$, $y \in R$, то для любых $i,j = 0,1$ существует такая подпоследовательность $n_k = n_k(i,j,x,y)$, что при $l_k = 2^{n_k-1} + [x2^{n_k-1}] + i$, $m_k = 2^{n_k-1} + [y2^{n_k-1}] + j$ выполняется условие $a_{l_k,m_k}\chi_{l_k,m_k}(x,y) \to 0$, $k \to \infty$.*

Тогда функция $S(x,y)$ является $(P_R(n_k))$-интегрируемой и ряд Хаара будет рядом Фурье этой функции относительно построенного интеграла, т.е. коэффициенты этого ряда будут восстанавливаться по обычным формулам Фурье

$$a_{n,m} = (P_R(n_k)) \int_{I_0} S(x,y)\chi_{n,m}(x,y)dx\,dy.$$

Доказательство. Пусть $\Psi(\Delta)$ — функция, однозначно определяемая для ряда Хаара $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\chi_{n,m}(x,y)$ по формуле (2). Положим $F_1(\Delta) = F_2(\Delta) \equiv \Psi(\Delta)$. Покажем, что функции F_1 и F_2, будучи аддитивными, удовлетворяют всем условиям определения $(P_R(n_k))$-интеграла при любом $\varepsilon > 0$. Так как $S_{2^{n_k},2^{n_k}}(x,y) \to S(x,y)$ при $(x,y) \in I \times I$, то в силу утверждения 1 имеет место цепочка равенств

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{F_1(\Delta_{n_k,n_k})}{|\Delta_{n_k,n_k}|} = S(x,y) = \lim_{k\to+\infty} \frac{F_2(\Delta_{n_k,n_k})}{|\Delta_{n_k,n_k}|}.$$

Следовательно, выполняется первое условие определения $(P_R(n_k))$-интеграла. Так как ряд Хаара удовлетворяет условию 2 теоремы 2, то согласно утверждению 2 (на с. 47) в точках $(x,y) \in R \times I$ аддитивные функции F_1 и F_2 удовлетворяют условию (4), а значит, и условию (8). Аналогично в точках $(x,y) \in I \times R$ и $(x,y) \in R \times R$ функции F_1 и F_2 удовлетворяют условиям (9) и (10) соответственно. Таким образом, выполнены первые два условия из определения $(P_R(n_k))$-интеграла. Наконец, условие 3 из этого определения выполнено, т. к. $F_1(I_0) - F_2(I_0) = \Psi(I_0) - \Psi(I_0) = 0 < \varepsilon$ для всякого $\varepsilon > 0$.

Имеем следующую цепочку соотношений:

$$(P_R(n_k)) \int_{\Delta} S(x,y)dx\,dy = \sup_{F_2} F_2(\Delta) \geq \Psi(\Delta) \geq \inf_{F_1} F_1(\Delta) = (P_R(n_k)) \int_{\Delta} S(x,y)dx\,dy.$$

Следовательно, $(P_R(n_k)) \int\limits_{\Delta} S(x,y)dx\,dy = \Psi(\Delta)$.

Получили, что функция $S(x,y)$ $(P_R(n_k))$-интегрируема на всяком двоичном интервале Δ, в частности, на I_0.

Покажем теперь, что ряд Хаара является рядом Фурье функции $S(x,y)$ относительно $(P_R(n_k))$-интеграла, т. е. что при $n,m=1,2,\ldots$ выполнено равенство

$$a_{n,m} = (P_R(n_k))\int_{I_0} S(x,y)\chi_{n,m}(x,y)dx\,dy.$$

Сначала рассмотрим случай $n>1$ и $m>1$. Пусть

$$\Delta_{k,l} = [(i-1)/2^k, i/2^k]\times[(j-1)/2^l, j/2^l]$$

— носитель функции $\chi_{n,m}(x,y)$. Обозначим

$$\Delta_1 = \left[\frac{2i-2}{2^{k+1}},\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right]\times\left[\frac{2j-2}{2^{l+1}},\frac{2j-1}{2^{l+1}}\right];\quad \Delta_2 = \left[\frac{2i-2}{2^{k+1}},\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right]\times\left[\frac{2j-1}{2^{l+1}},\frac{2j}{2^{l+1}}\right];$$
$$\Delta_3 = \left[\frac{2i-1}{2^{k+1}},\frac{2i}{2^{k+1}}\right]\times\left[\frac{2j-1}{2^{l+1}},\frac{2j}{2^{l+1}}\right];\qquad \Delta_4 = \left[\frac{2i-1}{2^{k+1}},\frac{2i}{2^{k+1}}\right]\times\left[\frac{2j-2}{2^{l+1}},\frac{2j-1}{2^{l+1}}\right].$$

Тогда $\Delta_{k,l}$ есть объединение попарно неперекрывающихся интервалов Δ_i.

Пусть $x,y\in I$ и (x,y) — внутренняя точка Δ_1. Тогда

$$a_{n,m} = \frac{a_{n,m}\chi_{n,m}(x,y)}{\chi_{n,m}(x,y)} = \frac{\left(S_{2^{k+1},2^{l+1}} - S_{2^k,2^{l+1}} - S_{2^{k+1},2^l} + S_{2^k,2^l}\right)(x,y)}{\chi_{n,m}(x,y)} =$$
$$= \frac{1}{\chi_{n,m}(x,y)}\left(\frac{\Psi(\Delta_1)}{|\Delta_1|} - \frac{\Psi(\Delta_1)+\Psi(\Delta_4)}{|\Delta_1\bigcup\Delta_4|} - \frac{\Psi(\Delta_1)+\Psi(\Delta_2)}{|\Delta_1\bigcup\Delta_2|} + \frac{\sum\limits_{i=1}^4\Psi(\Delta_i)}{|\Delta_1\bigcup\Delta_2\bigcup\Delta_3\bigcup\Delta_4|}\right) =$$
$$= \frac{1}{\chi_{n,m}(x,y)|\Delta_1|}\left(\Psi(\Delta_1) - \frac{\Psi(\Delta_1)+\Psi(\Delta_4)}{2} - \frac{\Psi(\Delta_1)+\Psi(\Delta_2)}{2} + \frac{\sum\limits_{i=1}^4\Psi(\Delta_i)}{4}\right) =$$
$$= \frac{1}{\chi_{n,m}(x,y)\frac14|\Delta_{k,l}|}\frac14\sum_{i=1}^4(-1)^{i-1}\Psi(\Delta_i) = \chi_{n,m}(x,y)\sum_{i=1}^4(-1)^{i-1}\Psi(\Delta_i) =$$
$$= \chi_{n,m}(x,y)\sum_{i=1}^4(-1)^{i-1}\int_{\Delta_i} S(t,v)dt\,dv = \int_{I_0}\chi_{n,m}(t,v)S(t,v)dt\,dv,$$

что и требовалось.

Аналогично рассматриваются случаи $n>1$, $m=1$ и $n=1$, $m>1$. Осталось рассмотреть случай $n=m=1$. В силу формулы (3) имеем

$$a_{1,1} = S_{1,1}(x,y) = \Psi(I_0) = (P_R(n_k))\int_{I_0} S(x,y)dx\,dy = (P_R(n_k))\int_{I_0} S(x,y)\chi_{1,1}(x,y)dx\,dy. \quad \square$$

Остается открытым вопрос: зависит ли значение $(P_R(n_k))$-интеграла при фиксированной функции $f(x,y)$ от выбора последовательностей n_k? Если $f(x,y)$ хотя бы (P_R^ρ)-интегрируема, то f является $(P_R(n_k))$-интегрируемой при всех $n_k = n_k(x,y,i,j)$ и

$$(P_R^\rho)\int_{I_0} f(t,v)dt\,dv = (P_R(n_k))\int_{I_0} f(t,v)dt\,dv,$$

т. е. для таких функций ответ на поставленный вопрос оказывается отрицательным.

В одномерном случае интеграл, подобный $(P_R(n_k))$-интегралу, был построен в работе [9].

Литература

1. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 2. – М.: Мир, 1965. – 537 с.
2. Ульянов П.Л. *О рядах по системе Хаара* // Матем. сб. – 1964. – Т. 63. – № 3. – С. 356–391.
3. McLaughlin J.R., Price J.J. *Comparison of Haar series with gaps with trigonometric series* // Pacif. J. Math. – 1969. – V. 28. – № 3. – P. 623–627.
4. Плотников М.Г. *О единственности всюду сходящихся кратных рядов Хаара* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем. – 2001. – № 1. – С. 23–28.
5. Скворцов В.А. *Дифференцирование относительно сетей и ряды Хаара* // Матем. заметки. – 1968. – Т. 4. – Вып. 1. – С. 33–40.
6. Скворцов В.А. *О множествах единственности для многомерных рядов Хаара* // Матем. заметки. – 1973. – Т. 14. – № 6. – С. 789–798.
7. Ostaszewski K.M. *Henstock integration in the plane* // Mem. Amer. Math. Soc. – 1986. – V. 63. – № 353. – 106 p.
8. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* – 3-е изд. – СПб. – 1999. – 421 с.
9. Скворцов В.А. *О рядах Хаара, сходящихся по подпоследовательности частичных сумм* // ДАН СССР. – 1968. – Т. 183. – № 4. – С. 784–786.

Вологодская государственная
молочно-хозяйственная академия

Поступила
25.06.2002