ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 3 (454)

УДК 512.554.31

С.А. КИРИЛЛОВ, М.И. КУЗНЕЦОВ, Н.Г. ЧЕБОЧКО

О ДЕФОРМАЦИЯХ АЛГЕБРЫ ЛИ ТИПА G_2 ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРИ

В связи с проблемой классификации простых алгебр Ли над полями малой характеристики p представляет интерес описание деформаций классических алгебр Ли. Глобальной деформацией алгебры Ли L называется семейство алгебр Ли, параметризованных точками связного гладкого многообразия, одной из точек которого соответствует алгебра Ли L. Пусть $\mathcal{L}$ — многообразие структур алгебр Ли на векторном пространстве V. Алгебра Ли называется жесткой, если существует окрестность L (в топологии Зарисского на $\mathcal{L}$), все точки которой являются алгебрами Ли, изоморфными L.

Известно [1], что над полем характеристики $p > 3$ все классические алгебры Ли являются жесткими. Над полем характеристики 3 ситуация иная. Было обнаружено [2], что корневую систему типа C_2 могут иметь неизоморфные алгебры Ли. Глобальные деформации алгебры Ли C_2 построены в [3]. Позднее было показано [4], что алгебра Ли C_2 — единственная среди алгебр Ли серий A_n, B_n, C_n, D_n, допускающая нетривиальные деформации при $p = 3$. Полное описание глобальных деформаций алгебры Ли C_2 получено в [5].

В данной статье доказывается жесткость исключительной классической алгебры Ли типа G_2 над алгебраически замкнутым полем K характеристики $p = 3$.

Орбиты естественного действия группы $G = \mathrm{GL}(V)$ на $\mathcal{L}$ соответствуют классам изоморфизма алгебр Ли. Пусть $T_L(\mathcal{L})$ — касательное пространство к многообразию $\mathcal{L}$ в точке $L \in \mathcal{L}$, $T_L(G(L))$ — касательное пространство к G-орбите точки L. Согласно [5] пространство локальных деформаций $H_{\mathrm{loc}}(L) = T_L(\mathcal{L})/T_L(G(L))$ является фактором группы когомологий $H^2(L, L)$. Таким образом, условие $H^2(L, L) = 0$ является достаточным условием жесткости алгебры Ли L. В работе доказывается, что $H^2(L, L) = 0$ для алгебры Ли типа G_2 над полем характеристики 3. Вычисление $H^2(L, L)$ проводится в несколько этапов. Стандартный комплекс $C^\bullet(L, L)$ раскладывается в прямую сумму весовых подкомплексов относительно максимального тора в группе Шевалле $G_2(K)$.

Вычисление $H^2_\gamma(L, L)$ для старшего веса γ может быть проведено непосредственно. Однако чтобы избежать вычислений, для доказательства тривиальности $H^2_\gamma(L, L)$ применяем спектральную последовательность Серра–Хохшильда. Наибольшую трудность представляет вычисление $H^2_0(L, L)$. Используя теорию модулярных представлений группы Вейля $W = W(G_2)$, докажем, что $H^2_0(L, L)$ изоморфна второй группе когомологий веса нуль подкомплекса W-инвариантов, которая может быть эффективно вычислена.

В работе используется терминология, принятая в [10].

1. Общие сведения об алгебрах Ли типа G_2

Алгебра Ли L типа G_2 над полем K характеристики 3 получается редукцией по модулю 3 из $\mathbb{Z}$-формы, соответствующей базису Шевалле комплексной простой алгебры Ли $L_\mathbb{C}$ типа G_2.

Пусть $R = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta), \pm(2\alpha+\beta), \pm(3\alpha+\beta), \pm(3\alpha+2\beta)\}$ — система корней типа G_2, $Q = \langle R\rangle_\mathbb{Z}$. Обозначим через R_1 множество коротких корней $R_1 = \{\pm\alpha, \pm(\alpha+\beta), \pm(2\alpha+\beta)\}$, через R_2 — множество длинных корней $R_2 = \{\pm\beta, \pm(3\alpha+\beta), \pm(3\alpha+2\beta)\}$.

Умножение в $L_\mathbb{C}$ в базисе Шевалле $\{H_\alpha, H_\beta, X_\gamma,\ \gamma \in R\}$ имеет вид ([6], с. 10)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-01756).

(a) $[H_\alpha, H_\beta] = 0$;
(b) $[X_\gamma, X_{-\gamma}] = H_\gamma$, где $H_{\alpha+\beta} = H_\alpha + 3H_\beta$, $H_{2\alpha+\beta} = 2H_\alpha + 3H_\beta$, $H_{3\alpha+\beta} = H_\alpha + H_\beta$, $H_{3\alpha+2\beta} = H_\alpha + 2H_\beta$,
(c) $[H_\delta, X_\gamma] = \langle\gamma,\delta\rangle X_\gamma$, где $\langle\alpha,\alpha\rangle = 2$, $\langle\beta,\alpha\rangle = -3$, $\langle\alpha,\beta\rangle = -1$, $\langle\beta,\beta\rangle = 2$.
(d) если γ, δ, $\gamma+\delta \in R$, то $[X_\gamma, X_\delta] = N_{\gamma,\delta}X_{\gamma+\delta}$, где $N_{\gamma,\delta} = \pm(r+1)$, r — такое положительное целое число, что $\delta - r\gamma \in R$, а $\delta - (r+1)\gamma \notin R$;
(e) $[X_\gamma, X_\delta] = 0$, если $\gamma + \delta \notin R$.

Заметим, что $N_{\gamma,\delta} = 3$, только если $\gamma + \delta \in R_2$, а $\gamma, \delta \in R_1$.

Подпространство I, порожденное множеством $\{H_\alpha, X_\delta,\ \delta \in R_1\}$, является единственным собственным идеалом L. $\mathcal{H} = \langle H_\alpha, H_\beta\rangle$ — подалгебра Картана в L. Согласно [7] группа $\operatorname{Aut} L$ изоморфна группе $\operatorname{Aut} I$ и является группой Шевалле типа G_2. Группа Вейля W алгебры L является диэдральной группой порядка 12, порожденной отражениями w_α, w_β. Элемент $w = w_\beta w_\alpha$ на плоскости является поворотом на угол $\frac{\pi}{3}$ и имеет порядок 6. Согласно ([8], с. 603) групповая алгебра $A = K[W]$ имеет два блока B_1, B_2, соответствующих ортогональным идемпотентам $e_1 = w^3 - 1$, $e_2 = -(w^3 + 1)$. Тривиальный модуль принадлежит блоку B_2. Каждый блок раскладывается в прямую сумму двух главных неразложимых левых модулей размерности 3. Разложение блока B_2 имеет вид: $B_2 = A_1 \oplus A_2$, где $A_1 = (1+w^3)A(1+w_\beta)$, $A_2 = (1+w^3)A(1-w_\beta)$.

Так же, как в [6], обозначим через N подгруппу в группе Шевалле $G_2(K)$, порожденную элементами $w_\gamma(t)$, через T — подгруппу, порожденную $h_\gamma(t)$. T является максимальным тором в $G_2(K)$. Согласно ([6], с. 30) $w_\gamma(t)(X_\delta) = ct^{-\langle\delta,\gamma\rangle}X_{w_\gamma(\delta)}$, $h_\gamma(t)(X_\delta) = t^{\langle\delta,\gamma\rangle}X_\delta$, где $c = c(\gamma,\delta) = \pm1$, $c(\gamma,\delta) = c(\gamma,-\delta)$. Группа Вейля W изоморфна N/T. Обозначим $w_\gamma(1)$ через w_γ.

В дальнейшем понадобятся сведения о некоторых группах когомологий.

Предложение.
1) $H^0(I,I) = 0$, $H^0(I,L) = 0$, $H^0(I,L/I) = L/I$.
2) $H^1(I,I) = L/I$.
3) $H^1(I,L/I) = 0$, $H^1(I,L) = 0$.
4) $H^1(L,L) = 0$.

Доказательство. 1) Так как I действует нулевым образом на L/I, то $H^0(I,L/I) = L/I$. Остальные утверждения очевидны.

2) $H^1(I,I)$ является алгеброй внешних дифференцирований алгебры I. Пусть $\mathfrak{L} = \operatorname{Der}(I)$. Очевидно, $I \cong \operatorname{ad} I$, поэтому будем отождествлять I с $\operatorname{ad} I$ и считать, что $I \subset \mathfrak{L}$. Оператор $\operatorname{ad} H_\alpha$ является полупростым оператором на I, следовательно, $\operatorname{ad}(\operatorname{ad} H_\alpha)$ является полупростым оператором на $\operatorname{gl}(I)$. Так как $\mathfrak{L} \subset \operatorname{gl}(I)$, то учитывая наше отождествление I с $\operatorname{ad} I$, получаем $\operatorname{ad} H_\alpha$ — полупростой оператор на $\mathfrak{L}$. Разложим $\mathfrak{L}$ на корневые подпространства относительно $\operatorname{ad} H_\alpha$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{-1} \oplus \mathfrak{L}_0 \oplus \mathfrak{L}_1$, где $\mathfrak{L}_{-1} = \langle X_\alpha, X_{\alpha+\beta}, X_{-(2\alpha+\beta)}\rangle$, $\mathfrak{L}_1 = \langle X_{-\alpha}, X_{-(\alpha+\beta)}, X_{2\alpha+\beta}\rangle$, $\mathfrak{L}_0 = \langle D \in \mathfrak{L} \mid [D, H_\alpha] = 0\rangle$. Таким образом, $\mathfrak{L} = I + \mathfrak{L}_0$. Так как $[\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_{\pm1}] \subset \mathfrak{L}_{\pm1}$, то оператор $\operatorname{ad}|_{\mathfrak{L}_1} : \mathfrak{L}_0 \to \operatorname{gl}(\mathfrak{L}_1)$ является представлением алгебры $\mathfrak{L}_0$. Покажем, что это представление является точным. Поскольку $\mathfrak{L}_{\pm1} \subset I$ и $[\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_{-1}] \subset \mathfrak{L}_0 \cap I = \langle H_\alpha\rangle$, то произведение $[u,v]$, $u \in \mathfrak{L}_1$, $v \in \mathfrak{L}_{-1}$, определяет невырожденное $\mathfrak{L}_0$-инвариантное спаривание $\langle u,v\rangle$, $[u,v] = \langle u,v\rangle H_\alpha$. Так как $[D, H_\alpha] = 0$ для любого D из $\mathfrak{L}_0$, то $D \in \mathfrak{L}_0$ однозначно определяется своим действием на $\mathfrak{L}_1$, т. е. представление $\operatorname{ad}|_{\mathfrak{L}_1}$ подалгебры $\mathfrak{L}_0$ является точным. Рассматривая действие дифференцирования D на элемент $[[X_{-\alpha}, X_{-(\alpha+\beta)}], X_{2\alpha+\beta}] = \pm H_\alpha$, убеждаемся, что $\operatorname{ad} D|_{\mathfrak{L}_1} \in \operatorname{sl}(\mathfrak{L}_1)$. Следовательно, $\dim \mathfrak{L}_0 \le \dim \operatorname{sl}(\mathfrak{L}_1) = 8$. Так как $L \subset \operatorname{Der}(I) = \mathfrak{L}$, то $\dim \mathfrak{L}/I \ge \dim L/I = 7$. С другой стороны, $\mathfrak{L}/I \cong \mathfrak{L}_0/\langle H_\alpha\rangle \hookrightarrow \operatorname{psl}(\mathfrak{L}_1)$ и, следовательно, $\dim \mathfrak{L}/I \le 7$. В результате $\dim \mathfrak{L}/I = 7$ и $H^1(I,I) = \mathfrak{L}/I = L/I$.

3) Вычислим $H^1(I,L/I)$. Так как I действует тривиально на L/I, то достаточно вычислить $H^1(I,K)$. Но $H^1(I,K) \cong I/[I,I]) = 0$. Значит, $H^1(I,L/I) = 0$. Утверждение о тривиальности $H^1(I,L)$ следует из точной когомологической последовательности, соответствующей последовательности коэффициентов $0 \longrightarrow I \longrightarrow L \longrightarrow L/I \longrightarrow 0$, и из вычисленных выше групп.

4) Пусть $D \in \operatorname{Der}(L)$. Так как $[I,I] = I$, то $D(I) \subset I$. Согласно 2) $D|_I = \operatorname{ad} X$ для некоторого $X \in L$. Обозначим $D - \operatorname{ad} X$ через $\overline{D}$. Так как $\overline{D}|_I = 0$, то для любых $Y \in L$, $Z \in I$, $0 = \overline{D}[Y,Z] =$

$[\overline{D}(Y), Z]$ и, следовательно, $\operatorname{ad}\overline{D}(Y)|_I = 0$. Таким образом, $\overline{D}(Y) \in H^0(I, L) = 0$, отсюда $\overline{D} = 0$ и $D = \operatorname{ad} X$. Значит, $H^1(L, L) = 0$. $\square$

2. Вычисление $H^2(L, L)$

Пусть $C^\bullet(L, L)$ — стандартный комплекс алгебры Ли L. Группа $\operatorname{Aut}(L) = G_2(K)$ действует естественным образом на $C^\bullet(L, L)$. Разложим $C^\bullet(L, L)$ в прямую сумму подкомплексов, являющихся весовыми подпространствами максимального тора T из группы $\operatorname{Aut}(L)$,

$$C^\bullet(L, L) = \bigoplus_{\mu \in Q} C^\bullet_\mu(L, L).$$

Так как максимальный тор T действует тривиально на $C^\bullet_0(L, L)$, то $C^\bullet_0(L, L)$ имеет естественную структуру W-модуля, где $W = N/T$ — группа Вейля алгебры L. Используя внутреннюю градуировку ([9], с. 29) относительно элементов H_α, H_β и невырожденность матрицы Картана алгебры Ли типа G_2, получаем

$$H^\bullet(L, L) = \bigoplus_{\mu \in Q_3} H^\bullet_\mu(L, L),$$

где $Q_3 = \{k_1\alpha + k_2\beta,\ k_1 \equiv 0(3),\ k_2 \equiv 0(3)\}$, в частности,

$$H^2(L, L) = H^2_0(L, L) \oplus H^2_{\pm 3\alpha}(L, L) \oplus H^2_{\pm(3\alpha+3\beta)}(L, L) \oplus H^2_{\pm(6\alpha+3\beta)}(L, L). \tag{1}$$

Если отождествить $C^k(L, L)$ с пространством $L^* \wedge \cdots \wedge L^* \otimes L$, то формула дифференциала $d : C^2_\mu(L, L) \to C^3_\mu(L, L)$ с учетом $\mu \equiv 0(3)$ выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} d(X^*_{\gamma_1} \wedge X^*_{\gamma_2} \otimes X_{\gamma_3}) = \sum_{\gamma \in R} N_{\gamma,\gamma_3} X^*_{\gamma_1} \wedge X^*_{\gamma_2} \wedge X^*_\gamma \otimes X_{\gamma+\gamma_3} - \\ - \sum_{\delta_1+\delta_2=\gamma_1} N_{\delta_1,\delta_2} X^*_{\delta_1} \wedge X^*_{\delta_2} \wedge X^*_{\gamma_2} \otimes X_{\gamma_3} + \sum_{\delta_1+\delta_2=\gamma_2} N_{\delta_1,\delta_2} X^*_{\delta_1} \wedge X^*_{\delta_2} \wedge X^*_{\gamma_1} \otimes X_{\gamma_3} + \\ + X^*_{\gamma_1} \wedge X^*_{\gamma_2} \wedge X^*_{-\gamma_3} \otimes [X_{-\gamma_3}, X_{\gamma_3}]. \end{aligned} \tag{2}$$

Лемма 1. 1) $H^2(L, L) = H^2_0(L, L)$.
2) $H^2_0(L, L)$ — *тривиальный W-модуль.*

Доказательство. 1) Из (1) следует, что группа Вейля действует транзитивно на множестве ненулевых весов $G_2(K)$-модуля $H^2(L, L)$. Следовательно, достаточно доказать, что $H^2_{(6\alpha+3\beta)}(L, L) = 0$. Для этого используем спектральную последовательность Серра–Хохшильда $\{E^{p,q}_r\}$ для алгебры L, идеала $I \subset L$ и присоединенного L-модуля. Все члены спектральной последовательности инвариантны относительно максимального тора T и, следовательно, раскладываются на весовые подпространства $E^{p,q}_{r,\mu}$. $\{E^{p,q}_{r,\mu}\}$ является спектральной последовательностью Серра–Хохшильда для подкомплекса $C^\bullet_\mu(L, L)$, сходящейся к $H^\bullet_\mu(L, L)$. В частности, для $H^2_{6\alpha+3\beta}(L, L)$ получаем

$$\begin{aligned} E^{2,0}_{2,6\alpha+3\beta} &= H^2_{6\alpha+3\beta}(L/I, H^0(I, L)) = 0, \\ E^{1,1}_{2,6\alpha+3\beta} &= H^1_{6\alpha+3\beta}(L/I, H^1(I, L)) = 0, \\ E^{0,2}_{2,6\alpha+3\beta} &= H^0_{6\alpha+3\beta}(L/I, H^2(I, L)) = H^2(I, L)^{L/I} \cap H^2_{6\alpha+3\beta}(I, L). \end{aligned}$$

Здесь $H^2(I, L)^{L/I} = \{c \in H^2(I, L) \mid L/I$ действует тривиально на $c\}$. Покажем, что $H^2(I, L)^{L/I} \cap H^2_{6\alpha+3\beta}(I, L) = 0$. Базисными элементами $C^2_{6\alpha+3\beta}(I, L)$ являются $c_1 = X^*_{-\alpha} \wedge X^*_{-2\alpha-\beta} \otimes X_{(3\alpha+2\beta)}$, $c_2 = X^*_{-\alpha-\beta} \wedge X^*_{-2\alpha-\beta} \otimes X_{(3\alpha+\beta)}$. Пространство $C^1_{6\alpha+3\beta}(I, L) = 0$, а значит, $B^2_{6\alpha+3\beta}(I, L) = 0$. Пусть $c = a_1c_1 + a_2c_2 \in Z^2_{6\alpha+3\beta}(I, L)$, $a_1, a_2 \in K^*$. Рассмотрим действие элемента $X_{-(3\alpha+2\beta)}$ на c, $X_{-(3\alpha+2\beta)} \circ c = b_1X^*_{-\alpha} \wedge X^*_{-2\alpha-\beta} \otimes (H_\alpha + 2H_\beta) + b_2X^*_{-\alpha-\beta} \wedge X^*_{-2\alpha-\beta} \otimes X_{-\beta} + b_3X^*_{-\alpha} \wedge X^*_{-\alpha-\beta} \otimes X_{3\alpha+2\beta}$, где $b_1, b_2, b_3 \in K^*$. Так как $[X_{-\alpha}, X_{-2\alpha-\beta}] = 0$, то слагаемое $b_1X^*_{-\alpha} \wedge X^*_{-2\alpha-\beta} \otimes (H_\alpha + 2H_\beta)$ не содержится в $B^2(I, L)$. Следовательно, $X_{-(3\alpha+2\beta)} \circ c$ не принадлежит $B^2(I, L)$ и c не принадлежит $H^2(I, L)^{L/I}$.

2) Так как $H^2(L,L) = H_0^2(L,L)$, то образующие элементы $x_\gamma(t)$ группы $G_2(K)$ действуют тривиально на $H^2(L,L)$. Следовательно, $H_0^2(L,L)$ — тривиальный $G_2(K)$-модуль. В частности, $H_0^2(L,L)$ является тривиальным W-модулем. $\square$

2.1. *Вычисление* $H_0^2(L,L)$. Комплекс $C_0^\bullet(L,L)$ раскладывается в прямую сумму подкомплексов $U_1^\bullet$ и $U_2^\bullet$, соответствующих блокам B_1, B_2. По лемме 1 $H_0^2(L,L)$ — тривиальный W-модуль, значит, принадлежит блоку B_2. Таким образом, $H_0^2(L,L) = H^2(U_2^\bullet)$.

Теорема. $H_0^2(L,L) = H^2(U_2^{\bullet W})$, *где* $(U_2^\bullet)^W$ *— подкомплекс* W*-инвариантов в* $U_2^\bullet$.

Доказательство теоремы основано на следующих леммах.

Лемма 2. $Z^1(U_2^\bullet) = 0$.

Лемма 3. $Z^2(U_2^\bullet) = d(U_2^1) \oplus \widehat{Z}$ *— прямая сумма* W*-подмодулей.*

Доказательство. Из леммы 3 получаем $H_0^2(L,L) = H^2(U_2^\bullet) \cong \widehat{Z}$ (изоморфизм W-модулей). Согласно лемме 1 $\widehat{Z}$ — тривиальный W-модуль, т.е. $\widehat{Z} \subset Z^2(U_2^{\bullet W})$. Из леммы 3 следует, что $Z^2(U_2^{\bullet W}) = \widehat{Z} \oplus (d(U_2^1))^W$. Из леммы 2 получаем $(d(U_2^1))^W = d((U_2^1)^W) = B^2(U_2^{\bullet W})$. Таким образом, $Z^2(U_2^{\bullet W}) = \widehat{Z} \oplus B^2(U_2^{\bullet W})$. Значит, $H_0^2(L,L) \cong \widehat{Z} \cong H^2(U_2^{\bullet W})$. $\square$

Доказательство леммы 2. Согласно предложению 1 имеем $0 = H_0^1(L,L) = H^1(U_1^\bullet) \oplus H^1(U_2^\bullet)$. Таким образом, $Z^1(U_2^\bullet) = B^1(U_2^\bullet) = d(U_2^0)$, где $U_2^0 \oplus U_1^0 = C_0^0(L,L) = \mathcal{H}$. Очевидно, $w^3(H) = -H$ для любого $H \in \mathcal{H}$, т.е. $e_2\mathcal{H} = 0$ и $U_2^0 = 0$, что доказывает лемму 2. $\square$

Доказательство леммы 3. Выясним структуру W-модуля $U_2^1 = e_2 C_0^1(L,L)$, $U_2^1 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4$, где $V_1 = \langle X_\gamma^* \otimes X_\gamma + X_{-\gamma}^* \otimes X_{-\gamma},\ \gamma$ — короткий корень$\rangle$, $V_2 = \langle X_\gamma^* \otimes X_\gamma + X_{-\gamma}^* \otimes X_{-\gamma},\ \gamma$ — длинный корень$\rangle$, $V_3 = \langle H_\alpha^* \otimes H_\beta,\ H_\beta^* \otimes H_\alpha,\ H_\alpha^* \otimes H_\alpha - H_\beta^* \otimes H_\beta\rangle$, $V_4 = \langle H_\alpha^* \otimes H_\alpha + H_\beta^* \otimes H_\beta\rangle$. Легко убедиться, что $V_1 \cong V_2 \cong A_1$, $V_3 \cong A_2$ (изоморфизм W-модулей), где A_1, A_2 — главные неразложимые W-подмодули блока B_2. Таким образом, V_1, V_2, V_3 являются проективными (инъективными) W-модулями. Так как по лемме 2 $d : U_2^1 \to U_2^2$ — инъективное отображение, то dV_1, dV_2, dV_3 отщепляются в $Z^2(U_2^\bullet)$, т.е. $Z^2(U_2^\bullet) = \widetilde{Z} \oplus dV_1 \oplus dV_2 \oplus dV_3$. Очевидно, $dU_2^1 = (\widetilde{Z} \cap dU_2^1) \oplus dV_1 \oplus dV_2 \oplus dV_3$ и $\widetilde{Z} \cap dU_2^1 \cong dV_4$ (изоморфизм W-модулей), dV_4 — тривиальный W-модуль. Так как $\widetilde{Z}/\widetilde{Z} \cap dU_2^1 \cong H^2(U_2^\bullet) = H_0^2(L,L)$ — тривиальный W-модуль, то для отщепимости dU_2^1 достаточно доказать следующее утверждение: *если* $M \subset N$ *—* W*-модули,* M*,* N/M *— тривиальные* W*-модули, то* N *— тривиальный* W*-модуль.*

Действительно, $w_\alpha n = n + m$, где $m \in M$, $w_\alpha^k n = n + km$. Так как K — поле характеристики 3, то $w_\alpha^3 n = n$. Аналогично для w_β. Но $w_\alpha^2 n = w_\beta^2 n = n$, следовательно, $w_\alpha n = w_\beta n = n$. Так как w_α, w_β порождают W, то W действует тождественно на N.

Следовательно, $\widetilde{Z} \cap dU_2^1$ отщепляется в $\widetilde{Z}$, $Z^2(U_2^\bullet) = \widehat{Z} \oplus (\widetilde{Z} \cap dU_2^1) \oplus dV_1 \oplus dV_2 \oplus dV_3 = \widehat{Z} \oplus dU_2^1$. $\square$

Вычисление $H^2(U_2^{\bullet W})$. Будем говорить, что элемент $X_{\alpha_1}^* \wedge \cdots \wedge X_{\alpha_k}^* \otimes \cdots \otimes X_{\alpha_{n+1}}$ имеет тип $(\pm \cdots \pm H \pm \cdots \pm)$, где на k-м месте стоит $+$, если α_k — короткий, стоит $-$, если α_k — длинный корень, и H, если $\alpha_k = 0$. Обозначим через $V_{\pm\cdots\pm,\pm}$ подпространство в $C_0^k(L,L)$, натянутое на базисные векторы, имеющие заданный тип. Тогда

$$\begin{gathered} C_0^1(L,L) = V_{+,+} \oplus V_{-,-} \oplus \langle H_\alpha^* \otimes H_\alpha,\ H_\alpha^* \otimes H_\beta,\ H_\beta^* \otimes H_\alpha,\ H_\beta^* \otimes H_\beta\rangle, \\ C_0^2(L,L) = V_{++,+} \oplus V_{++,-} \oplus V_{+-,+} \oplus V_{--,-} \oplus V_{++,H} \oplus V_{--,H} \oplus V_{+H,+} \oplus V_{-H,-} \oplus V_{HH,H}. \end{gathered} \tag{3}$$

Лемма 4. 1) $\dim(U_2^2)^W = 8$.
2) $\dim(U_2^1)^W = 3$.

Доказательство. Пусть $W_1 = \langle w\rangle$ — подгруппа в W. W_1 действует транзитивно на множестве коротких корней и на множестве длинных корней. Очевидно, $(U_2^k)^W = (C_0^k(L,L))^W$. Каждое из подпространств $V_{\pm\cdots\pm,\pm}$ инвариантно относительно W, поэтому $(U_2^k)^W$ является прямой суммой пространств $(V_{\pm\cdots\pm,\pm})^W$.

1) Пространство $(V_{HH,H})^W = 0$.

Поэтому достаточно доказать, что каждое из оставшихся слагаемых в (3) имеет одномерное пространство W-инвариантов.

Из диаграммы корней видно, что $\dim V_{++,+} = \dim V_{++,-} = \dim V_{--,-} = 6$, $\dim V_{+-,+} = 12$.

Пусть $v = X^*_\gamma \wedge X^*_\delta \otimes X_{\gamma+\delta}$. Предположим $v \in V_{++,+}$, тогда $v, wv, w^2v, \dots, w^5v$ линейно независимы. Из действия W на X_γ в G_2 ([6], § 10) для $\gamma = \alpha$, $\delta = \alpha+\beta$ получаем $w_\beta v = v$. Так как $\dim V_{++,+} = 6$, то с точностью до пропорциональности единственным инвариантом в $V_{++,+}$ является $v_{++,+} = v + wv + \dots + w5v = \sum\limits_{g\in W_1} gv$.

Аналогично, если $v \in V_{++,-}$ или $v \in V_{--,-}$, то элемент $\sum\limits_{g\in W_1} gv$ является единственным с точностью до пропорциональности инвариантом соответствующего пространства. Эти инварианты будем обозначать через $v_{++,-}$, $v_{--,-}$ соответственно.

Если $v \in V_{+-,+}$, то $w_\beta v \notin \langle w^k v\rangle$ для любого k и все элементы gv, $g \in W$, линейно независимы. Так как $\dim V_{+-,+} = 12 = |W|$, то $V^W_{+-,+} = \langle v_{+-,+}\rangle$, где $v_{+-,+} = \sum\limits_{g\in W} gv$.

Найдем подпространство инвариантов в пространстве $V_{+H,+}$. Рассмотрим элементы $v_1 = X^*_{2\alpha+\beta} \wedge H^*_\alpha \otimes X_{2\alpha+\beta}$ и $v_2 = X^*_{2\alpha+\beta} \wedge H^*_\beta \otimes X_{2\alpha+\beta}$. Так как $w_\beta(2\alpha+\beta) = 2\alpha+\beta$, $w_\beta H^*_\alpha = H^*_\alpha$, $w_\beta H^*_\beta = -H^*_\beta$ то для v_1 и v_2 выполняются соотношения $w_\beta(v_1) = v_1$ и $w_\beta(v_2) = -v_2$. Обозначим через V_1, V_2 W-модули, порожденные v_1, v_2 соответственно. Поскольку W_1 действует транзитивно на множестве R_1 и $wH^*_\alpha = -H^*_\alpha - H^*_\beta$, $wH^*_\beta = -H^*_\beta$, то $V_{+H,+} = V_1 \oplus V_2$ — прямая сумма W-подмодулей. Модули V_1 и V_2 индуцированы с одномерных представлений подгруппы $\{1, w_\beta\}$, следовательно, $\dim V_1^W = 1$, $\dim V_2^W = 0$. Так как $v_{+H,+} = \sum\limits_{g\in W_1} gv_1$ является инвариантом, то $V^W_{+H,+} = \langle v_{+H,+}\rangle$.

Пространства инвариантов в $V_{-H,-}$, $V_{++,H}$, $V_{--,H}$ одномерны и находятся аналогично. Соответствующие базисные инварианты имеют вид $v_{-H,-} = \sum\limits_{g\in W_1} g(X^*_{3\alpha+2\beta} \wedge H^*_\beta \otimes X_{3\alpha+2\beta})$, $v_{++,H} = \sum\limits_{g\in W_1} g(X^*_\alpha \wedge X^*_{-\alpha} \otimes H_\alpha)$, $v_{--,H} = \sum\limits_{g\in W_1} g(X^*_\beta \wedge X^*_{-\beta} \otimes H_\beta)$.

2) Инвариантом в пространстве $\langle H^*_\alpha \otimes H_\alpha,\ H^*_\alpha \otimes H_\beta,\ H^*_\beta \otimes H_\alpha,\ H^*_\beta \otimes H_\beta\rangle$ является $H^*_\alpha \otimes H_\alpha + H^*_\beta \otimes H_\beta$. Инварианты в пространствах $V_{+,+}$ и $V_{-,-}$ находятся так же, как в $V_{++,+}$. □

Так как по лемме 2 $d : U^1_2 \to U^2_2$ — инъективное отображение, то $\dim B^2(U_2^{\bullet W}) = \dim(U^1_2)^W = 3$.

Лемма 5. $\dim Z^2(U_2^{\bullet W}) = 3$.

Доказательство. Достаточно показать, что $\dim B^3(U_2^{\bullet W}) \geq 5$. Докажем, что элементы $c_1 = dv_{--,H}$, $c_2 = dv_{--,-}$, $c_3 = dv_{-H,-}$, $c_4 = dv_{+H,+}$, $c_5 = dv_{++,-}$ линейно независимы. Предположим, что $c = a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + a_4c_4 + a_5c_5 = 0$, где $a_i \in k$. Из формулы дифференциала (2) легко видеть, что

$c_1 = dv_{--,H} \in V_{---,H} \oplus V_{--+,H} \oplus V_{--+,+} \oplus V_{---,-}$,
$c_2 = dv_{--,-} \in V_{---,-} \oplus V_{--+,+} \oplus V_{---,H}$,
$c_3 = dv_{-H,-} \in V_{--H,H} \oplus V_{+-H,+} \oplus V_{--H,-} \oplus V_{---,-}$,
$c_4 = dv_{+H,+} \in V_{++H,H} \oplus V_{+-H,+} \oplus V_{++H,+} \oplus V_{+++,+} \oplus V_{--+,+}$,
$c_5 = dv_{++,-} \in V_{+++,+} \oplus V_{++-,-} \oplus V_{++-,H}$.

Пусть $v = v_{++,-} = \sum\limits_{g\in W_1} g(X^*_\gamma \wedge X^*_\delta \otimes X_{\gamma+\delta})$, где γ, δ — такие корни из R_1, что $\gamma+\delta \in R_2$. Проекция векторов c_1, c_2, c_3, c_4 на пространство $V_{++-,H}$ тривиальна, значит,

$$0 = c(X_\gamma, X_\delta, X_{-\gamma-\delta}) = a_5 dv(X_\gamma, X_\delta, X_{-\gamma-\delta}) = a_5[X_{-\gamma-\delta},\ v(X_\gamma, X_\delta)] = \\ = a_5[X_{-\gamma-\delta}, X_{\gamma+\delta}] = -a_5 H_{\gamma+\delta}.$$

Следовательно, $a_5 = 0$.

Рассмотрим вектор $v = v_{+H,+} = \sum\limits_{g\in W_1} g(X^*_{\gamma_0} \wedge H^*_\alpha \otimes X_{\gamma_0})$, где $\gamma_0 = 2\alpha+\beta$. Проекция векторов c_1, c_2, c_3 на пространство $V_{+++,+}$ тривиальна, значит,

$$0 = c(X_{\gamma_0}, X_\alpha, X_{-\alpha}) = a_4 dv(X_{\gamma_0}, X_\alpha, X_{-\alpha}) = a_4(-v([X_\alpha, X_{-\alpha}], X_{\gamma_0})) = -a_4 v(H_\alpha, X_{\gamma_0}) = a_4 X_{\gamma_0}.$$

Следовательно, $a_4 = 0$.

Пусть $v = v_{-H,-} = \sum\limits_{g\in W_1} g(X^*_\gamma \wedge H^*_\beta \otimes X_\gamma)$, где $\gamma = 3\alpha + 2\beta$. Существует корень $\delta \in R_1$, для которого $\gamma + \delta \in R_1$ и, следовательно, $[X_\gamma, X_\delta] \neq 0$. Проекция векторов c_1, c_2 на $V_{-H+,+}$ тривиальна. Поэтому

$$0 = c(X_\gamma, H_\beta, X_\delta) = a_3 dv(X_\gamma, H_\beta, X_\delta) = a_3[X_\delta,\ v(X_\gamma, H_\beta)] = a_3[X_\delta, X_\gamma].$$

Следовательно, $a_3 = 0$.

Пусть $v = v_{--,-} = \sum\limits_{g\in W_1} g(X^*_\gamma \wedge X^*_\delta \otimes X_{\gamma+\delta})$, где γ, δ — такие корни из R_2, что $\gamma + \delta \in R_2$. Для $\gamma + \delta \in R_2$ существует корень $\delta_0 \in R_1$, для которого $\gamma + \delta + \delta_0 \in R_1$ и, следовательно, $[X_{\gamma+\delta}, X_{\delta_0}] \neq 0$. Так как $\gamma + \delta \in R_2$, то $\gamma \neq -\delta$, следовательно, $c_1(X_\gamma, X_\delta, X_{\delta_0}) = 0$ и

$$0 = c(X_\gamma, X_\delta, X_{\delta_0}) = a_2 dv(X_\gamma, X_\delta, X_{\delta_0}) = a_2[X_{\delta_0},\ v(X_\gamma, X_\delta)] = a_2[X_{\delta_0}, X_{\gamma+\delta}].$$

Следовательно, $a_2 = 0$.

Покажем, что $c_1 \neq 0$. Положим $v = v_{--,H} = \sum\limits_{g\in W_1} g(X^*_\beta \wedge X^*_{-\beta} \otimes H_\beta)$. Существует корень $\delta \in R_1$ такой, что $[X_\delta, H_\beta] \neq 0$.

$$c_1(X_\beta, X_{-\beta}, X_\delta) = [X_\delta,\ v(X_\beta, X_{-\beta})] = 2[X_\delta, H_\beta] \neq 0. \quad \square$$

Таким образом, $\dim H^2(U_2^{\bullet W}) = \dim Z^2(U_2^{\bullet W}) - \dim B^2(U_2^{\bullet W}) = 0$. Согласно теореме получаем, что $H^2_0(L, L) = 0$ и, значит, $H^2(L, L) = 0$.

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

Литература

1. Рудаков А.Н. *Деформации простых алгебр Ли* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1971. – Т. 35. – № 5. – С. 1113–1119.
2. Brown G. *Lie algebras of characteristic three with non-degenerate Killing form* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – V. 137. – P. 259–268.
3. Кострикин А.И. *Параметрическое семейство простых алгебр Ли* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1970. – Т. 34. – С. 744–756.
4. Джумадильдаев А.С. *К деформациям классических простых алгебр Ли* // УМН. – 1976. – Т. 31. – № 3. – С. 211–212.
5. Кострикин А.И., Кузнецов М.И. *О деформациях классических алгебр Ли характеристики три* // Докл. РАН. – 1995. – Т. 343. – № 3. – С. 299–301.
6. Стейнберг Р. *Лекции о группах Шевалле.* – М.: Мир, 1975. – 262 с.
7. Frohardt D.E., Griess R.L. (jr.). *Automorphisms of modular Lie algebras* // Nova J. Alg. Geom. – 1992. – V. 1. – P. 339–345.
8. Кэртис Ч., Райнер И. *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.* – М.: Наука, 1969. – 668 с.
9. Фукс Д.Б. *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли.* – М.: Наука, 1984. – 272 с.
10. Бурбаки Н. *Элементы математики. Группы и алгебры Ли.* – М.: Мир, 1972. – 334 с.

Нижегородский государственный университет

Поступила 19.01.1997